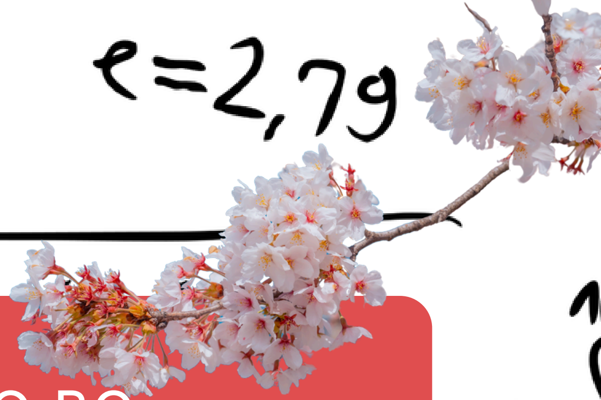


WWW.MATEINFO.RO

REVISTA ELECTRONICA MATEINFO.RO

MARTIE 2026

ISSN 2065 - 6432

REVISTĂ DIN FEBRUARIE 2009

COORDONATOR:
ANDREI OCTAVIAN DOBRE

REDACTORI PRINCIPALI ȘI SUSȚINĂTORI PERMANENȚI AI REVISTEI

NECULAI STANCIU
MARIN CHIRCIU
ROXANA MIHAELA STANCIU

ARTICOLE

R.E.M.I. MARTIE 2026

PUTEȚI TRIMITE ARTICOLE ÎN FORMAT WORD PE REVISTA.MATEINFO@YAHOO.COM

1. 126 Years Since Lalescu's limit

by Neculai Stanciu, Buzău, Romania

In this paper we will present a method for calculating of some famous limits of Lalescu-type sequences.

The ideas presented may be useful to students participating in various mathematics competitions.

All the problems addressed are original and have been published in various mathematics journals.

Teaching is a dynamic profession involving many aspects such as lecturing, questioning/responding, interpersonal skills and thinking on one's feet.

The most inspiring teachers are those who can transmit enthusiasm for their subject to the students. If the teacher cannot get excited about the subject, then why should the students?

We take it as a personal responsibility to pass on to others the techniques and concepts that have been acquired. We attempt to do this in a cheerful way by injecting humor whenever possible.

The adopted teaching philosophy can best be summed up by the phrase: teach by example, and that we make here!

Stolz-Cesàro Theorem (C-S). If $(x_n)_{n\geq 0}$ and $(y_n)_{n\geq 0}$ are sequences such that $(y_n)_{n\geq 0}$ it is strictly monotonous and boundless with $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=l\in\overline{R}$, then $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=l$.

Cauchy-D'Alembert Theorem (C-D'A). If sequence $(x_n)_{n\geq 0}$ with $x_n>0$, for any $n\in N$ and $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=l$, then $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=l$.

In the material below we will present some limits, the solution of which involves the use of the theorems stated above. Many of the problems presented are published in various national or international journals, but the solutions presented here differ from those published.

The problems solved are famous Lalescu-type limits, and this year marks 126 years since the appearance of the Lalescu limit in Romanian Mathematical Gazette.

Applications

I) The limit of *Traian Lalescu* sequence (G.M., Vol. VI, 1900-1901, problem 579, p. 148).

$$L=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}\right)=\frac{1}{e}.$$

Solution. We denote $u_n = \frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} \overset{Cauchy-D'Alembert}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e}.$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{1}{e}\cdot 1\cdot e = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n-1}{\ln u_n} = 1,\ \lim_{n\to\infty} u_n^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}} = e.$$

$$L = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!}\right) = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}\left(\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}\left(u_n - 1\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\cdot\frac{u_n-1}{\ln u_n}\cdot\ln u_n^n = \frac{1}{e}\cdot 1\cdot\ln e = \frac{1}{e}.$$

II) The limit of *D. M. Bătineţu-Giurgiu* sequence (G.M., Vol. XCIV, 1989, problem C:890, p. 139).

$$B = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^2}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}} - \frac{n^2}{\sqrt[n]{n!}}\right) = e$$

Solution. We denote $u_n = \frac{(n+1)^2\cdot\sqrt[n]{n!}}{n^2\cdot\sqrt[n+1]{(n+1)!}}$;

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2} = 1\cdot 1 = 1;\quad \lim_{n\to\infty}\frac{u_n-1}{\ln u_n} = 1;$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n^n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\cdot\frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{n+1} = e^2\cdot\frac{1}{e} = e$$

$$B = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\sqrt[n]{n!}}\left(\frac{(n+1)^2}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}\cdot\frac{\sqrt[n]{n!}}{n^2} - 1\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\sqrt[n]{n!}}(u_n - 1) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\cdot\frac{u_n-1}{\ln u_n}\cdot\ln u_n^n = e\cdot 1\cdot\ln e = e.$$

III) The limit of *Romeo T. Ianculescu* sequence (G.M., Vol. XIX, 1913-1914, problem 2042, p. 160).

$$I=\lim_{n\to\infty}((n+1)\sqrt[n+1]{(n+1)}-n\sqrt[n]{n})=1$$

Solution. We denote $u_n=\dfrac{(n+1)\cdot\sqrt[n+1]{(n+1)}}{n\cdot\sqrt[n]{n}}\to 1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n-1}{\ln u_n}=1$;

$$\lim_{n\to\infty}u_n^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)\sqrt[n+1]{n+1}}{n\sqrt[n]{n}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n+1]{n+1}}=e\cdot1\cdot1=e$$

$$I=\lim_{n\to\infty}((n+1)\sqrt[n+1]{(n+1)}-n\sqrt[n]{n})=\lim_{n\to\infty}n\sqrt[n]{n}(u_n-1)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\cdot\frac{u_n-1}{\ln u_n}\cdot\ln u_n^n=1\cdot1\cdot\ln e=1.$$

IV) (*D.M. Bătineţu-Giurgiu, Neculai Stanciu,* The College Mathematics Journal 2/2018)

If $s_n=-2\sqrt{n}+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{k}}$, $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=s$ (*Ioachimescu* constant), then compute $\lim\limits_{n\to\infty}(s_n-s)\sqrt[2n]{n!}$.

Solution. We denote $x_n=(s_n-s)\sqrt[2n]{n!}=\sqrt{n}(s_n-s)\sqrt{\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}}$. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\dfrac{1}{e}$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(s_n-s)=\lim_{n\to\infty}\frac{s_n-s}{\frac{1}{\sqrt{n}}}\overset{C-S}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{s_{n+1}-s_n}{\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n(n+1)}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}(s_n-s_{n+1})=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n(n+1)}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\left(-2\sqrt{n}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}+2\sqrt{n+1}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\left(2n+1-2\sqrt{n(n+1)}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{2n+1+2\sqrt{n(n+1)}}=\frac{1}{2}.$$

Hence, $\lim\limits_{n\to\infty}(s_n-s)\sqrt[2n]{n!}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{e}}=\dfrac{1}{2\sqrt{e}}$.

Remark. Problem 16 from Romanian Mathematical Gazette, No. 2, Vol. I, 1895-1896, p. 39, proposed by *Andrei G. Ioachimescu* (1868-1943):

Find $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-2\sqrt{n}\right)$.

V) (*D.M. Bătineţu-Giurgiu, Neculai Stanciu*, The American Mathematical Monthly 2/2016)

If $\{a_n\}_{n\geq 0}$, $a_n=\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^n}$, $x\in R$, $\{b_n(x)\}_{n\geq 1}$, $b_n(x)=n^{\sin^2 x}\left(a_{n+1}^{\cos^2 x}-a_n^{\cos^2 x}\right)$, then compute $\lim\limits_{n\to\infty} b_n(x)$.

Solution. $b_n(x)=n^{1-\cos^2 x}\left(a_{n+1}^{\cos^2 x}-a_n^{\cos^2 x}\right)=n\cdot\left(\frac{a_n}{n}\right)^{\cos^2 x}(u_n-1)=$

$$=\left(\frac{a_n}{n}\right)^{\cos^2 x}\frac{u_n-1}{\ln u_n}\ln u_n^n=\frac{(n+2)^{(n+1)\cos^2 x}}{n^{\cos^2 x}(n+1)^{n\cos^2 x}}\cdot\frac{u_n-1}{\ln u_n}\cdot\ln u_n^n=$$

$$=\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{(n+1)\cos^2 x}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\cos^2 x}\frac{u_n-1}{\ln u_n}\ln u_n^n,\ \forall n\in N^*,$$ where

$$u_n=\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^{\cos^2 x}=\left(\frac{(n+3)^{n+2}}{(n+2)^{n+1}}\cdot\frac{(n+1)^n}{(n+2)^{n+1}}\right)^{\cos^2 x},\ \forall n\in N;$$

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{n+2}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n}\right)^{\cos^2 x}=\left(e\cdot\frac{1}{e}\right)^{\cos^2 x}=1,\ \lim_{n\to\infty}\frac{u_n-1}{\ln u_n}=1.$$

$$\lim_{n\to\infty}u_n^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+3)^{n+2}}{(n+2)^{n+1}}\cdot\frac{(n+1)^n}{(n+2)^{n+1}}\right)^{n\cos^2 x}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+3}{n+1}\right)^{n\cos^2 x}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+4n+3}{n^2+4n+4}\right)^{(n^2+n)\cos^2 x}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n\cos^2 x}=e^{-\cos^2 x}\cdot e^{2\cos^2 x}=e^{\cos^2 x}.$$

So, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n(x)=e^{\cos^2 x}\cdot 1\cdot 1\cdot\ln\left(\lim\limits_{n\to\infty}u_n^n\right)=e^{\cos^2 x}\cdot\ln e^{\cos^2 x}=\cos^2 x\cdot e^{\cos^2 x}$.

Remark. Problem 4600 from Romanian Mathematical Gazette, Vol. XLI, 1935-1936, p.216, defines the sequence of *Mihail Ghermănescu* (1899 – 1962): $G_n=\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^n}-\frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}$, $n\geq 2$.

Note. For $x=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}G_n=e$.

2. Extinderi ale unor inegalităţi din Romanian Mathematical Magazine nr. 47-winter edition 2025

Prof. Gheorghe Ghiţă

Articolul prezintă extinderi ale unor inegalităţi propuse de Daniel Sitaru şi Marin Chirciu.

Propoziţie. Dacă $k, x, y, z > 0 \Rightarrow$

$$\boldsymbol{(k+1)\sqrt[3]{xyz} \le \sqrt[3]{\prod(kx+y)} \le \frac{k+1}{3}(x+y+z)} \qquad (1)$$

Gheorghe Ghiţă

Demonstraţie. $\prod(kx+y) \overset{Hölder}{\geq} \left(\sqrt[3]{kx\cdot ky\cdot kz}+\sqrt[3]{yzx}\right)^3 = (k+1)^3xyz \Rightarrow$
$\sqrt[3]{\prod(kx+y)} \ge (k+1)\sqrt[3]{xyz}$

$$\prod(\mathrm{kx+y}) \overset{\mathrm{MA-MG}}{\leq} \left(\frac{\sum(\mathrm{kx+y})}{3}\right)^3 = \left(\frac{k\sum x+\sum y}{3}\right)^3 = \frac{(\boldsymbol{k}+\mathbf{1})^3}{\mathbf{27}}(\mathrm{x+y+z})^3 \Rightarrow \sqrt[3]{\prod(\mathrm{kx+y})} \le \frac{\mathrm{k+1}}{3}(\mathrm{x+y+z})$$

Aplicaţii.

A1. In ΔABC are loc:

$$\boldsymbol{2(k+1)\sqrt{3}r \le \sqrt[3]{\prod(ka+b)} \le 2(k+1)\sqrt{3}R}$$

Gheorghe Ghiţă

Soluţie. $\sqrt[3]{\prod(\mathrm{ka+b})} \overset{(1)}{\geq} (k+1)\sqrt[3]{abc} = (k+1)\sqrt[3]{4pRr} \overset{Mitrinovic}{\geq}$

$$(k+1)\sqrt[3]{12\sqrt{3}Rr^2} \overset{Euler}{\geq} (k+1)\sqrt[3]{24\sqrt{3}r^3} = 2(k+1)\sqrt{3}r$$

$$\sqrt[3]{\prod(\mathrm{ka+b})} \overset{(1)}{\leq} \sqrt[3]{\frac{(k+1)^3}{27}(\mathrm{a+b+c})^3} = \frac{2(k+1)p}{3} \overset{Mitrinovic}{\leq} (k+1)\sqrt{3}R.$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă triunghiul este echilateral.

Pentru $k = 1$ în prima parte se obţine inegalitatea PP46324 de Daniel Sitaru, *Octogon Mathematical Magazine*:

InΔABC holds: $\boldsymbol{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)} \ge 4\sqrt{3}r}$,

iar în a doua se obţine inegalitatea propusă de Marin Chirciu in articolul *About the problem PP46324-Octogon Mathematical Magazine:* In ΔABC holds: $\boldsymbol{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)} \le 2\sqrt{3}R}$

A2. In ΔABC are loc:

$$\mathbf{3(k+1)r \leq \sqrt[3]{\prod(kr_a + r_b)} \leq \frac{3(k+1)}{2}R}$$

Gheorghe Ghiţă

Soluţie. $\sqrt[3]{\prod(\mathrm{kr_a} + \mathrm{r_b})} \overset{(1)}{\geq} (k+1)\sqrt[3]{r_a r_b r_c} = (k+1)\sqrt[3]{\frac{S^3}{(p-a)(p-b)(p-c)}} =$

$(k+1)\sqrt[3]{\frac{pS^3}{p(p-a)(p-b)(p-c)}} =$

$$(k+1)\sqrt[3]{\frac{pS^3}{S^2}} = (k+1)\sqrt[3]{pS} = (k+1)\sqrt[3]{p^2 r} \overset{Mitrinovic}{\geq} (k+1)\sqrt[3]{27r^3} = 3(k+1)r$$

$$\sqrt[3]{\prod(\mathrm{kr_a} + \mathrm{r_b})} \overset{(1)}{\leq} (k+1)\frac{r_a + r_b + r_c}{3} = (k+1)\frac{4R+r}{3} \overset{Euler}{\leq} \frac{9(k+1)R}{6} = \frac{3(k+1)R}{2}$$

Pentru $k = 1$ se obţine dubla inegalitatea propusă de Marin Chirciu in articolul *About the problem PP46324-Octogon Mathematical Magazine:* $\mathbf{6r \leq \sqrt[3]{\prod(kr_a + r_b)} \leq 3R}$

A3. In ΔABC are loc:

$$\mathbf{3(k+1)r \leq \sqrt[3]{\prod(kh_a + h_b)} \leq \frac{3(k+1)}{2}R}$$

Gheorghe Ghiţă

Soluţie. $\sqrt[3]{\prod(kh_a + h_b)} \overset{(1)}{\geq} (k+1)\sqrt[3]{h_a h_b h_c} = (k+1)\sqrt[3]{\frac{8S^3}{abc}} =$

$(k+1)\sqrt[3]{\frac{8S^3}{4RS}} =$

$$(k+1)\sqrt[3]{\frac{2S^2}{R}} = (k+1)\sqrt[3]{\frac{2p^2 r^2}{R}} \overset{p^2 \geq \frac{27Rr}{2}}{\geq} (k+1)\sqrt[3]{27r^3} = 3(k+1)r$$

$$\sqrt[3]{\prod(kh_a + h_b)} \overset{(1)}{\leq} \frac{(k+1)(h_a + h_b + h_c)}{3} = \frac{2(k+1)S\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)}{3} = \frac{2(k+1)S(\sum ab)}{3abc} \overset{\sum ab \leq 9R^2}{\leq} \frac{6(k+1)SR^2}{abc} = \frac{6(k+1)SR^2}{4RS} = \frac{3(k+1)R}{2}$$

Pentru $k = 1$ se obţine dubla inegalitatea propusă de Marin Chirciu in articolul *About the problem PP46324-Octogon Mathematical Magazine* $\mathbf{6r \leq \sqrt[3]{\prod(kh_a + h_b)} \leq 3R}$

A4. In ΔABC are loc: $\mathbf{3(k+1)r \leq \sqrt[3]{\prod(km_a + m_b)} \leq \frac{3(k+1)}{2}R}$

Gheorghe Ghiţă

Soluţie. $\sqrt[3]{\prod(\mathrm{km_a}+\mathrm{m_b})} \overbrace{\geq}^{m_a\geq h_a} \sqrt[3]{\prod(\mathrm{kh_a}+\mathrm{h_b})} \overbrace{\geq}^{A3} 3(\mathrm{k}+1)r$

$$\sqrt[3]{\prod(\mathrm{km_a}+\mathrm{m_b})} \overbrace{\leq}^{(1)} (\mathrm{k}+1) \leq \frac{(k+1)(m_a+m_b+m_c)}{3} \overbrace{\leq}^{Leuennberger} \frac{(k+1)(4R+r)}{3} \overbrace{\leq}^{Euler} \frac{3(k+1)}{2}\mathrm{R}$$

A5. In ΔABC are loc: $\boldsymbol{3(k+1)r \leq \sqrt[3]{\prod(kw_a+w_b)} \leq \frac{3(k+1)}{2}R}$

Gheorghe Ghiţă

Soluţie. $\sqrt[3]{\prod(\mathrm{kw_a}+\mathrm{w_b})} \overbrace{\geq}^{\mathrm{w_a}\geq h_a} \sqrt[3]{\prod(\mathrm{kh_a}+\mathrm{h_b})} \overbrace{\geq}^{A3} 3(\mathrm{k}+1)r;$

$$\sqrt[3]{\prod(\mathrm{kw_a}+\mathrm{w_b})} \overbrace{\leq}^{\mathrm{w_a}\leq \mathrm{m}_a} \sqrt[3]{\prod(\mathrm{km_a}+\mathrm{m_b})} \overbrace{\leq}^{A4} \frac{3(k+1)}{2}\mathrm{R}$$

A6. In ΔABC are loc: $\boldsymbol{3(k+1)r \leq \sqrt[3]{\prod(ks_a+s_b)} \leq \frac{3(k+1)}{2}R}$

Gheorghe Ghiţă

Soluţie. $\sqrt[3]{\prod(\mathrm{ks_a}+s_{\mathrm{b}})} \overbrace{\geq}^{\mathrm{s_a}\geq h_a} \sqrt[3]{\prod(\mathrm{kh_a}+\mathrm{h_b})} \overbrace{\geq}^{A3} 3(\mathrm{k}+1)r;$

$$\sqrt[3]{\prod(\mathrm{ks_a}+\mathrm{s_b})} \overbrace{\leq}^{\mathrm{s_a}\leq \mathrm{m}_a} \sqrt[3]{\prod(\mathrm{km_a}+\mathrm{m_b})} \overbrace{\leq}^{A4} \frac{3(k+1)}{2}\mathrm{R}$$

A7. If $a,b,c>0$ then: $\sum\frac{\sqrt{(ka+b)(kb+c)}}{b} \geq \boldsymbol{3(k+1)}$.

Gheorghe Ghiţă

Solution. $\sum\frac{\sqrt{(ka+b)(kb+c)}}{b} \overbrace{\geq}^{MA-MG} 3\sqrt[3]{\frac{\sqrt{(ka+b)(kb+c)}}{b}\cdot\frac{\sqrt{(ka+b)(kb+c)}}{b}\cdot\frac{\sqrt{(ka+b)(kb+c)}}{b}} =$

$$3\sqrt[3]{\frac{\prod(ka+b)}{abc}} \overbrace{\geq}^{(1)} 3(k+1)\sqrt[3]{\frac{abc}{abc}} = 3(k+1).$$

For $k=1$ is obtained problem 1998 proposed by Nguyen Hung Cuong-Vietnam, RMM-Cyclic Inequalities Marathon 1901-2000.

A8. In ΔABC the following relationship: $\mathbf{\frac{27(k+1)^3}{2}Rr^2 \leq \prod(kr_a+r_b) \leq \frac{(k+1)^3}{6}R(4R+r)^2}$

Gheorghe Ghiţă

Solution. $\prod(\mathrm{kr_a}+\mathrm{r_b}) \overbrace{\geq}^{(1)} (\mathrm{k}+1)^3 r_a r_b r_c = (\mathrm{k}+1)^3\frac{S^3}{(p-a)(p-b)(p-c)} = (\mathrm{k}+1)^3\frac{pS^3}{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$

$$(\mathrm{k}+1)^3\frac{pS^3}{S^2}=(\mathrm{k}+1)^3pS=(\mathrm{k}+1)^3p^2r\overset{p^2\geq\frac{27Rr}{2}}{\geq}\frac{\mathbf{27(k+1)^3}}{\mathbf{2}}\mathrm{Rr}^2;$$

$$\prod(\mathrm{kr_a}+\mathrm{r_b})\overset{(1)}{\leq}\frac{(k+1)^3}{27}(\mathrm{r_a}+\mathrm{r_b}+\mathrm{r_c})^3=\frac{(k+1)^3}{27}(4R+r)^3\overset{Euler}{\leq}\frac{(k+1)^3}{27}\cdot\frac{9R}{2}(4R+r)^2=\frac{(k+1)^3}{6}R(4R+r)^2.$$

For $k=1$ is obtained problem J3059 proposed by Marin Chirciu, RMM nr.46-autumn edition 2025

Bibliografie

[1] Marin Chirciu, *About the problem PP46324-Octogon Mathematical Magazin-* Romanian Mathematical Magazine nr. 47-winter edition 2025

[2] Gheorghe Ghiţă ,*Extinderi ale inegalităţilor Cesaro şi Padoa-* Revista Electronică Mateinfo.ro, 2025

[3] RMM-Cyclic Inequalities Marathon 1901-2000

-

3. Inegalităţi rezolvate prin mai multe metode

Prof. Pogorevici Aura-Loreta

Problema 1
Dacă $0<a<b$ şi $x_i \in [a,b]$, $i=1,2,\ldots,n$ atunci are loc inegalitatea:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-1}\right) \le \frac{(a+b)^2 \cdot n^2}{4ab}.$$

(Olimpiadă, 1981, faza judeţeană)

Soluţie.
Soluţia clasică este:
Din $(x_i-a)(x_i-b)\le 0$, pentru că $a\le x_i \le b$, obţinem $x_i^2+ab\le (a+b)x_i$, sau, împărţind cu $x_i \ne 0$ rezultă că $x_i+abx_i^{-1}\le a+b$. Sumând după i de la 1 la n rezultă $\sum_{i=1}^{n} x_i + ab\sum_{i=1}^{n} x_i^{-1} \le n(a+b)$. Aplicând inegalitatea mediilor avem:

$$2\sqrt{ab\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i^{-1}} \le \sum_{i=1}^{n} x_i + ab\sum_{i=1}^{n} x_i^{-1}.$$

Din ultimele două relaţii rezultă inegalitatea cerută.
O problemă deosebită ar fi: când are loc egalitatea? Egalitatea are loc dacă şi numai dacă avem egalitate în $(x_i-a)(x_i-b)\le 0$ şi în inegalitatea mediilor, adică

$$\begin{cases} x_i \in \{a,b\} \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = ab\sum_{i=1}^{n} x_i^{-1} \end{cases}$$

anume, k $(0\le k\le n)$ dintre numerele x_i sunt egale cu a, $n-k$ dintre numerele x_i sunt egale cu b şi $\sum_{i=1}^{n} x_i = ab\sum_{i=1}^{n} x_i^{-1}$, deci $ka+(n-k)b = ab\left(\frac{k}{a}+\frac{n-k}{b}\right)$. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $\frac{n}{2}$ dintre numerele x_i sunt egale cu a şi $\frac{n}{2}$ sunt egale cu b. Dar dacă n este impar?
Se impune deci o altă abordare a problemei.
Din $(x_i-a)(x_i-b)\le 0 \Rightarrow x_i+abx_i^{-1}\le a+b \Leftrightarrow x_i^{-1}\le \frac{a+b-x_i}{ab}$. Deci

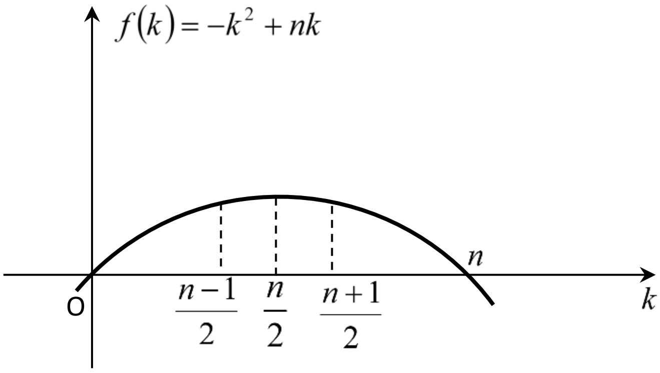
$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-1}\right) \le \frac{1}{ab}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left[\sum_{i=1}^{n}(a+b-x_i)\right] = \frac{1}{ab}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left[n(a+b)-\sum_{i=1}^{n} x_i\right].$$

Aici egalitatea are loc când $x_i \in \{a,b\}$. Mai rămâne de văzut care este valoarea <u>maximă</u> a membrului din dreapta. Să presupunem k dintre x_i egali cu a şi $n-k$ egali cu b. Valoarea expresiei este:

$$\frac{1}{ab}[ka+(n-k)b]\cdot[n(a+b)-ka-(n-k)b] = \frac{[(a-b)k+nb]\cdot[(b-a)k+na]}{ab} =$$

$$= n^2 + \frac{-(b-a)^2k^2+n(b-a)^2k}{ab} = n^2 + \frac{(b-a)^2}{ab}\left[-k^2+nk\right].$$

Deci vrem valoarea maximă a lui $-k^2+nk$, cu n fixat.



Dacă n este par, maximul se atinge în vârful parabolei, deci când $k = \frac{n}{2}$, iar valoarea maximă este $n^2 + \frac{(b-a)^2 n^2}{4ab} = \frac{(a+b)^2 n^2}{4ab}$.

Dacă n este impar, maximul se atinge când k ia o valoare întreagă imediat inferioară lui $\frac{n}{2}$, adică $\frac{n-1}{2}$ sau $\frac{n+1}{2}$. Vom calcula ambele valori ale lui $f(k)$ pentru $k = \frac{n \pm 1}{2}$ şi vom arăta că ele sunt egale, deci valoarea comună va fi şi valoarea maximă a expresiei date. Într-adevăr:

$$n^2 + \frac{(b-a)^2}{ab} \cdot \left[-\left(\frac{n \pm 1}{2} \right)^2 + n \cdot \frac{n \pm 1}{2} \right] = n^2 + \frac{(b-a)^2}{ab} \cdot \frac{n^2 - 1}{4} = = \frac{(a+b)^2 n^2}{4ab} - \frac{(b-a)^2}{4ab}.$$

În concluzie:

$$(*) \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-1} \right) \le \begin{cases} \frac{(a+b)^2 n^2}{4ab}, & \text{dacă } n \text{ este par} \\ \frac{(a+b)^2 n^2}{4ab} - \frac{(b-a)^2}{4ab}, & \text{dacă } n \text{ este impar.} \end{cases}$$

Egalitatea are loc astfel:

Când n este par, $\frac{n}{2}$ dintre x_i sunt egali cu a şi $\frac{n}{2}$ egali cu b.

Când n este impar, $\frac{n-1}{2}$ dintre x_i sunt egali cu a şi $\frac{n+1}{2}$ egali cu b sau $\frac{n+1}{2}$ egali cu a şi $\frac{n-1}{2}$ egali cu b.

Observaţie:

Revenind la inegalitatea iniţială putem spune că $\frac{(a+b)^2 n^2}{4ab}$ este chiar maximul expresiei $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-1} \right)$ pentru n par, iar pentru n impar este doar o majorantă (deci inegalitatea este strictă pentru n impar), maximul fiind cel obţinut în (*).

Problema 2

Să se arate că $\left|\frac{2x}{x^2+1}\right| \le 1, (\forall) x \in \mathbf{R}^*$.

(Olimpiadă, faza locală, 1994)

Soluţia 1.

$\left|\frac{2x}{x^2+1}\right| \le 1 \Leftrightarrow |2x| \le x^2+1 \Leftrightarrow -x^2-1 \le 2x \le x^2+1 \Leftrightarrow \begin{cases}(x-1)^2 \ge 0 \\ (x+1)^2 \ge 0\end{cases}$ care sunt două inegalităţi evident adevărate.

Soluţia 2.

Notând $x = \mathrm{tg}a$ inegalitatea se scrie în mod echivalent $\left|\frac{2x}{x^2+1}\right| = |\sin 2a| \le 1$ care este evident adevărată.

Soluţia 3.

Fie $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.

$g'(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2} = \frac{2(-x^2+1)}{(x^2+1)^2}$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ sau $x = -1$. Punctul $x = 1$ este punct de maxim, iar punctul $x = -1$ este de minim.

$g(1) = 1$; $g(-1) = -1$. Deci $|g(x)| \le 1$.

Soluţia 4.

Folosind inegalitatea mediilor avem:

$$\frac{\left|x + \frac{1}{x}\right|}{2} \ge \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{|2x|} \ge 1 \Leftrightarrow \left|\frac{2x}{x^2+1}\right| \le 1.$$

Soluţia 5.

Se ştie că $x + \frac{1}{x} = \frac{x^2+1}{x} \ge 2$ pentru $x > 0$.

Problema 3

Dacă $|a| \le 1$, $|b| \le 1$, atunci: $\sqrt{1-a^2} + \sqrt{1-b^2} \le 2\sqrt{1 - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2}$.

(Concurs admitere)

Soluţia 1 algebrică.

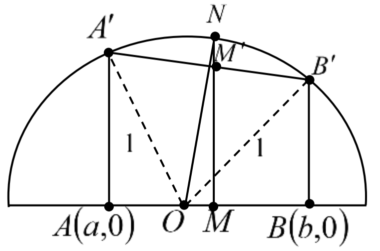
Prin ridicare la pătrat avem: $1 - a^2 + 1 - b^2 + 2\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} \le 4\left[1 - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 - a^2 - b^2 + 2\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} \le 4 - a^2 - b^2 - 2ab \Leftrightarrow \sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} \le 1 - ab$. Având tot numere pozitive în ambii membri, printr-o nouă ridicare la pătrat avem:

$1 - a^2 - b^2 + a^2b^2 \le 1 - 2ab + a^2b^2 \Leftrightarrow -b^2 - a^2 \le -2ab \quad |\cdot(-1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 \ge 2ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \ge 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \ge 0$ (adevărată).

Soluţia 2 geometrică.
Fie un semicerc de rază 1 şi $A(a,0), B(b,0)$ luate oriunde pe diametrul ce delimitează semicercul.



Construim trapezul $ABB'A'$ înscris în semicerc $AA' \perp AB$; $BB' \perp AB$ şi fie M mijlocul $[AB]$, iar M' mijlocul $[A'B']$. Deci MM' este linie mijlocie a trapezului $ABB'A'$.

$\|OA\| = |a|, \|OB\| = |b|, \|OM\| = \left|\frac{a+b}{2}\right|, \|AA'\| = \sqrt{1-a^2}, \|BB'\| = \sqrt{1-b^2},$

$\|MM'\| = \frac{\|AA'\| + \|BB'\|}{2} = \frac{\sqrt{1-a^2}+\sqrt{1-b^2}}{2}$; Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul OMN avem: $\|NM\| = \sqrt{1-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}$.

Cum $\|NM\| \geq \|MM'\| \Leftrightarrow \sqrt{1-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2} \geq \frac{\sqrt{1-a^2}+\sqrt{1-b^2}}{2}$.

Soluţia 3 trigonometrică.
Deoarece $|a| \leq 1$ şi $|b| \leq 1$ putem considera $a = \cos\alpha, b = \cos\beta$, unde $\alpha, \beta \in [0,\pi]$.

Inegalitatea din enunţ devine: $\sqrt{1-\cos^2\alpha} + \sqrt{1-\cos^2\beta} \leq 2\sqrt{1-\left(\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{2}\right)^2} \Leftrightarrow \sin\alpha + \sin\beta \leq$

$\leq \frac{2}{2}\sqrt{4-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta} \Leftrightarrow \sin\alpha+\sin\beta \leq \sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\beta+2(1-\cos\alpha\cos\beta)}$.

Prin ridicare la pătrat avem:

$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta \leq \sin^2\alpha + \sin^2\beta + 2 - 2\cos\alpha\cos\beta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta \leq 1 \Leftrightarrow \cos(\alpha-\beta) \leq 1$ care este evident o relaţie evident adevărată.

Se mai pot da două soluţii bazate pe analiza matematică:

Soluţia 4.
Fie $f : [-1,1] \to [0,1], f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}, f''(x) = \frac{-1}{(1-x^2)^{3/2}} < 0$ (nu este derivabilă în punctele ± 1, dar acest fapt nu influenţează demonstraţia). Deci funcţia f este concavă $\Rightarrow \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \leq f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$.

Considerând $x_1 = a$ şi $x_2 = b$ inegalitatea devine: $\frac{\sqrt{1-a^2}+\sqrt{1-b^2}}{2} \leq \sqrt{1-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}$.

Observaţie.
Demonstraţia aceasta coincide cu soluţia geometrică deoarece graficul funcţiei alese este chiar semicercul considerat acolo.

Soluţia 5.

Fie $g:[0,1)\to[0,+\infty),\ g(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

$g'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}\left(1-x^2\right)}>0,\ (\forall)x\in[0,1)$. Atunci funcţia g este crescătoare pe $[0,1)$.

Alegem $0\le a\le b\le 1$. Aria mărginită de graficul funcţiei g, axa Ox şi dreptele $x=a$, $x=\dfrac{a+b}{2}$ este mai mică decât aria mărginită de graficul funcţiei g, axa Ox şi dreptele $x=b$, $x=\dfrac{a+b}{2}$. Avem: $\displaystyle\int_a^{\frac{a+b}{2}}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\le\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\Leftrightarrow-\sqrt{1-\cancel{x}^2}\,\Big|_a^{\frac{a+b}{2}}\le-\sqrt{1-\cancel{x}^2}\,\Big|_{\frac{a+b}{2}}^{b}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sqrt{1-a^2}+\sqrt{1-b^2}\le 2\sqrt{1-\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2}$.

BIBLIOGRAFIE:

1. BECHEANU M., ECKSTEIN Gh., ENESCU B., MIHEŢ D., BĂLUNĂ M. şi col., *Olimpiadele de matematică 1990-1996 liceu*, Editura Gil, Zalău, 1997.
2. BECHEANU M., ENESCU B., *Inegalităţi elementare ... şi mai puţin elementare*, Editura Gil, Zalău, 2002.
3. BRÂNZEI D., ULMEANU S., GORGOTĂ V., *Matematica în concursurile şcolare – clasele IX-XII*, Editura Paralela 45, Piteşti, 2001.
4. GANGA M., *Teme şi probleme de matematică*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1991.
5. TOMESCU I. şi col., *Probleme date la olimpiadele de matematică pentru licee 1950-1990*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1991.
6. TUDOR Victor, *Probleme de algebră cu rezolvări ingenioase – culegere metodo-logică şi integrativă*, Editura Carminis, Piteşti, 1999.

Art 9800

Math Journal

-9-

Marin Chirciu [1]

Mathematical Journal prezintă o selecție de probleme recente din diverse publicații de specialitate .

Problema1050.

Solve for $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$4^{\sqrt{\sin x}} + 2^{\sqrt{\cos x}} = \log_2 \frac{8}{1+x^2}.$$

Niculae Cavachi, Constanța, OL-Constanța-2014

Soluție.

Avem $LHS = 4^{\sqrt{\sin x}} + 2^{\sqrt{\cos x}} \geq 4^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} = 4^{\sin^2 x} + \frac{2}{2^{\sin^2 x}} = 4^{\sin^2 x} + \frac{1}{2^{\sin^2 x}} + \frac{1}{2^{\sin^2 x}} \overset{Medii}{\geq}$

$\overset{Medii}{\geq} 3\sqrt[3]{4^{\sin^2 x} \cdot \frac{1}{2^{\sin^2 x}} \cdot \frac{1}{2^{\sin^2 x}}} = 3$, cu egal pentru $x = 0$.

$RHS = \log_2 \frac{8}{1+x^2} \leq \log_2 \frac{8}{1+0} = \log_2 8 = 3$, cu egal pentru $x = 0$.

Am obținut $LHS = 4^{\sqrt{\sin x}} + 2^{\sqrt{\cos x}} \geq 3 \geq \log_2 \frac{8}{1+x^2} = RHS$, cu egal pentru $x = 0$.

Deducem că soluția ecuației este $x = 0$.

Remarcă.

Let be $\lambda > 1$ fixed. Solve for $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

[1] *Profesor, Colegiul Național „Zinca Golescu"Pitești*

$$\lambda^{2\sqrt{\sin x}}+2^{\sqrt{\cos x}}=\log_{\lambda}\frac{\lambda^3}{1+x^2}.$$

Marin Chirciu

Deducem că soluția ecuației este $x=0$.

Problema1051.

Solve for reals

$$\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=3\sqrt{2}\\ 2^{x^2+y}+2^{y^2+z}+2^{z^2+x}=192\end{cases}.$$

Cătălin Zîrnă, Constanța, OL-Constanța-2014

Soluție.

Avem $\sum x\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum\sqrt{x}\right)^2}{3}=\frac{\left(3\sqrt{2}\right)^2}{3}=\frac{18}{3}=6$.

$$\sum x^2\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum x\right)^2}{3}\geq\frac{6^2}{3}=12.$$

$$\sum 2^{x^2+y}\overset{AG}{\geq}3\sqrt[3]{\prod 2^{x^2+y}}=3\sqrt[3]{2^{\sum x^2+\sum y}}\overset{\sum x^2\geq 12,\sum x\geq 6}{\geq}3\sqrt[3]{2^{12+6}}=3\sqrt[3]{2^{18}}=3\cdot 2^6=192.$$

Deducem că soluția sistemului este $(x,y,z)=(2,2,2)$.

Remarcă.

Let be $\lambda>1$ fixed. Solve for reals

$$\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=3\sqrt{\lambda}\\ \lambda^{x^2+y}+\lambda^{y^2+z}+\lambda^{z^2+x}=3\lambda^{\lambda^2+\lambda}\end{cases}.$$

Marin Chirciu

Deducem că soluția sistemului este $(x,y,z)=(\lambda,\lambda,\lambda)$.

Problema1052.

If $a,b,c,d>0$, $abcd=1$ then

$$\sum\frac{1}{a+3}\le\frac{a+b+c+d}{4}.$$

Crăciun Gheorghe, Mathematical Inequalities 2/2026

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{1}{a+3}=\sum\frac{1}{a+1+1+1}\overset{AG}{\le}\sum\frac{1}{4\sqrt[4]{a\cdot1\cdot1\cdot1}}=\sum\frac{1}{4\sqrt[4]{a}}\overset{abcd=1}{=}\sum\frac{1}{4}\sqrt[4]{bcd}\overset{AG}{\le}$$
$$\overset{AG}{\le}\frac{1}{4}\sum\frac{1+b+c+d}{4}=\frac{1}{16}\left(4+3\sum a\right)\overset{AG}{\le}\frac{1}{16}\left(\sum a+3\sum a\right)=\frac{1}{16}\cdot4\sum a=\frac{1}{4}\sum a=RHS.$$

Am folosit mai sus(AG): $\sum a\ge4$, vezi $\sum a\overset{AG}{\ge}4\sqrt[4]{abcd}=4\sqrt[4]{1}=4$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=d=1$.

Remarcă.

If $a_1,a_2,...,a_n>0$, $a_1a_2...a_n=1$ then

$$\sum\frac{1}{a_1+n-1}\le\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{1}{a_1+n-1}=\sum\frac{1}{a_1+\underbrace{1+...+1}_{n-1}}\overset{AG}{\le}\sum\frac{1}{n\sqrt[n]{a\cdot\underbrace{1\cdot1\cdot1}_{n-1}}}=\sum\frac{1}{n\sqrt[n]{a_1}}\overset{a_1a_2...a_n=1}{=}\sum\frac{1}{n}\sqrt[n]{a_2...a_n}\overset{AG}{\le}$$
$$\overset{AG}{\le}\frac{1}{n}\sum\frac{1+a_2+a_3+...+a_n}{n}=\frac{1}{n^2}\left(n+(n-1)\sum a\right)\overset{AG}{\le}\frac{1}{n^2}\left(\sum a+(n-1)\sum a\right)=\frac{1}{n^2}\cdot n\sum a=$$
$$=\frac{1}{n}\sum a=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a_1=a_2=...=a_n=1$.

Problema1053.

If $a,b,c\ge0$, $a^2+b^2+c^2=1$ then

$$\sum\frac{\sqrt{a}}{1+\sqrt{3b}}\ge\frac{1}{6}.$$

Alexandru Cărnaru, OL Constanța-2014

Soluție.

Din $a,b,c\ge 0$, $a^2+b^2+c^2=1\Rightarrow a,b,c\in[0,1]\Rightarrow \sqrt{a}\ge a\ge a^4$.

$$LHS=\sum\frac{\sqrt{a}}{1+\sqrt{3b}}\overset{\sqrt{a}\ge a^4}{\ge}\sum\frac{a^4}{1+\sqrt{3b}}\overset{CS}{\ge}\frac{\left(\sum a^2\right)^2}{\sum\left(1+\sqrt{3b}\right)}=\frac{1}{3+\sqrt{3}\sum a}\overset{\sum a\le\sqrt{3}}{\ge}\frac{1}{3+\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{1}{6}=RHS.$$

Am folosit mai sus $1=a^2+b^2+c^2\overset{CS}{\ge}\frac{\left(\sum a\right)^2}{3}\Rightarrow\sum a\le\sqrt{3}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

Remarcă.

If $a,b,c\ge 0$, $a^n+b^n+c^n=1$, $n\in\mathbf{N},n\ge 2$ then

$$\sum\frac{\sqrt[n]{a}}{1+\sqrt[n]{3b}}\ge\frac{1}{6}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Din $a,b,c\ge 0$, $a^n+b^n+c^n=1\Rightarrow a,b,c\in[0,1]\Rightarrow \sqrt[n]{a}\ge a\ge a^{2n}$.

$$LHS=\sum\frac{\sqrt[n]{a}}{1+\sqrt[n]{3b}}\overset{\sqrt[n]{a}\ge a^{2n}}{\ge}\sum\frac{a^{2n}}{1+\sqrt[n]{3b}}\overset{CS}{\ge}\frac{\left(\sum a^n\right)^2}{\sum\left(1+\sqrt[n]{3b}\right)}=\frac{1}{3+\sqrt[n]{3}\sum a}\overset{\sum a\le\sqrt[n]{3^{2n}}}{\ge}\frac{1}{3+\sqrt[n]{3}\cdot\sqrt[n]{3^{n-1}}}=$$

$$=\frac{1}{6}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

Problema1054.

If $a,b,c>0$,then

$$\sum\sqrt{\frac{bc}{(a+b)(a+c)}}\le\frac{3}{2}.$$

OL-2014

Soluție.

$$LHS=\sum\sqrt{\frac{bc}{(a+b)(a+c)}}=\sum\sqrt{\frac{b}{a+b}\cdot\frac{c}{a+c}}\overset{AG}{\leq}\sum\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a+b}+\frac{c}{a+c}\right)=\frac{3}{2}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

Remarcă.

If $a,b,c>0$,then

$$\sum\sqrt[4]{\frac{bc}{(a+b)(a+c)}}\leq\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS=\sum\sqrt[4]{\frac{bc}{(a+b)(a+c)}}=\sum\sqrt{\sqrt{\frac{bc}{(a+b)(a+c)}}}\overset{CBS}{\leq}\sqrt{3\sum\sqrt{\frac{bc}{(a+b)(a+c)}}}\overset{Lema}{\leq}\sqrt{3\cdot\frac{3}{2}}=$$

$$=\frac{3}{\sqrt{2}}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

Lema.

If $a,b,c>0$,then

$$\sum\sqrt{\frac{bc}{(a+b)(a+c)}}\leq\frac{3}{2}.$$

Problema1055.

In ΔABC holds:

$$\frac{\sum\frac{1}{h_a}}{\sum\frac{1}{m_a}}\leq\left(\frac{R}{2r}\right)^2.$$

Adil Abdullayev, Azerbaijan, RMM2/2020

Soluție.

Folosind $\sum\frac{1}{h_a}=\frac{1}{r}$ și $\sum\frac{1}{m_a}\geq\frac{2}{R}\Rightarrow$ $LHS=\frac{\sum\frac{1}{h_a}}{\sum\frac{1}{m_a}}\leq\frac{\frac{1}{r}}{\frac{2}{R}}=\frac{R}{2r}\overset{Euler}{\leq}\left(\frac{R}{2r}\right)^2=RHS$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

In ΔABC holds:

$$1\leq\frac{\sum\frac{1}{h_a}}{\sum\frac{1}{m_a}}\leq\frac{R}{2r}.$$

Marin Chirciu

Problema1056.

In ΔABC holds:

$$\sum\frac{1}{w_a}\geq\frac{3\sqrt{3}}{p}.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam, RMM 2/2026

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{1}{w_a}\overset{AG}{\geq}3\sqrt[3]{\frac{1}{w_aw_bw_c}}\overset{w_aw_bw_c\leq r_ar_bwr}{\geq}3\sqrt[3]{\frac{1}{r_ar_br_c}}=3\sqrt[3]{\frac{1}{rp^2}}\overset{Mitrinovic}{\geq}\frac{3\sqrt{3}}{p}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

In ΔABC holds:

$$\sum\left(\frac{1}{w_a}\right)^n\geq3\left(\frac{\sqrt{3}}{p}\right)^n.$$

Marin Chirciu

Problema1056.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=1$ then

$$\sum \frac{x}{1+x} \le \frac{3}{4}.$$

Stud. Rareș-Andrei Cotoi, Cluj-Napoca

Soluție.

Lema.

If $x, y, z > 0$, $x+y+z=1$ then

$$\frac{x}{1+x} \le \frac{9x+1}{16}$$

Folosim Tangent Line Method pentru funcția $f(x)=\frac{x}{1+x}$, $x \in (0,1)$ în punctul $x_0=\frac{1}{3}$.

Ecuația tangentei este $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow y-\frac{1}{4}=\frac{9}{16}\left(x-\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow y=\frac{9x+1}{16}$.

Avem $f(x)=\frac{x}{1+x} \le \frac{9x+1}{16} \Leftrightarrow (3x-1)^2 \ge 0$.

Folosind **Lema** obținem:

$$\sum \frac{x}{1+x} \overset{Lema}{\le} \sum \frac{9x+1}{16} = \frac{9\sum x+3}{16} = \frac{9+3}{16} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Remarcă.

If $x, y, z > 0$, $x+y+z=1$ and $\lambda \ge 0$ then

$$\sum \frac{x}{\lambda+x} \le \frac{3}{3\lambda+1}.$$

Marin Chirciu

Problema1057.

If $a, b, c, d > 0$ then

$$\sum \frac{a^4}{bcd} \ge \frac{16abcd}{abc+abd+acd+bcd}$$

Crăciun Gheorghe, Mathematical Inequalities 2/2026

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{a^4}{bcd}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum a^2\right)^2}{\sum bcd}\overset{AG}{\geq}\frac{\left(4\sqrt[4]{(abcd)^2}\right)^2}{\sum bcd}=\frac{16abcd}{abc+abd+acd+bcd}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=d$.

Remarcă.

If $a,b,c,d>0$ and $n\in\mathbf{N}$ then

$$\sum\frac{a^{2n}}{bcd}\geq\frac{16(abcd)^{\frac{n}{2}}}{abc+abd+acd+bcd}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Pentru $n=0$ avem $\sum\frac{1}{bcd}\geq\frac{16}{abc+abd+acd+bcd}$, vezi CS.

Pentru $n=1$ avem $\sum\frac{a^2}{bcd}\geq\frac{16\sqrt{abcd}}{abc+abd+acd+bcd}$, vezi CS și AM-GM.

Pentru $n\geq 2$ se folosește inegalitatea lui Holder.

$$LHS=\sum\frac{a^{2n}}{bcd}\overset{Holder}{\geq}\frac{\left(\sum a^2\right)^n}{4^{2n-2}\sum bcd}\overset{AG}{\geq}\frac{\left(4\sqrt[4]{(abcd)^2}\right)^n}{4^{n-2}\sum bcd}=\frac{4^n(abcd)^{\frac{n}{2}}}{4^{n-2}\sum bcd}=\frac{16(abcd)^{\frac{n}{2}}}{abc+abd+acd+bcd}=$$

$$=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=d$.

Problema 1058.

If $a,b,c>0, abc=1$ then

$$\sum\frac{4a-1}{(2b+1)^2}\geq 1$$

Thailand-2019

Soluție.

$\sum\frac{4a-1}{(2b+1)^2}\ge 1 \Leftrightarrow \sum\left(\frac{4a-1}{(2b+1)^2}+1\right)\ge 4$, vezi:

$$\sum\left(\frac{4a-1}{(2b+1)^2}+1\right)=\sum\frac{4a-1+4b^2+4b+1}{(2b+1)^2}=\sum\frac{4a+4b^2+4b}{(2b+1)^2}=\sum\frac{4\left(b^2+b+a\right)}{(2b+1)^2}\overset{(1)}{\ge}4,$$

unde $\sum\frac{4\left(b^2+b+a\right)}{(2b+1)^2}\overset{(1)}{\ge}4 \Leftrightarrow \sum\frac{b^2+b+a}{(2b+1)^2}\ge 1$, care rezultă din:

Lema.

If $a,b,c>0$ then

$$\frac{b^2+b+a}{(2b+1)^2}\ge\frac{a}{a+ab+1}.$$

Demonstrație.

$$\left(b^2+b+a\right)\left(1+b+\frac{1}{a}\right)\overset{CBS}{\ge}(b+b+1)^2=(2b+1)^2 \Rightarrow \frac{b^2+b+a}{(2b+1)^2}\ge\frac{1}{1+b+\frac{1}{a}}=\frac{a}{a+ab+1}.$$

$$\sum\frac{b^2+b+a}{(2b+1)^2}\ge\sum\frac{a}{a+ab+1}\overset{abc=1}{=}1.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarcă.

If $a,b,c>0, abc=1$ then

$$\sum\frac{(4a-1)^n}{(2b+1)^{2n}}\ge\frac{1}{3^{n-1}}.$$

Marin Chirciu

Problema 1059.

Q117. Let ABC be a triangle with AD the hight from A ,and E respectively F the midlle of the sides AC ,respectively AB .For any point P from the plane of triangle ABC , let Y and Z be its symmetric from the points E ,respectively F . If P' is the midlle at DP and $M=BY\cap CZ$, then prove that the line MP' passes through a fixed point.

Titu Zvonaru, Sclipirea Minții Nr36/2025, Q117

Soluție.

Folosim afixele punctelor din planul (ABC).

Fie $A(a),B(b),C(c),D(d),E(e),F(f),P(p),P'(p'),Y(y),Z(z)$.

Avem $e=\frac{a+c}{2}, f=\frac{a+b}{2}, p'=\frac{d+p}{2}$.

$$Y=2E-P=\left(2\cdot\frac{a+c}{2}-p\right)=(a+c-p)\Rightarrow Y(a+c-p)\Rightarrow y=a+c-p.$$

$$Z=2F-P=\left(2\cdot\frac{a+b}{2}-p\right)=(a+b-p)\Rightarrow Z(a+b-p)\Rightarrow z=a+b-p.$$

Aven $M=BY\cap CZ$.

Ecuațiile parametrice ale dreptei BY : $m=b+t(a+c-p)$;

Ecuațiile parametrice ale dreptei CZ : $m=c+t(a+b-p)$;

Din $\begin{cases} m=b+t(a+c-p) \\ m=c+t(a+b-p) \end{cases} \Rightarrow m=a+b+c-p\Rightarrow M(a+b+c-p)$.

Punctele D,E,F se află pe cercul celor nouă puncte ale ΔABC, cercul lui Euler (mijloacele laturilor , picioarele înălțimilor și mijloacele segmentelor determinate de ortocentru și vârfuri).

Centrul N al cercului celor nouă puncte ale ΔABC este de afix $\frac{a+b+c+d}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow N\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)$.

Arătăm că punctele M,P',N sunt coliniare.

$$\overrightarrow{NM}=M-N=(a+b+c-p)-\frac{a+b+c+d}{4}=\frac{3a+3b+3c-d-4p}{4};$$

$$\overrightarrow{NP'}=P'-N=\frac{d+p}{2}-\frac{a+b+c+d}{4}=\frac{2p+d-a-b-c}{4}.$$

Obținem $\overrightarrow{NM}=-3\overrightarrow{NP'}\Rightarrow$ punctele M,P',N sunt coliniare $\Rightarrow MP'$ trece prin N, centrul cercului lui Euler al ΔABC, deci punct fix.

Concluzie: Dreapta MP' trece prin centrul cercului lui Euler al ΔABC.

Problema1060.

If $a,b,c>0,a+b+c\geq 3$ then

$$\sum\frac{a^3+b+c}{2a+1}\geq 3$$

Panagiotis Danousis, Greece, MathAtelier 2/2026

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{a^3+b+c}{2a+1}\overset{b+c\geq 3-a}{\geq}\sum\frac{a^3+3-a}{2a+1}\overset{SOS}{\geq}\sum\frac{2a+1}{2a+1}=\sum 1=3=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarcă.

1).If $a,b,c>0,a+b+c=3$ and $\lambda\geq 0$ then

$$\sum\frac{a^3+3(b+c)}{2a+\lambda}\geq\frac{21}{\lambda+2}.$$

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{a^3+3(b+c)}{2a+\lambda}\overset{b+c=3-a}{\geq}\sum\frac{a^3+3(3-a)}{2a+\lambda}\overset{SOS}{\geq}\sum\frac{7}{2a+\lambda}\overset{CS}{\geq}\frac{7\cdot 9}{\sum(2a+\lambda)}=$$

$$=\frac{63}{2\sum a+3\lambda}=\frac{63}{2\cdot 3+3\lambda}=\frac{63}{3(\lambda+2)}=\frac{21}{\lambda+2}=RHS.$$

Am folosit mai sus: $a^3+3(3-a)\geq 7\Leftrightarrow(a-1)^2(a+2)\geq 0$, cu egal pentru $a=1$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

2).If $a,b,c>0,a+b+c=3$ then

$$\sum\frac{a^3+3(b+c)}{2a+1}\geq 7$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema1061.

In ΔABC then

$$\sum\frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\sin^3\frac{A}{2}}\geq\frac{3}{\prod\sin\frac{A}{2}}.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam, RMM 2/2026

Soluție.

Lema

In ΔABC then

$$\cos\frac{B-C}{2}=\frac{b+c}{a}\sin\frac{A}{2}.$$

Karl Mollweide

$$LHS=\sum\frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\sin^3\frac{A}{2}}\overset{Lema}{=}\sum\frac{\frac{b+c}{a}\sin\frac{A}{2}}{\sin^3\frac{A}{2}}=\sum\frac{\frac{b+c}{a}}{\sin^2\frac{A}{2}}=\sum\frac{\frac{b+c}{a}}{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}=\sum\frac{bc(b+c)}{a(p-b)(p-c)}=$$

$$=\frac{p^2\left(p^2+2r^2-14Rr\right)+r^2\left(16R^2+2Rr+r^2\right)}{2Rr^3}\overset{Gerretsen}{\geq}$$

$$\overset{Gerretsen}{\geq}\frac{\left(16Rr-5r^2\right)\left(16Rr-5r^2+2r^2-14Rr\right)+r^2\left(16R^2+2Rr+r^2\right)}{2Rr^3}=$$

$$=\frac{\left(16Rr-5r^2\right)\left(16Rr-5r^2+2r^2-14Rr\right)+r^2\left(16R^2+2Rr+r^2\right)}{2Rr^3}=$$

$$\frac{4\left(6R^2-7Rr+2r^2\right)}{Rr}\overset{Euler}{\geq}\frac{12R}{r}\overset{(1)}{\geq}\frac{3}{\prod\sin\frac{A}{2}}=RHS,$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

In ΔABC holds

$$\frac{12R}{r} \le \sum \frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\sin^3\frac{A}{2}} \le \frac{3}{4}\left(\frac{R}{r}\right)^5$$
.

Marin Chirciu

Solution.

Lemma.

In ΔABC holds

$$\sum \frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\sin^3\frac{A}{2}} = \frac{p^2\left(p^2+2r^2-14Rr\right)+r^2\left(16R^2+2Rr+r^2\right)}{2Rr^3}$$
.

Problema1062.

If $a,b,c>0, a+b+c=3$ then

$$\sum \frac{a^3}{a^2+b^2} \ge \frac{3}{2}$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam, RMM 2/2026

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{a^3}{a^2+b^2} = \sum a\left(1-\frac{b^2}{a^2+b^2}\right) \overset{SOS}{\ge} \sum a\left(1-\frac{b^2}{2ab}\right) = \sum a\left(1-\frac{b}{2a}\right) = \sum a - \frac{1}{2}\sum b =$$

$$= \frac{1}{2}\sum a = \frac{1}{2}\cdot 3 = \frac{3}{2} = RHS$$
.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarcă.

If $a,b,c>0, a+b+c=3$ and $n \in \mathbf{N}$ then

$$\sum \frac{a^{3n}}{a^{2n}+b^{2n}} \ge \frac{3}{2}$$

Marin Chirciu

Problema1063.

If $a,b,c>0, a+b+c\le 3$ then

$$\sum \frac{a}{\sqrt{a^2-a+1}} \le 3$$

Panagiotis Danousis, Greece,MathAtelier 2/2026

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{a}{\sqrt{a^2-a+1}} \overset{SOS}{\le} \sum \frac{a}{\sqrt{a}} = \sum \sqrt{a} \overset{CBS}{\le} \sqrt{3\sum a} \overset{\sum a\le 3}{\le} \sqrt{3\cdot 3} = 3 = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarcă.

If $a,b,c>0, a+b+c\le 3$ and $\lambda<2$ then

$$\sum \frac{a}{\sqrt{a^2-\lambda a+1}} \le \frac{3}{\sqrt{2-\lambda}}$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{a}{\sqrt{a^2-\lambda a+1}} \overset{SOS}{\le} \sum \frac{a}{\sqrt{(2-\lambda)a}} = \frac{1}{\sqrt{2-\lambda}} \sum \sqrt{a} \overset{CBS}{\le} \frac{1}{\sqrt{2-\lambda}} \sqrt{3\sum a} \overset{\sum a\le 3}{\le} \frac{1}{\sqrt{2-\lambda}} \sqrt{3\cdot 3} =$$

$$= \frac{3}{\sqrt{2-\lambda}} = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Problema1064.

Solve in positive real numbers

$$\frac{1}{(x+y)\sqrt{z}} + \frac{1}{(y+z)\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{xyz}}.$$

OJ Sălaj-1997

Soluție.

$$\frac{1}{(x+y)\sqrt{z}} + \frac{1}{(y+z)\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{xyz}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{xy}}{x+y} + \frac{\sqrt{yz}}{y+z} = 1.$$

Avem $\frac{\sqrt{xy}}{x+y}+\frac{\sqrt{yz}}{y+z}\overset{AG}{\leq}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$, cu egal pentru $x=y=z$.

Mulțimea soluțiilor ecuației este $S=\{(\lambda,\lambda,\lambda)|\lambda>0\}$.

Remarcă.

Solve in positive real numbers

$$\frac{1}{(x+y)\sqrt{z}}+\frac{1}{(y+z)\sqrt{x}}+\frac{1}{(z+x)\sqrt{y}}=\frac{3}{2\sqrt{xyz}}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$\frac{1}{(x+y)\sqrt{z}}+\frac{1}{(y+z)\sqrt{x}}+\frac{1}{(z+x)\sqrt{y}}=\frac{1}{\sqrt{xyz}}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{xy}}{x+y}+\frac{\sqrt{yz}}{y+z}+\frac{\sqrt{zx}}{z+x}=\frac{3}{2}.$$

Avem $\frac{\sqrt{xy}}{x+y}+\frac{\sqrt{yz}}{y+z}+\frac{\sqrt{zx}}{z+x}\overset{AG}{\leq}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$, cu egal pentru $x=y=z$.

Mulțimea soluțiilor ecuației este $S=\{(\lambda,\lambda,\lambda)|\lambda>0\}$.

Problema1065.

Determinați $a,b,c\in\mathbf{R}$ astfel încât

$$\sqrt{a^2-10a+106}+\sqrt{b^2-12b+136}+\sqrt{c^2-14c+170}=30$$

OL Sălaj-1997

Soluție.

$$\sqrt{a^2-10a+106}+\sqrt{b^2-12b+136}+\sqrt{c^2-14c+170}=$$

$$=\sqrt{(a-5)^2+81}+\sqrt{(b-6)^2+100}+\sqrt{(c-7)^2+121}\geq 9+10+11=30$$, cu egal pentru

$(a,b,c)=(5,6,7)$.

Deducem că $(a,b,c)=(5,6,7)$ este soluția problemei.

Remarcă.

Determinați $a,b,c \in \mathbf{R}$ astfel încât

$$\sqrt{a^2-2\lambda a+2\lambda^2}+\sqrt{b^2-2(\lambda+1)b+2(\lambda+1)^2}+\sqrt{c^2-2(\lambda+2)c+2(\lambda+2)^2}=3(\lambda+1).$$

Marin Chirciu

Deducem că $(a,b,c)=(\lambda,\lambda+1,\lambda+2)$ este soluția problemei.

Problema1066.

Se consideră numărul

$p(m)=48m^2+16m+1$, unde $m \in \mathbf{N}^*$.

a).Dacă numărul $p(m)$ este pătrat perfect, arătați că m este produsul a două a două numere naturale consecutive.

b).Dați un exemplu de pereche (m,a) de numere naturalecu proprietatea că $p(m)=(8a+1)^2$.

Mircea Fianu, București, Concursul"Panaitopol", Tulcea-2013

Soluție.

a). $p(m)=48m^2+16m+1=(4m+1)(12m+1)$, numerele $4m+1, 12m+1$ sunt prime între ele.

Dacă numărul $p(m)$ este pătrat perfect și numerele $4m+1, 12m+1$ sunt prime între ele $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ fiecare dintre numerele $4m+1, 12m+1$ este pătrat perfect.

Cum $4m+1$ este impar și $4m+1$ este pătrat perfect $\Rightarrow \exists k \in \mathbf{N}^*$ astfel încât $4m+1=(2k+1)^2$.

Deducem că $4m+1=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=4k(k+1)+1 \Rightarrow m=k(k+1) \Rightarrow$ că m este produsul a două a două numere naturale consecutive.

b)Pentru $m=30 \Rightarrow p(m)=48m^2+16m+1=48\cdot 30^2+16\cdot 30+1=121\cdot 361=(11\cdot 19)^2=209^2$.

Cum $209=8\cdot 26+1 \Rightarrow a=26 \Rightarrow (m,a)=(30,26)$.

Problema1067.

Determinați $x,y,z \in \mathbf{R}$ astfel încât

$2x^2+1\le y(z+2)$, $2y^2+1\le z(x+2)$, $2z^2+1\le x(y+2)$

OL-1997

Soluție.

Adunând cele trei inegalități obținem:

$$2\sum x^2+3\le\sum xy+2\sum x \Leftrightarrow 2\sum x^2-2\sum x+3-\sum xy\le 0 \Leftrightarrow \sum(x-1)^2+\sum x^2-\sum xy\le 0$$

$\Leftrightarrow \sum(x-1)^2+\frac{1}{2}\sum(x-y)^2\le 0$, cu egal pentru $x=y=z=1$.

Deducem că $(x,y,z)=(1,1,1)$ este soluția problemei.

Remarcă.

Let be $\lambda>0$. Solve for reals

$$\begin{cases}(\lambda+1)x^2+\lambda=y(z+2\lambda)\\(\lambda+1)y^2+\lambda=z(x+2\lambda)\\(\lambda+1)z^2+\lambda=x(y+2\lambda)\end{cases}.$$

Marin Chirciu

Deducem că $(x,y,z)=(1,1,1)$ este soluția sistemului.

Problema1068.

Determinați $a,b>0$ astfel încât

$$\frac{a}{b^2+2a+1}+\frac{b}{a^2+2b+1}\ge\frac{1}{2}.$$

Lucian Petrescu, Tulcea, Concursul”Panaitopol”, Tulcea-2013

Soluție.

Lema.

If $a,b>0$ then

$$\frac{a}{b^2+2a+1}\le\frac{a}{2(a+b)}.$$

Demonstrație.

$\frac{a}{b^2+2a+1} \le \frac{a}{2(a+b)} \Leftrightarrow (b-1)^2 \ge 0$, cu egal pentru $b=1$.

Să trecem la rezolvarea problemei principale.

Folosind **Lema** obținem:

$\frac{a}{b^2+2a+1} + \frac{b}{a^2+2b+1} \le \frac{a}{2(a+b)} + \frac{b}{2(a+b)} = \frac{1}{2}$, cu egal pentru $a=b=1$.

Deducem că $(a,b)=(1,1)$ este soluția problemei.

Remarcă.

If $a,b>0$ then

$$\frac{a}{b^2+2a+1} + \frac{b}{a^2+2b+1} \le \frac{1}{2}.$$

Marin Chirciu

Problema1069.

If $a,b,c>0$, $\sum a + abc = 4$ then

$$\prod\left(1+\frac{a}{b}+ca\right) \ge 27.$$

2014 JBMO

Soluție.

Lema.

If $a,b,c>0$, $\sum a + abc = 4$ then

$abc \le 1$.

Demonstrație.

$4 = \sum a + abc \ge 3\sqrt[3]{abc} + abc \Rightarrow 4 \ge 3\sqrt[3]{abc} + abc \Leftrightarrow 4 \ge 3t + t^3 \Leftrightarrow t^3 + 3t - 4 \le 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (t-1)(t^2+t+4) \le 0 \Leftrightarrow t \le 1 \Leftrightarrow abc \le 1$.

$$LHS=\prod\left(1+\frac{a}{b}+ca\right)=\prod\frac{a+b+abc}{b}=\prod\frac{4-c}{b}=\frac{64-16\sum a+4\sum ab-abc}{abc}\overset{abc=4-\sum a}{=}$$

$$\overset{abc=4-\sum a}{=}\frac{60-15\sum a+4\sum ab}{abc}\overset{\sum a=4-abc}{=}\frac{15abc+4\sum ab}{abc}=15+4\sum\frac{1}{a}\overset{AG}{\geq}15+4\cdot 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}\overset{abc\leq 1}{\geq}$$

$$\overset{abc\leq 1}{\geq}15+4\cdot 3=27=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarcă.

If $a,b,c>0$, $\sum a+\lambda abc=\lambda+3$, $\lambda\geq 0$ then

$$\prod\left(1+\frac{a}{b}+\lambda ac\right)\geq(\lambda+2)^3.$$

Marin Chirciu

Remarcă.

In ΔABC holds:

1)

$$\prod\left(1+\frac{r_b}{r_a}\right)\geq 8.$$

Soluție.

Lema.

If $a,b,c>0$, $\sum a=3$ then

$$\prod\left(1+\frac{a}{b}\right)\geq 8.$$

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum\frac{r}{r_a}=1 \Leftrightarrow \sum\frac{3r}{r_a}=3$

Folosind **Lema** pentru $(x,y,z)=\left(\frac{3r}{r_a},\frac{3r}{r_b},\frac{3r}{r_c}\right)$ obținem: $\prod\left(1+\frac{r_b}{r_a}\right)\geq 8$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

2).

$$\prod\left(1+\frac{h_b}{h_a}\right)\geq 8.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema1070.

In ΔABC

$$\sum(h_b-h_c)(b-c)+4p(R-2r)\geq 0.$$

Soluţie.

Lema.

In ΔABC

$$\sum(h_c-h_b)(b-c)=\frac{p\left(p^2+r^2-14Rr\right)}{R}.$$

Remarcă.

In ΔABC

$$\sum(h_b-h_c)(b-c)+\lambda p(R-2r)\geq 0,\ \lambda\geq 4.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema1071.

If $x,y,z>0$, $\sum x^5=\sum xy$ then

$$\sum x^2y\leq 3.$$

Turkey 2019 Junior National Olympiad

Soluţie.

$$RHS=3=\frac{\sum x^5}{\sum xy}\overset{(1)}{\geq}\sum x^3\overset{(2)}{\geq}\sum x^2y=LHS.$$

Am folosit mai sus:

(1): $\frac{\sum x^5}{\sum xy} \overset{(1)}{\geq} \sum x^3 \Leftrightarrow \sum x^5 \geq \sum x^3 \sum xy$, vezi $\sum x^5 \overset{Chebyshev}{\geq} \frac{1}{3}\sum x^3 \sum x^2 \overset{SOS}{\geq} \sum x^3 \sum xy$.

(2): $\sum x^3 \overset{(2)}{\geq} \sum x^2 y$, vezi $x^3 + x^3 + y^3 \overset{AG}{\geq} 3\sqrt[3]{x^3 \cdot x^3 \cdot y^3} = 3x^2 y$; se scriu și celelalte două inegalități analoage și se adună.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = 1$.

Remarcă.

If $x, y, z > 0$, $\sum x^{2n+3} = \sum xy$, $n \in \mathbf{N}$ then

$$\sum x^{2n} y \leq 3.$$

Marin Chirciu

Problema1072.

If $x, y, z > 0$, $x + y + z = 1$ then

$$\sum \frac{1}{2x^2 + 2x + yz} \geq \frac{1}{xy + yz + zx}.$$

Turkey 2007 TST

Soluție.

Lema.

If $x, y, z > 0$, $x + y + z = 1$ then

$$\frac{1}{2x^2 + 2x + yz} \geq \frac{yz}{(xy + yz + zx)^2}.$$

Demonstrație.

$$\frac{1}{2x^2 + 2x + yz} \geq \frac{yz}{(xy + yz + zx)^2} \Leftrightarrow (xy + yz + zx)^2 \geq yz\left(2x^2 + 2x + yz\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum x^2 y^2 + 2xyz \sum x \geq 2x^2 yz + 2xyz + y^2 z^2 \overset{\sum x = 1}{\Leftrightarrow}$$

$$x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2 + 2xyz \geq 2x^2 yz + 2xyz + y^2 z^2 \Leftrightarrow x^2 y^2 + z^2 x^2 \geq 2x^2 yz \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x^2\left(y^2 - 2yz + z^2\right) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 (y - z)^2 \geq 0$, cu egal pentru $y = z$.

$$LHS=\sum\frac{1}{2x^2+2x+yz}\overset{Lema}{\geq}\sum\frac{yz}{\left(xy+yz+zx\right)^2}=\frac{\sum yz}{\left(\sum yz\right)^2}=\frac{1}{\sum yz}=RHS$$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Remarcă.

In ΔABC holds:

1).

$$\sum\frac{1}{\frac{2r}{r_a^2}+\frac{2}{r_a}+\frac{r}{r_br_c}}\geq\frac{p^2}{4R+r}$$.

Soluție.

Lema.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=1$ then

$$\sum\frac{1}{2x^2+2x+yz}\geq\frac{1}{xy+yz+zx}$$.

Se cunoaște identitatea $\sum\frac{r}{r_a}=1$

Folosind **Lema** pentru $(x,y,z)=\left(\frac{r}{r_a},\frac{r}{r_b},\frac{r}{r_c}\right)$ obținem concluzia.

Remarcă.

In ΔABC holds

$$\sum\frac{1}{\frac{2r}{h_a^2}+\frac{2}{h_a}+\frac{r}{h_bh_c}}\geq\frac{4p^2r}{p^2+r^2+4Rr}$$.

3).

$$\sum\frac{1}{h_bh_c}\geq\sum\frac{1}{r_br_c}$$.

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Folosind $\sum \frac{1}{h_b h_c} = \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4r^2 p^2}$ și $\sum \frac{1}{r_b r_c} = \frac{4R + r}{rp^2}$ obținem concluzia.

Problema1073.

In ΔABC holds

$$\sum \frac{m_b + m_c}{a} \geq \frac{18}{\sqrt{3}} \left(\frac{R}{r} \right)^{-1}.$$

Konstantinos Geronikolas, Greece, MathTime 12/2022

Soluție.

$$\sum \frac{m_b + m_c}{a} = \sum m_a \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq \sum h_a \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = \sum \frac{2S}{a} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = 2S \sum \frac{1}{a} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) =$$

$$= 2S \cdot 2 \sum \frac{1}{bc} = 4S \frac{\sum a}{abc} = 4S \frac{2p}{4RS} = \frac{2p}{R} \overset{Mitrinovic}{\geq} \frac{2 \cdot 3r\sqrt{3}}{R} = \frac{18}{\sqrt{3}} \left(\frac{R}{r} \right)^{-1} = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

In ΔABC holds

$$\sum \left(\frac{m_b + m_c}{a} \right)^n \geq 3^{\frac{n+2}{2}} \left(\frac{2r}{R} \right)^n, n \in \mathbf{N}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Dacă $n = 0$ obținem egalitatea $3 = 3$.

Pentru $n = 1$ vezi Lema.

Pentru $n \geq 2$ se folosește inegalitatea lui Holder.

$$LHS = \sum \left(\frac{m_b + m_c}{a} \right)^n \overset{Holder}{\geq} \frac{\left(\sum \frac{m_b + m_c}{a} \right)^n}{3^{n-1}} = 3 \left(\frac{\sum \frac{m_b + m_c}{a}}{3} \right)^n \overset{Lema}{\geq} 3 \left(\frac{\frac{6r\sqrt{3}}{R}}{3} \right)^n =$$

$$=3\left(\sqrt{3}\right)^n\left(\frac{2r}{R}\right)^n=3^{\frac{n+2}{2}}\left(\frac{2r}{R}\right)^n=RHS$$
.

Lema.

In ΔABC holds

$$\sum\frac{m_b+m_c}{a}\geq\frac{6r\sqrt{3}}{R}$$
.

Problema1074.

In ΔABC holds

$$\sum[I_aBC]\geq 3F$$
.

Sarkhan Adgozalov, Georgia, RMM 2/2026

Soluție.

Lema.

In ΔABC holds

$$[I_aBC]=\frac{ar_a}{2}$$
.

Remarcă.

In ΔABC holds

1).

$$3r\sqrt{3}(2R-r)\leq\sum[I_aBC]\leq\frac{3R\sqrt{3}}{2}(2R-r)$$
.

2).

$$\frac{81R^3r}{8}\leq\sum[I_aBC]^2\leq\left(\frac{9R^3}{8r}\right)^2$$
.

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema1075.

Solve for reals

$$\sqrt[7]{\frac{9x-10}{x-1}}-\sqrt[7]{\frac{7x-8}{x-1}}=2.$$

CS Cheong 2/2025

Soluție.

$$\sqrt[7]{\frac{9x-10}{x-1}}-\sqrt[7]{\frac{7x-8}{x-1}}=2 \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=2 \\ a^7-b^7=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{9}{8}.$$

Deducem că $x=\frac{9}{8}$ este soluția ecuației.

Remarcă.

Let be $n>1, k>0, n-k=2$ fixed.Solve for reals

$$\sqrt[7]{\frac{nx-n-1}{x-1}}-\sqrt[7]{\frac{kx-k-1}{x-1}}=2.$$

Soluție.

Deducem că $x=\frac{n}{n-1}$ este soluția ecuației.

Remarcă.

Let be $\lambda>0$ fixed.Solve for reals

$$\sqrt[7]{\frac{(\lambda+2)x-\lambda-3}{x-1}}-\sqrt[7]{\frac{\lambda x-\lambda-1}{x-1}}=2.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Deducem că $x=\frac{\lambda+2}{\lambda+1}$ este soluția ecuației.

Problema1076.

Solve for reals

$$\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\ldots+\frac{1}{1+2+3+\ldots+x}=\frac{1012}{1013}.$$

Russel Abdullah, Math2/2026

Soluție.

$$\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+...+\frac{1}{1+2+3+...+x}=\frac{1012}{1013}\Leftrightarrow\sum_{n=2}^{x}\frac{2}{n(n+2)}=\frac{1012}{1013}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sum_{n=2}^{x}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1012}{1013}\Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{x+1}\right)=\frac{1012}{1013}\Leftrightarrow\frac{1}{2}-\frac{1}{x+1}=\frac{506}{1013}\Leftrightarrow\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}-\frac{506}{1013}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2\cdot 1013}\Leftrightarrow x+1=2\cdot 1013\Leftrightarrow x+1=2026\Leftrightarrow x=2025.$$

Deducem că $x=2025$ este soluția ecuației.

Remarcă.

Let be $\lambda>0$ .Solve for reals

$$\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+...+\frac{1}{1+2+3+...+x}=\frac{2\lambda}{2\lambda+1}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Deducem că $x=4\lambda+1$ este soluția ecuației.

Problema1077.

Solve for reals

$$\begin{cases}x(x+y+z)=1\\y(x+y+z)=2\\z(x+y+z)=6\end{cases}.$$

Sanong Huayrerai, Math 2/2026

Soluție.

Adunând cele trei ecuații obținem:

$$(x+y+z)^2=9\Leftrightarrow x+y+z=\pm 3.$$

1). $\begin{cases}x(x+y+z)=1\\x+y+z=\pm 3\end{cases}\Rightarrow x=\frac{1}{\pm 3}.$

2). $\begin{cases}y(x+y+z)=2\\x+y+z=\pm 3\end{cases}\Rightarrow y=\frac{2}{\pm 3}.$

3). $\begin{cases} z(x+y+z)=6 \\ x+y+z=\pm 3 \end{cases} \Rightarrow y=\dfrac{6}{\pm 3}$.

Mulțimea soluțiilor sistemului este $S=\left\{\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{6}{3}\right),\left(\frac{-1}{3},\frac{-2}{3},\frac{-6}{3}\right)\right\}$.

Remarcă.

Let be $a,b,c,\lambda>0, a+b+c=\lambda^2$ .Solve for reals

$$\begin{cases} x(x+y+z)=a \\ y(x+y+z)=b \\ z(x+y+z)=c \end{cases}.$$

Mmarin Chirciu

Soluție.

Mulțimea soluțiilor sistemului este $S=\left\{\left(\frac{a}{\lambda},\frac{b}{\lambda},\frac{c}{\lambda}\right),\left(\frac{-a}{\lambda},\frac{-b}{\lambda},\frac{-c}{\lambda}\right)\right\}$.

Problema1078.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=1$ then

$$2+\sum\frac{yz}{x}\le\frac{1}{9xyz}.$$

Kaltrin Surdulli, Pure Inequalities 2/2026

Soluție.

Folosim pqr -Method.

Notăm $p=\sum x=1, q=\sum xy, r=xyz$.

Avem $\sum\dfrac{yz}{x}=\dfrac{\sum y^2z^2}{xyz}=\dfrac{q^2-2pr}{r}\overset{p=1}{=}\dfrac{q^2-2r}{r}$.

Inegalitatea se scrie:

$2+\dfrac{q^2-2r}{r}\le\dfrac{1}{9r}\Leftrightarrow\dfrac{q^2}{r}\le\dfrac{1}{9r}\Leftrightarrow q^2\le\dfrac{1}{9}\Leftrightarrow q\le\dfrac{1}{3}$, vezi $1=(x+y+z)^2\ge 3(xy+yz+zx)=3q$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Remarcă.

If $x, y, z > 0$, $x + y + z = 1$ and $\lambda \geq 2$ then

$$\lambda + \sum \frac{yz}{x} \leq \frac{\lambda + 1}{27xyz}.$$

Remarcă.

In ΔABC holde:

1).

$$2 + \sum \frac{rr_a}{r_b r_c} \leq 3\left(\frac{R}{2r}\right)^2.$$

Soluție.

Lema.

If $x, y, z > 0$, $x + y + z = 1$ then

$$2 + \sum \frac{yz}{x} \leq \frac{1}{9xyz}.$$

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum \frac{r}{r_a} = 1$.

Folosind **Lema** pentru $(x, y, z) = \left(\frac{r}{r_a}, \frac{r}{r_b}, \frac{r}{r_c}\right)$ obținem: $2 + \sum \frac{rr_a}{r_b r_c} \leq 3\left(\frac{R}{2r}\right)^2$.

2).

$$2 + \sum \frac{rh_a}{h_b h_c} \leq 3\left(\frac{R}{2r}\right).$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema1079.

Solve in reals

$4^x+4^{\frac{1}{x}}+4^{x+\frac{1}{x}}\geq 50$.

Concursul ”Laurențiu Duican”, Brașov,5-7 mai 1994

Soluție.

1). Dacă $x<0\Rightarrow 4^x+4^{\frac{1}{x}}+4^{x+\frac{1}{x}}<3\Rightarrow$ inecuația nu are soluție.

2). Dacă $x>0$ este soluție a inecuației $\Rightarrow$ și $\frac{1}{x}$ este soluție a inecuației $\Rightarrow$ este suficient să determinăm soluțiile inecuației pe $[1,\infty)$.

Considerăm funcția $f_1:[1,\infty)\to\mathbf{R}$, $f_1(x)=4^x+4^{\frac{1}{x}}\Rightarrow f_1$ este funcție strict crescătoare pe $[1,\infty)$.

Considerăm funcția $f_2:[1,\infty)\to\mathbf{R}$, $f_2(x)=4^{x+\frac{1}{x}}\Rightarrow f_2$ este funcție strict crescătoare pe $[1,\infty)$.

Rezultă că funcția $f:[1,\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=f_1(x)+f_2(x)=4^x+4^{\frac{1}{x}}+4^{x+\frac{1}{x}}$ este funcție strict crescătoare pe $[1,\infty)$.

Din $f(x)\geq f(2)$ și f funcție strict crescătoare pe $[1,\infty)\Rightarrow x\geq 2$.

Deducem că mulțimea soluțiilor inecuației pe $(0,\infty)$ este $S=\left(0,\frac{1}{2}\right]\cup[2,\infty)$.

Remarcă.

Let be $a>1$ fixed. Solve in reals

$a^{2x}+a^{\frac{2}{x}}+a^{2x+\frac{2}{x}}\geq a+a^4+a^5$.

Marin Chirciu

Soluție.

Deducem că mulțimea soluțiilor inecuației pe $(0,\infty)$ este $S=\left(0,\frac{1}{2}\right]\cup[2,\infty)$.

Problema1080.

Solve in reals

$\log_2\left(1+\sqrt{x}\right)=\log_3 x$.

Concursul ”Laurențiu Duican”, Brașov,5-7 mai 1994

Soluție.

$\log_2\left(1+\sqrt{x}\right)=\log_3 x=t \Rightarrow \begin{cases}1+\sqrt{x}=2^t\\ x=3^t\end{cases} \Rightarrow \left(2^t-1\right)^2=3^t \Leftrightarrow 2^t-1=3^{\frac{t}{2}} \Leftrightarrow 4^{\frac{t}{2}}-1=3^{\frac{t}{2}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4^{\frac{t}{2}}=1+3^{\frac{t}{2}} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{t}{2}}+\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{t}{2}}=1 \Leftrightarrow \frac{t}{2}=1$, vezi $f(t)=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{t}{2}}+\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{t}{2}}$ este funcție strict descrescătoare, ca sumă de două funcții exponențiale cu baze subunitare.

Din $\frac{t}{2}=1 \Leftrightarrow t=2$, $t=\log_3 x \Rightarrow \log_3 x=2 \Leftrightarrow x=9$.

Deducem că $x=9$ este soluția ecuației.

Remarcă.

Let be $a>1$ fixed. Solve in reals

$\log_a\left(1+\sqrt{x}\right)=\log_{a^2-1} x$.

Marin Chirciu

Soluție.

Deducem că $x=\left(a^2-1\right)^2$ este soluția ecuației.

Problema1081.

Solve in naturals

$1!+2!+3!+...+x!=y^2$.

Moscow Math Olympiad

Soluție.

Pentru $x\geq 4 \Rightarrow u\left(1!+2!+3!+...+x!\right)=3 \Rightarrow 1!+2!+3!+...+x!$ nu poate fi pătrat perfect.

Convin $(x,y)\in\left\{(1,1),(3,3)\right\}$.

Mulțimea soluțiilor ecuației este $S=\left\{(1,1),(3,3)\right\}$.

Remarcă.

Determinați $x, y \in \mathbf{N}$ pentru care $\frac{1!+2!+3!+...+x!}{y^2}$ este pătratul unui număr rațional.

Marin Chirciu

Soluție.

Pentru $x \geq 4 \Rightarrow u(1!+2!+3!+...+x!) = 3 \Rightarrow 1!+2!+3!+...+x!$ nu poate fi pătrat perfect.

Convin $(x, y) \in \{(1, y), (3, y) / y \in \mathbf{N}\}$.

Problema1082.

If $a, b, c > 0$ then

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+2}{2(a+b+2)}} + \frac{1}{\sqrt[4]{a^2+b^2+2}} \geq \sqrt{2}.$$

Amir Sofi, Kosovo, Mathematics(College and High School) 2/2026

Soluție.

$$LHS = \sqrt{\frac{a^2+b^2+2}{2(a+b+2)}} + \frac{1}{\sqrt[4]{a^2+b^2+2}} \overset{CBS}{\geq} \sqrt{\frac{a^2+b^2+2}{4\sqrt{a^2+b^2+2}}} + \frac{1}{\sqrt[4]{a^2+b^2+2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2+b^2+2}{\sqrt{a^2+b^2+2}}} + \frac{1}{\sqrt[4]{a^2+b^2+2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{a^2+b^2+2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{a^2+b^2+2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt[4]{a^2+b^2+2} + \frac{1}{\sqrt[4]{a^2+b^2+2}} \overset{AG}{\geq} 2\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt[4]{a^2+b^2+2} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{a^2+b^2+2}}} = 2\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} = RHS.$$

Am folosit mai sus $2(a+b+2) \leq 4\sqrt{a^2+b^2+2}$, vezi $a+b+2 \overset{CBS}{\leq} \sqrt{(1+1+2)(a^2+b^2+2)} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow a+b+2 \leq \sqrt{4(a^2+b^2+2)} \Leftrightarrow a+b+2 \leq 2\sqrt{a^2+b^2+2} \Leftrightarrow 2(a+b+2) \leq 4\sqrt{a^2+b^2+2}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = 1$.

Remarcă.

If $a, b, c > 0$ and $\lambda \geq 0$ then

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+\lambda}{\sqrt{\lambda+2}(a+b+\lambda)}}+\frac{1}{\sqrt[4]{a^2+b^2+\lambda}}\geq\frac{2}{\sqrt[4]{\lambda+2}}.$$

Marin Chirciu

Problema1083.

Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty}n\left(1-\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}-\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}-\ldots-\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right).$$

Ilie Dinulescu, Pitești, Concursul”Dan Barbilian”-2001-Pitești

Soluție.

$$\lim_{n\to\infty}n\left(1-\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}-\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}-\ldots-\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(1-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{n}{\sqrt{n^2+k}}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{n^2+k}\left(n+\sqrt{n^2+k}\right)}.$$

Avem $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{n^2+n}\left(n+\sqrt{n^2+n}\right)}\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{n^2+k}\left(n+\sqrt{n^2+k}\right)}\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{n^2+1}\left(n+\sqrt{n^2+1}\right)}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{\sqrt{n^2+n}\left(n+\sqrt{n^2+n}\right)}\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{n^2+k}\left(n+\sqrt{n^2+k}\right)}\leq\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{\sqrt{n^2+1}\left(n+\sqrt{n^2+1}\right)}.$$

Din teorema cleștelui obținem $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{n^2+k}\left(n+\sqrt{n^2+k}\right)}=\frac{1}{2}$.

Deducem că $\lim_{n\to\infty}n\left(1-\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}-\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}-\ldots-\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=\frac{1}{2}$.

Remarcă.

Să se calculeze

1).

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+1^2}}-\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+2^2}}-\ldots-\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+n^2}}\right).$$

Deducem că $\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+1^2}}-\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+2^2}}-\ldots-\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+n^2}}\right)=\frac{1}{3}$.

2).

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{1}{\sqrt[4]{n^4+1^3}}-\frac{1}{\sqrt[4]{n^4+2^3}}-\ldots-\frac{1}{\sqrt[4]{n^4+n^3}}\right).$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Deducem că $\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{1}{\sqrt[4]{n^4+1^3}}-\frac{1}{\sqrt[4]{n^4+2^3}}-\ldots-\frac{1}{\sqrt[4]{n^4+n^3}}\right)=\frac{1}{4}$.

Problema1084.

Let be $a,b>1$ fixed. Solve in reals

$$\begin{cases} a^x+\log_b y=a \\ a^y+\log_b z=a \\ a^z+\log_b x=a \end{cases}.$$

Marin Chirciu, Concursul”Dan Barbilian”-2001-Pitești

Soluție.

Fie $x,y,z>0$, (x,y,z) o soluție a sistemului $\Rightarrow x=y=z$.

Rezolvăm ecuația $a^x+\log_b x=a$, cu $x=1$ soluție unică,(vezi $f(x)=a^x+\log_b x-a$, $x>0$ este funcție strict crescătoare).

Deducem că sistemul admite $(x,y,z)=(1,1,1)$ este soluție unică.

Remarcă.

Let be $a,b>1$ and $\lambda\ge 0$ fixed. Solve in reals

$$\begin{cases} a^x + \lambda \log_b y = a \\ a^y + \lambda \log_b z = a \\ a^z + \lambda \log_b x = a \end{cases}.$$

Marin Chirciu

Deducem că sistemul admite $(x, y, z) = (1,1,1)$ este soluție unică.

Problema1085.

Solve in naturals

$$\left(x+\frac{1}{4}\right)+\left(x+\frac{9}{4}\right)+\left(x+\frac{17}{4}\right)+\ldots+\left(x+\frac{121}{4}\right)=340.$$

Manual Burtea, Math 2/2026

Soluție.

Este suma unei progresii aritmetice cu rația $r = 2$.

$$\left(x+\frac{1}{4}\right)+\left(x+\frac{9}{4}\right)+\left(x+\frac{17}{4}\right)+\ldots+\left(x+\frac{121}{4}\right)=340 \Leftrightarrow \frac{\left(x+\frac{1}{4}+x+\frac{121}{4}\right)n}{2}=340 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(4x+61)n}{4}=340.$$

$$\left(x+\frac{121}{4}\right)=\left(x+\frac{1}{4}\right)+(n-1)2 \Leftrightarrow n=16, \quad \frac{(4x+61)n}{4}=340 \Leftrightarrow x=6 \Rightarrow (n,x)=(16,6).$$

Soluția ecuației este $x = 6$.

Remarcă.

Fie $n \in \mathbf{N}^*$ fixat. Solve in naturals

$$\left(x+\frac{1}{4}\right)+\left(x+\frac{9}{4}\right)+\left(x+\frac{17}{4}\right)+\ldots+\left(x+\frac{121}{4}\right)=\frac{85n}{4}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Soluția ecuației este $x = 6$.

Problema1086.

If $x, y, z > 0$ then

$$\frac{\sum x^4}{\sum xy} + \frac{3xyz}{\sum x} \geq \frac{2}{3}\sum x^2.$$

Sursă:Marin Ionescu Mathematical Inequalities 2/2026

Soluție.

Notăm $p = \sum x, q = \sum xy, r = xyz$.

Avem $\sum x^4 = p^4 - 4p^2q + 4q^2 - 2pr$ și $\sum x^2 = p^2 - 2q$.

Inegalitatea se scrie:

$$\frac{p^4 - 4p^2q + 4q^2 - 2pr}{q} + \frac{3xyz}{p} \geq \frac{2}{3}\left(p^2 - 2q\right)$$

Datorită omogenității putem lua $p = 1$.

$\frac{1 - 4q + 4q^2 - 2r}{q} + 3r \geq \frac{2}{3}(1 - 2q) \Leftrightarrow 16q^2 - 14q + 9qr - 6r + 3 \geq 0$, care rezultă din :

1). $9r \geq 4q - 1$, vezi inegalitatea lui Schur $p^3 - 4pq + 9r \geq 0$, $p = 1 \Leftrightarrow 1 - 4q + 9r \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9r \geq 4q - 1$.

2). $r \leq \frac{1}{27}$, vezi $1 = p = x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3\sqrt[3]{r} \Rightarrow 1 \geq 3\sqrt[3]{r} \Leftrightarrow r \leq \frac{1}{27}$.

$16q^2 - 14q + q(4q - 1) - 6 \cdot \frac{1}{27} + 3 \geq 0 \Leftrightarrow 36q^2 - 27q + 5 \geq 0 \Leftrightarrow (3q - 1)(12q - 5) \geq 0$,

care rezultă din $q \leq \frac{1}{3} < \frac{5}{12}$.

3). $q \leq \frac{1}{3}$, vezi $1 = p^2 = (x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx) = 3q \Rightarrow 1 \geq 3q \Leftrightarrow q \leq \frac{1}{3}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z$.

Remarcă.

If $x, y, z > 0$ and $0 \leq \lambda \leq \frac{11}{2}$ then

$$\frac{\sum x^4}{\sum xy}+\lambda\frac{xyz}{\sum x}\ge\frac{\lambda+3}{9}\sum x^2.$$

Marin Chrciu

Problema1087.

In ΔABC holds

$$\sum\frac{m_a^2}{3\sqrt{3}F}\le\frac{1}{9}+\frac{8}{9}\left(\frac{R}{2r}\right)^4.$$

Adil Abdullayev, Azerbaijan, RMM 2/2020

Soluție.

Lemă.

In ΔABC holds

$$\sum m_a^2=\frac{3}{2}\left(p^2-r^2-4Rr\right).$$

Folosind **Lema** și $F=pr\overset{Mitrinovic}{\ge}r\cdot 3r\sqrt{3}=3r^2\sqrt{3}$ obținem concluzia.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema1088.

If $x,y,z>-1$, $\sum\frac{x^2+2}{x^3+1}=2$ then

$$\sum\frac{1}{x^2+2}\le 1.$$

Nguyen Viet Hung, Vietnam, Mathematical Inequalities 2/2026

Soluție.

Lemă.

If $x>-1$ then

$$x^3+1\le\frac{\left(x^2+2\right)^2}{4}.$$

Demonstrație.

$$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)\overset{AG}{\leq}\frac{(x+1)+(x^2-x+1)}{2}=\frac{x^2+2}{2}\overset{SOS}{\leq}\frac{(x^2+2)^2}{4}$$, cu egal pentru $x=0$.

$$2=\sum\frac{x^2+2}{x^3+1}\geq\sum\frac{x^2+2}{\frac{(x^2+2)^2}{4}}=\sum\frac{4}{x^2+2}\Rightarrow\sum\frac{1}{x^2+2}\leq\frac{1}{2}.$$

Inegalitatea este strictă.

Remarcă.

If $x,y,z>-1$, $\sum\frac{x^2+2}{x^3+1}=6$ then

$$\sum\frac{1}{x^2+2}\leq\frac{3}{2}.$$

Marin Chirciu

Problema1089.

If $a,b,c>0$, $a+b+c=1$ then

$$\sum\frac{a^2}{a^2+a(b+c)+bc}\geq\frac{3}{4}.$$

Costel Fodor, Mathematical Inequalities 2/2026

Soluție.

$$\sum\frac{a^2}{a^2+a(b+c)+bc}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum\left(a^2+a(b+c)+bc\right)}=\frac{1}{\sum a^2+3\sum ab}=\frac{1}{\left(\sum a^2+2\sum ab\right)+\sum ab}=$$
$$=\frac{1}{\left(\sum a\right)^2+\sum ab}=\frac{1}{1^2+\sum ab}\overset{SOS}{\geq}\frac{1}{1+\frac{1}{3}\left(\sum a\right)^2}=\frac{1}{1+\frac{1}{3}\cdot 1^2}=\frac{3}{4}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Remarcă.

If $a,b,c>0$, $a+b+c=1$ and $n\in\mathbf{N},n\geq 2$ then

$$\sum \frac{a^n}{a^2+a(b+c)+bc} \geq \frac{3^{3-n}}{4}.$$

Marin Chirciu

Problema1090.

If $a,b,c>0$ then

$$\sum \frac{a^3}{a^2+ab+b^2} \geq \frac{a+b+c}{3}.$$

Tournament Of the Towns 1998

Soluție.

Lema.

If $a,b,c>0$ then

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} \geq \frac{2a-b}{3}.$$

$$LHS = \sum \frac{a^3}{a^2+ab+b^2} \overset{Lema}{\geq} \sum \frac{2a-b}{3} = \frac{1}{3}\sum a = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

Remarcă.

If $a,b,c>0$ and $\lambda \geq 0$ then:

1).

$$\sum \frac{a^3}{a^2+\lambda ab+b^2} \geq \frac{a+b+c}{\lambda+1}.$$

2).

$$\sum \frac{a^3+b^3}{a^2+\lambda ab+b^2} \geq \frac{2(a+b+c)}{\lambda+1}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema1091.

In ΔABC holds

$$4\sum\frac{r_b r_c}{w_a^2}=3+\sum a\sum\frac{1}{a}.$$

Bogdan Fuștei, RMM 12/2019

Soluție.

Folosind $\sum\frac{r_b r_c}{w_a^2}=\frac{p^2+r^2+10Rr}{8Rr}$ și $\sum\frac{1}{a}=\frac{p^2+r^2+4Rr}{4Rrp}$ obținem concluzia.

Remarcă.

In ΔABC holds

$$\sum\frac{h_b h_c}{w_a^2}\geq\sum\frac{r_b r_c}{w_a^2}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosind $\sum\frac{h_b h_c}{w_a^2}=\frac{p^2-3r^2}{4Rr}$ și $\sum\frac{r_b r_c}{w_a^2}=\frac{p^2+r^2+10Rr}{8Rr}$ rezultă concluzia.

Problema1092.

J.3096. If $x,y,z>0$ then in ΔABC holds

$$\sum\frac{a^4x^2}{(y+z)^2}\geq 4F^2.$$

D. M. Bătinețu-Giurgiu, RMM-47/2025

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{a^4x^2}{(y+z)^2}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum\frac{x}{y+z}a^2\right)^2}{3}\overset{T\sin tsifas}{\geq}\frac{\left(2\sqrt{3}F\right)^2}{3}=\frac{12F^2}{3}=4F^2=RHS.$$

Am folosit mai sus inegalitatea lui Tsintsifas $\sum\frac{x}{y+z}a^2\geq 2F\sqrt{3}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

If $x, y, z > 0$ and $n \in \mathbf{N}$ then in ΔABC holds

$$\sum \frac{a^{2n} x^n}{(y+z)^n} \geq 3\left(\frac{2\sqrt{3}F}{3}\right)^n.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Pentru $n = 0$ se obține egalitatea $3 = 3$.

Pentru $n = 1$ avem $\sum \frac{a^2 x}{y+z} \geq 2\sqrt{3}F$, vezi inegalitatea lui Tsintsifas.

Pentru $n \geq 2$ se folosește inegalitatea lui Holder.

$$LHS = \sum \frac{a^{2n} x^n}{(y+z)^n} \overset{Holder}{\geq} \frac{\left(\sum \frac{x}{y+z} a^2\right)^n}{3^{n-1}} \overset{T\sin tsifas}{\geq} \frac{\left(2\sqrt{3}F\right)^n}{3^{n-1}} = 3\left(\frac{2\sqrt{3}F}{3}\right)^n = RHS$$

Am folosit mai sus inegalitatea lui Tsintsifas $\sum \frac{x}{y+z} a^2 \geq 2F\sqrt{3}$, unde $x, y, z > 0$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema1093.

J.3095. In ΔABC holds

$$\sum \frac{a^3}{bx+cy} \geq \frac{4\sqrt{3}}{x+y} F.$$

D. M. Bătinețu-Giurgiu, Claudia Nănuți, RMM 47/2025

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{a^{23}}{xb+yc} \overset{Holder}{\geq} \frac{\left(\sum a\right)^3}{3\sum (xb+yc)} = \frac{\left(\sum a\right)^3}{3\cdot(x+y)\sum a} = \frac{\left(\sum a\right)^2}{3\cdot(x+y)} =$$

$$= \frac{(2p)^2}{3\cdot(x+y)} = \frac{4p^2}{3\ \cdot(x+y)} \overset{Hadwiger}{\geq} \frac{4\cdot 3F\sqrt{3}}{3(x+y)} = \frac{4F}{x+y} = RHS.$$

Am folosit mai sus inegalitatea lui Hadwiger $p^2 \geq 3F\sqrt{3}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

If $x, y > 0$ then in ΔABC holds

$$\sum \frac{a^{2n+1}}{xb+yc} \geq \frac{3}{x+y}\left(\frac{2}{3}\right)^{2n}\left(3F\sqrt{3}\right)^n, n \in \mathbf{N}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{a^{2n+1}}{xb+yc} \overset{Holder}{\geq} \frac{\left(\sum a\right)^{2n+1}}{3^{2n-1}\sum(xb+yc)} = \frac{\left(\sum a\right)^{2n+1}}{3^{2n-1}\cdot(x+y)\sum a} = \frac{\left(\sum a\right)^{2n}}{3^{2n-1}\cdot(x+y)} =$$

$$= \frac{(2p)^{2n}}{3^{2n-1}\cdot(x+y)} = \frac{2^{2n}\left(p^2\right)^n}{3^{2n-1}\cdot(x+y)} \overset{Hadwiger}{\geq} \frac{2^{2n}\left(3F\sqrt{3}\right)^n}{3^{2n-1}(x+y)} = \frac{3}{x+y}\left(\frac{2}{3}\right)^{2n}\left(3F\sqrt{3}\right)^n = RHS$$

Am folosit mai sus inegalitatea lui Hadwiger $p^2 \geq 3F\sqrt{3}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema1094.

J.3094. In ΔABC holds

$$\sum \frac{a^3}{b+c} \geq 2\sqrt{3}F.$$

D. M. Bătinețu-Giurgiu, Claudia Nănuți, RMM 47/2025

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{a^3}{b+c} \overset{Holder}{\geq} \frac{\left(\sum a\right)^3}{3\sum(b+c)} = \frac{\left(\sum a\right)^3}{3\cdot 2\sum a} = \frac{1}{6}\left(\sum a\right)^2 = \frac{(2p)^2}{6} = \frac{4p^2}{6} =$$

$$= \frac{2p^2}{3} \overset{Hadwiger}{\geq} \frac{2\cdot 3F\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}F = RHS$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

In ΔABC holds

$$\sum\frac{a^{2n+1}}{b+c}\geq\left(\frac{2}{3}\right)^{2n-1}\left(3F\sqrt{3}\right)^{n},\ n\in\mathbf{N}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{a^{2n+1}}{b+c}\overset{Holder}{\geq}\frac{\left(\sum a\right)^{2n+1}}{3^{2n-1}\sum(b+c)}=\frac{\left(\sum a\right)^{2n+1}}{3^{2n-1}\cdot 2\sum a}=\frac{\left(\sum a\right)^{2n}}{3^{2n-1}\cdot 2}=\frac{(2p)^{2n}}{3^{2n-1}\cdot 2}=\frac{2^{2n}\left(p^{2}\right)^{n}}{3^{2n-1}\cdot 2}=$$

$$=\frac{2^{2n-1}\left(p^{2}\right)^{n}}{3^{2n-1}}\overset{Hadwiger}{\geq}\frac{2^{2n-1}\left(3F\sqrt{3}\right)^{n}}{3^{2n-1}}=\left(\frac{2}{3}\right)^{2n-1}\left(3F\sqrt{3}\right)^{n}=RHS$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema1095

J.3093. If $M\in Int\left(\Delta ABC\right)$, d_a,d_b,d_c -distances of the point M to the sides BC,CA,AB then

$$\sum\frac{ab^{2}}{d_a}\geq 24F.$$

D. M. Bătinețu-Giurgiu, Mihaly Bencze, RMM 47/2025

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{ab^{2}}{d_a}=\sum\frac{a^{2}b^{2}}{ad_a}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum ab\right)^{2}}{\sum ad_a}=\frac{\left(\sum ab\right)^{2}}{2F}\overset{Gordon}{\geq}\frac{\left(4F\sqrt{3}\right)^{2}}{2F}=\frac{48F^{2}}{2F}=24F=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

If $M\in Int\left(\Delta ABC\right)$, d_a,d_b,d_c -distances of the point M to the sides BC,CA,AB then

$$\sum\frac{a^{2n-1}b^{2n}}{d_a}\geq 2^{4n-1}3^{n}F^{2n-1},\ n\in\mathbf{N}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{a^{2n-1}b^{2n}}{d_a}=\sum\frac{a^{2n}b^{2n}}{ad_a}\overset{Holder}{\geq}\frac{\left(\sum ab\right)^{2n}}{\sum ad_a}=\frac{\left(\sum ab\right)^{2n}}{2F}\overset{Gordon}{\geq}\frac{\left(4F\sqrt{3}\right)^{2n}}{2F}=\frac{\left(48F^2\right)^n}{2F}=$$

$$=2^{4n-1}3^nF^{2n-1}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema1096.

J.3088. In ΔABC holds

$$R^4\geq\frac{1}{81}\left(\sum a^2\right)^2.$$

Daniel Sitaru, RMM 47/2025

Soluție.

Folosind $\sum a^2=2\left(p^2-r^2-4Rr\right)$ inegalitatea se scrie:

$R^4\geq\frac{1}{81}\left(2\left(p^2-r^2-4Rr\right)\right)^2 \Leftrightarrow 81R^4\geq4\left(p^2-r^2-4Rr\right)^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen: $p^2\leq4R^2+4Rr+3r^2$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

In ΔABC holds

$$R^{2n}\geq\frac{1}{9^n}\left(\sum a^2\right)^n, n\in\mathbf{N}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Pentru $n=0$ se obține egalitatea $1=1$.

În continuare, fie $n\in\mathbf{N}^*$.

$R^{2n}\geq\frac{1}{9^n}\left(\sum a^2\right)^n \Leftrightarrow 9R^2\geq2\left(p^2-r^2-4Rr\right)$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen: $p^2\leq4R^2+4Rr+3r^2$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema1097.

J.3082. In ΔABC holds

$$\sum IA^4 \leq \frac{1}{27}\left(\sum a^2\right)^2.$$

Daniel Sitaru, RMM 47/2025

Soluție.

Lema.

In ΔABC holds

$$\sum IA^4 = p^2\left(p^2+2r^2-16Rr\right)+r^2\left(32R^2+r^2\right).$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

In ΔABC holds

$$12R^2r^2 \leq \sum IA^4 \leq 20R^4-272r^4.$$

Marin Chirciu

Problema1098.

In ΔABC holds

$$2p\sum a^3 \geq 48F^2.$$

D.M.Bătinețu-Giurgiu, Neculai Stanciu, RMM 2/2026

Soluție.

$$LHS = 2p\sum a^3 = 2p\cdot 2p\left(p^2-3r^2-6Rr\right) = 4p^2\left(p^2-3r^2-6Rr\right) \overset{Gerretsen}{\geq}$$

$$\overset{Gerretsen}{\geq} 4p^2\left(16Rr-5r^2-3r^2-6Rr\right) = 4p^2\left(10Rr-8r^2\right) \overset{Euler}{\geq} 4p^2\left(10\cdot 2r\cdot r-8r^2\right) =$$

$$4p^2\cdot 12r^2 = 48p^2r^2 = 48F^2.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

In ΔABC holds

$$48p^2r^2 \le \sum a \sum a^3 \le \frac{6p^2R^3}{r}.$$

Marin Chirciu

Problema1099.

Solve in reals

$$\sqrt{2x^2+12x+67}+\sqrt{y^2-6y+18}=10.$$

Constantinescu Dragoș Jr, Râmnicu Vâlcea, OL-2014-Vâlcea

Soluție.

$$\sqrt{2x^2+12x+67}+\sqrt{y^2-6y+18}=\sqrt{2\left(x^2+6x+9\right)+49}+\sqrt{\left(y^2-6y+9\right)+9}=$$

$$=\sqrt{2(x+3)^2+49}+\sqrt{(y-3)^2+9}\ge\sqrt{2\cdot 0+49}+\sqrt{0+9}=7+3=10.$$

Deducem că $(x,y)=(-3,3)$ este soluția ecuației.

Remarcă.

Let be $\lambda, n \ge 0$ fixed. Solve in reals

$$\sqrt{2x^2+12x+\lambda^2+9}+\sqrt{y^2-6y+n^2+9}=\lambda+n.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Deducem că $(x,y)=(-3,3)$ este soluția ecuației.

Problema1100.

Solve in reals

$$\sqrt{|x-1|}+\sqrt{|x-2015|}=\sqrt{2014}.$$

GM-12/2013,Neculai Stanciu,Buzău și Iuliana Trașcă, Olt , E:14587

Soluție.

Cazul1). $x<1 \Rightarrow x-2015<1-2015=-2014 \Rightarrow |x-2015|>2014 \Rightarrow \sqrt{|x-2015|}>\sqrt{2014}$

$\Rightarrow$ecuația nu are soluții.

Cazul2). $1\le x\le 2015 \Rightarrow x-1\ge 0 \Rightarrow |x-1|=x-1$ și $x\le 2015 \Rightarrow |x-2015|=2015-x$.

Ecuația se scrie: $\sqrt{x-1}+\sqrt{2015-x}=\sqrt{2014} \Leftrightarrow x-1+2\sqrt{x-1}\sqrt{2015-x}+2015-x=2014$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x-1}\sqrt{2015-x}=0 \Leftrightarrow x\in\{1,2015\}$.

Cazul3). $x>2015 \Rightarrow x-1>2014 \Rightarrow |x-1|>2014 \Rightarrow \sqrt{|x-1|}>\sqrt{2014} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ecuația nu are soluții.

Mulțimea soluțiilor ecuației este $S=\{1,2015\}$.

Remarcă.

Let be $\lambda\ge 1$ fixed. Solve in reals

$$\sqrt{|x-1|}+\sqrt{|x-\lambda-1|}=\sqrt{\lambda}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Mulțimea soluțiilor ecuației este $S=\{1,\lambda+1\}$.

Problema1101.

If ΔABC holds

$$\sum \csc\frac{A}{2}\left(1+\tan\frac{A}{2}\right)\ge 6+2\sqrt{3}.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam, RMM2/2026

Soluție.

$$LHS=\sum \csc\frac{A}{2}\left(1+\tan\frac{A}{2}\right)=\sum\left(\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}\right)=\sum\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{A}{2}}\overset{(1)}{\ge}$$

$$\overset{(1)}{\ge} 6+2\sqrt{3}=LHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

If ΔABC holds

$$\sum \csc\frac{A}{2}\left(1+\lambda\tan\frac{A}{2}\right) \geq 2\left(3+\lambda\sqrt{3}\right)$$
,unde $\lambda \geq 0$.

Marin Chirciu

Problema1102.

If $a,b,c>0$ then

$$\sum\frac{a}{\sqrt{a+2b}} \geq \sqrt{a+b+c}.$$

Hoa Van Nguyen, Vietnam, Mathematical Inequalities

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{a}{\sqrt{a+2b}}=\sum\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a^2+2ab}}=\sum\frac{a^{\frac{3}{2}}}{\left(a^2+2ab\right)^{\frac{1}{2}}}\overset{Radon}{\geq}\frac{\left(\sum a\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\sum\left(a^2+2ab\right)\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{\left(\sum a\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\sum a^2+2\sum ab\right)^{\frac{1}{2}}}=$$

$$=\frac{\left(\sum a\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\left(\sum a\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{\left(\sum a\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\sum a\right)}=\left(\sum a\right)^{\frac{1}{2}}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

Remarcă.

If $a,b,c>0$ and $n\in\mathbf{N}$ then

$$\sum\left(\frac{a}{\sqrt{a+2b}}\right)^n \geq 3\left(\frac{\sqrt{a+b+c}}{3}\right)^n.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Pentru $n=0$ se obține egalitatea 3=3.

Pentru $n=1$ vezi Lema.

Pentru $n \geq 2$ se folosește inegalitatea lui Holder.

$$LHS = \sum\left(\frac{a}{\sqrt{a+2b}}\right)^n \overset{Holder}{\geq} \frac{\left(\sum \frac{a}{\sqrt{a+2b}}\right)^n}{3^{n-1}} \overset{Lema}{\geq} \frac{\left(\sqrt{a+b+c}\right)^n}{3^{n-1}} = 3\left(\frac{\sqrt{a+b+c}}{3}\right)^n.$$

Problema1103.

If $x, y, z > 0$, $xy + yz + zx + xyz = 4$ then

$$\sum \frac{x}{y+z} \geq \frac{x+y+z}{2}.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam, Mathematical Inequalities 2/2026

Soluție.

$$xy + yz + zx + xyz = 4 \Leftrightarrow \sum \frac{1}{x+2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$1 = \sum \frac{1}{x+2} = \frac{1}{2}\sum\left(1 - \frac{x}{x+2}\right) = \frac{1}{2}\left(3 - \sum \frac{x}{x+2}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sum \frac{x}{x+2} \Leftrightarrow \sum \frac{x}{x+2} = 1.$$

$$1 = \sum \frac{x}{x+2} = \sum \frac{x^2}{x^2+2x} \overset{CS}{\geq} \frac{\left(\sum x\right)^2}{\sum\left(x^2+2x\right)} = \frac{\sum x^2 + 2\sum xy}{\sum x^2 + 2\sum x} \Rightarrow 1 \geq \frac{\sum x^2 + 2\sum xy}{\sum x^2 + 2\sum x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum x^2 + 2\sum x \geq \sum x^2 + 2\sum xy \Leftrightarrow \sum x \geq \sum xy, (*).$$

$$LHS = \sum \frac{x}{y+z} = \sum \frac{x^2}{xy+xz} \overset{CS}{\geq} \frac{\left(\sum x\right)^2}{\sum\left(xy+xz\right)} = \frac{\left(\sum x\right)^2}{2\sum xy} \overset{(1)}{\geq} \frac{\sum x}{2} = RHS,$$

unde $\frac{\left(\sum x\right)^2}{2\sum xy} \overset{(1)}{\geq} \frac{\sum x}{2} \Leftrightarrow \sum x \geq \sum xy$, vezi(*).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = 1$.

Remarcă.

If $x, y, z > 0$, $xy + yz + zx + xyz = 4$ then

$$\sum x \geq \sum xy.$$

Marin Chirciu

Problema 1104.

Fie șirul de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_1=1$ și $a_{n+1}=\frac{a_n}{1+na_n}$, $n\geq 1$. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_2}+\frac{3}{a_3}+\ldots+\frac{n}{a_n}\right).$$

D.M.Bătinețu-Giurgiu, Neculai Stanciu,GM-5/2013,26769

Soluție.

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{1+na_n}\Leftrightarrow \frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=n\Rightarrow \sum\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right)=\sum n\Leftrightarrow \frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_1}=\frac{n(n+1)}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{1}=\frac{n(n+1)}{2}\Leftrightarrow a_{n+1}=\frac{2}{n^2+2n+2}\Rightarrow a_n=\frac{2}{n^2-n+2}.$$

Obținem: $\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_2}+\frac{3}{a_3}+\ldots+\frac{n}{a_n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{a_k}=\sum_{k=1}^{n}k\cdot\frac{k^2-k+2}{2}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(k^3-k^2+2k\right)=$

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}k^3-\sum_{k=1}^{n}k^2+2\sum_{k=1}^{n}k\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{n^2(n+1)^2}{4}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+2\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right)=$$

$$=\frac{n(n+1)\left(3n^2-n+10\right)}{24}.$$

Rezultă $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_2}+\frac{3}{a_3}+\ldots+\frac{n}{a_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\cdot\frac{n(n+1)\left(3n^2-n+10\right)}{24}=\frac{3}{24}=\frac{1}{8}$.

Deducem că $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_2}+\frac{3}{a_3}+\ldots+\frac{n}{a_n}\right)=\frac{1}{8}$.

Remarcă.

Fie șirul de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_1=1$ și $a_{n+1}=\frac{a_n}{1+na_n}$, $n\geq 1$. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n^2a_n}\right)^n.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{1+na_n} \Leftrightarrow \frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=n \Rightarrow \sum\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right)=\sum n \Leftrightarrow \frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_1}=\frac{n(n+1)}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{1}=\frac{n(n+1)}{2} \Leftrightarrow a_{n+1}=\frac{2}{n^2+2n+2} \Rightarrow a_n=\frac{2}{n^2-n+2} \Rightarrow \frac{1}{a_n}=\frac{n^2-n+2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{n^2a_n}=\frac{n^2-n+2}{n^2}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n^2a_n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-n+2}{n^2}\right)^n \overset{(1^\infty)}{=} \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-n+2}{n^2}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{-n+2}{n^2}\right)^{\frac{n}{-n+2}}\right)^{\frac{-n+2}{n}\cdot n}=$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-n+2}{n}\cdot n}=e^{-1}=\frac{1}{e}.$$

Deducem că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n^2a_n}\right)^n=\frac{1}{e}$.

Problema 1105.

If $a<2$ and $b>2$ then

$$\frac{a^2+5}{a-2}-\frac{b^2+5}{b-2}\le -12.$$

Aurel Doboșan, Lugoj, GM-11/2013, E:14574

Soluție.

Notăm $(x,y)=(a-2,b-2)$, $x<0, y>0$.

$$\frac{(x+2)^2+5}{x}-\frac{(y+2)^2+5}{y}\le -12 \Leftrightarrow x^2y-xy^2+9y-9x+12xy\le 0 \Leftrightarrow$$

$y(x+3)^2-x(y-3)^2\ge 0$, vezi $x<0, y>0$, cu egal pentru $(x,y)=(-3,3) \Leftrightarrow (a,b)=(-1,5)$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $(a,b)=(-1,5)$.

Remarcă.

If $a<\lambda$ and $b>\lambda$ then

$$\frac{a^2+2\lambda+1}{a-\lambda}-\frac{b^2+2\lambda+1}{b-\lambda}\le -2(\lambda+1).$$

Marin Chirciu

Soluție.

Notăm $(x,y)=(a-\lambda,b-\lambda)$, $x<0,y>0$.

$$\frac{(x+\lambda)^2+2\lambda+1}{x}-\frac{(y+\lambda)^2+2\lambda+1}{y}\le -2(\lambda+1)\Leftrightarrow$$

$x^2y-xy^2+(\lambda+1)^2y-(\lambda+1)^2x+2(\lambda+1)xy\le 0 \Leftrightarrow y(x+\lambda+1)^2-x(y-\lambda-1)^2\ge 0$, vezi $x<0,y>0$, cu egal pentru $(x,y)=(-\lambda-1,\lambda+1)\Leftrightarrow(a,b)=(-1,2\lambda+1)$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $(a,b)=(-1,2\lambda+1)$.

Problema1106.

If $a,b,c,d>0$, $a+b+c+d=1$ then

$$\sum\frac{a^5+b^5}{a^3+b^3}\ge\frac{1}{4}.$$

Dorinel Anca, Mathematical Inequalities 2/2026

Soluție.

Lemă.

If $a,b>0$ then

$$\frac{a^5+b^5}{a^3+b^3}\ge\frac{a^2+b^2}{2}.$$

$$LHS=\sum\frac{a^5+b^5}{a^3+b^3}\overset{Lema}{\ge}\sum\frac{a^2+b^2}{2}=\sum a^2\overset{CS}{\ge}\frac{\left(\sum a\right)^2}{4}=\frac{1^2}{4}=\frac{1}{4}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=d=\frac{1}{4}$.

Remarcă.

If $a,b,c,d>0$, $a+b+c+d=1$ and $n\in\mathbf{N}$ then

$$\sum \frac{a^{n+2}+b^{n+2}}{a^n+b^n} \geq \frac{1}{4}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lemă.

If $a,b>0$ then

$$\frac{a^{n+2}+b^{n+2}}{a^n+b^n} \geq \frac{a^2+b^2}{2}.$$

$$LHS = \sum \frac{a^{n+2}+b^{n+2}}{a^n+b^n} \overset{Lema}{\geq} \sum \frac{a^2+b^2}{2} = \sum a^2 \overset{CS}{\geq} \frac{\left(\sum a\right)^2}{4} = \frac{1^2}{4} = \frac{1}{4} = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=d=\frac{1}{4}$.

Remarcă.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=1$ then

$$\sum \frac{x^5+y^5}{x^3+y^3} \geq \frac{1}{3}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lemă.

If $a,b>0$ then

$$\frac{x^5+y^5}{x^3+y^3} \geq \frac{x^2+y^2}{2}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Remarcă.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=1$ and $n \in \mathbf{N}$ then

1).

$$\sum \frac{x^{n+2}+y^{n+2}}{x^n+y^1} \ge \frac{1}{3}.$$

2).

$$\frac{x^{n+2}+y^{n+2}}{x^n+y^n} \ge \frac{x^2+y^2}{2}.$$

Remarcă.

In ΔABC

1).

$$\sum \frac{r_a^5+r_b^5}{r_a^2 r_b^2\left(r_a^3+r_b^3\right)} \ge \frac{1}{3r^2}.$$

Soluție.

Lemă.

If $a,b>0$ then

$$\sum \frac{x^5+y^5}{x^3+y^3} \ge \frac{1}{3}.$$

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum \frac{r}{r_a}=1$.

Folosind **Lema** pentru $(x,y,z)=\left(\frac{r}{r_a},\frac{r}{r_b},\frac{r}{r_c}\right)$ obținem: $\sum \frac{r_a^5+r_b^5}{r_a^2 r_b^2\left(r_a^3+r_b^3\right)} \ge \frac{1}{3r^2}$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

2).

$$\sum \frac{h_a^5+h_b^5}{h_a^2 h_b^2\left(h_a^3+h_b^3\right)} \ge \frac{1}{3r^2}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema1107.

Solve for integers

$a^2b^2-11a^2-11b^2=1893$.

Eugen Predoiu, Călărași, GM-10/2013

Soluție.

$$a^2b^2-11a^2-11b^2=1893 \Leftrightarrow a^2\left(b^2-11\right)=11b^2+1893 \Leftrightarrow a^2=\frac{11b^2+1893}{b^2-11} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2=11+\frac{2014}{b^2-11}.$$

Din $a^2\in\mathbf{N}$ $\frac{2014}{b^2-11}\in\mathbf{N}$ $\Rightarrow b^2-11\in D_{2014}$, $2014=2\cdot19\cdot53$.

Convin:

1). $\begin{cases}a^2-11=38\\ b^2-11=53\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a^2=49\\ b^2=64\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=\pm7\\ b=\pm8\end{cases}$.

2). $\begin{cases}a^2-11=53\\ b^2-11=38\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a^2=64\\ b^2=49\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=\pm8\\ b=\pm7\end{cases}$.

Mulțimea soluțiilor ecuației este $S=\{(\pm7,\pm8),(\pm8,\pm7)\}$

Remarcă.

Solve for integers

$a^2b^2-9a^2-9b^2=31$.

Marin Chirciu

Soluție.

$$a^2b^2-9a^2-9b^2=31 \Leftrightarrow a^2\left(b^2-9\right)=9b^2+31 \Leftrightarrow a^2=\frac{9b^2+31}{b^2-9} \Leftrightarrow a^2=9+\frac{112}{b^2-9}$$

Din $a^2\in\mathbf{N} \Rightarrow \frac{112}{b^2-9}\in\mathbf{N}$ $\Rightarrow b^2-9\in D_{112}$, $112=2^4\cdot7$.

Convin:

1). $\begin{cases}a^2-9=7\\ b^2-9=16\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a^2=16\\ b^2=25\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=\pm4\\ b=\pm5\end{cases}$.

2). $\begin{cases} a^2-9=16 \\ b^2-9=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=25 \\ b^2=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\pm 5 \\ b=\pm 4 \end{cases}$.

Mulțimea soluțiilor ecuației este $S=\{(\pm 4,\pm 5),(\pm 5,\pm 4)\}$.

Problema 1108.

Solve in reals

$21^x+22^x+23^x+24^x=25^x+26^x+27^x$.

Crăciun Gheorghe, Math 2/2026

Soluție.

$21^x+22^x+23^x+24^x=25^x+26^x+27^x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \downarrow\left(\frac{21}{24}\right)^x+\left(\frac{22}{24}\right)^x+\left(\frac{23}{24}\right)^x+1=\left(\frac{25}{24}\right)^x+\left(\frac{26}{24}\right)^x+\left(\frac{27}{24}\right)^x\uparrow$.

Ecuația este de forma $f(x)=g(x)$, unde f este funcție strict descrescătoare și g este funcție strict crescătoare. O astfel de ecuație are cel mult o soluție. Cum $f(2)=g(2)$ deducem că $x=2$ este soluția unică a ecuației.

Remarcă.

Solve in reals

$36^x+37^x+38^x+39^x+40^x=41^x+42^x+43^x+44^x$.

Marin Chirciu

Soluție.

$36^x+37^x+38^x+39^x+40^x=41^x+42^x+43^x+44^x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \downarrow\left(\frac{36}{40}\right)^x+\left(\frac{37}{40}\right)^x+\left(\frac{38}{40}\right)^x+\left(\frac{39}{40}\right)^x+1=\left(\frac{41}{40}\right)^x+\left(\frac{42}{40}\right)^x+\left(\frac{43}{40}\right)^x+\left(\frac{44}{40}\right)^x\uparrow$.

Ecuația este de forma $f(x)=g(x)$, unde f este funcție strict descrescătoare și g este funcție strict crescătoare. O astfel de ecuație are cel mult o soluție. Cum $f(2)=g(2)$ deducem că $x=2$ este soluția unică a ecuației.

Problema1108.

If $a,b,c>0$, $abc=1$ then

$$\sum\frac{1}{a+b}\le\frac{1}{2}\sum a^2.$$

Traian Preda, București, GM-9/2013

Soluție.

Lema.

If $a,b,c>0$, $abc=1$ then

$$\frac{1}{a+b}\le\frac{c(a+b)}{4}.$$

Demonstrație.

$$\frac{1}{a+b}\overset{SOS}{\le}\frac{a+b}{4ab}\overset{abc=1}{=}\frac{c(a+b)}{4}.$$

$$LHS=\sum\frac{1}{a+b}\overset{Lema}{\le}\sum\frac{c(a+b)}{4}=\frac{1}{2}\sum ab\overset{SOS}{\le}\frac{1}{2}\sum a^2=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$

Remarcă.

If $a,b,c>0$, $abc=1$ then

$$\sum\frac{1}{a+b}\le\frac{1}{2}\sum ab.$$

Marin Chirciu

Problema1109.

Arătați că numărul

$$A=2014^{15}+2014^{12}+1$$

nu este prim.

Gheorghe Râmbu, OL-2014-Maramureș

Soluție.

Punând în egalitatea $\left(x^2+x+1\right)\left(x^3-x+1\right)=x^5+x^4+1$, $x=2014^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow A=2014^{15}+2014^{12}+1=\left(2014^6+2014^3+1\right)\left(2014^9-2014^3+1\right) \Rightarrow A$ este număr compus.

Remarcă.

1).Arătați că numărul

$A=2026^5+2026^4+1$

nu este prim.

2).

Arătați că numărul

n^5+n^4+1, $n\in\mathbf{N}, n\geq 2$

nu este prim.

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Folosind egalitatea $\left(n^2+n+1\right)\left(n^3-n+1\right)=n^5+n^4+1 \Rightarrow n^5+n^4+1$ este număr compus.

Problema1110.

Solve in integers

$4x^2\left(y-1\right)-4x-y-1=0$.

Marius Farkaș, OL-2014-Iași

Soluție.

$4x^2\left(y-1\right)-4x-y-1=0 \Leftrightarrow y=\dfrac{\left(2x+1\right)^2}{\left(2x-1\right)\left(2x+1\right)} \Leftrightarrow y=\dfrac{2x+1}{2x-1}$, $x,y\in\mathbf{Z}$.

$y=\dfrac{2x+1}{2x-1}=1+\dfrac{2}{2x-1}\in\mathbf{Z} \Rightarrow \dfrac{2}{2x-1}\in\mathbf{Z} \Leftrightarrow 2x-1\in D_2=\left\{-2,-1,1,2\right\} \Leftrightarrow 2x\in\left\{-1,0,2,3\right\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in\left\{0,1\right\} \Rightarrow y\in\left\{-1,3\right\} \Rightarrow \left(x,y\right)\in\left\{\left(0,-1\right),\left(1,3\right)\right\}$.

Mulțimea soluțiilor ecuației este $S=\left\{\left(0,-1\right),\left(1,3\right)\right\}$.

Remarcă.

Fie $\lambda > 2$ număr întreg par fixat. Solve in integers

$$\lambda^2 x^2 (y-1) - 2\lambda x - y - 1 = 0.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$\lambda^2 x^2 (y-1) - 2\lambda x - y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{(\lambda x+1)^2}{(\lambda x-1)(\lambda x+1)} \Leftrightarrow y = \frac{\lambda x+1}{\lambda x-1},\ x, y \in \mathbf{Z}.$$

$$y = \frac{\lambda x+1}{\lambda x-1} = 1 + \frac{2}{\lambda x-1} \in \mathbf{Z} \Rightarrow \frac{2}{\lambda x-1} \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow \lambda x - 1 \in D_2 = \{-2,-1,1,2\} \Leftrightarrow \lambda x \in \{-1,0,2,3\}$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow (x, y) = (0,-1).$$

Deducem că $(x, y) = (0,-1)$ este soluția ecuației.

Problema1111.

In ΔABC holds

$$\sum \frac{1}{bc(r_a - r)} \le \left(\frac{1}{2r}\right)^3.$$

Sarkhan Adgozalov, Georgia, RMM 2/2026

Soluție.

Lema.

In ΔABC holds

$$\sum \frac{1}{bc(r_a - r)} = \frac{1}{4Rr^2}.$$

$$LHS = \sum \frac{1}{bc(r_a - r)} = \frac{1}{4Rr^2} \overset{Euler}{\le} \frac{1}{4 \cdot 2r \cdot r^2} = \frac{1}{8r^3} = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral..

Remarcă.

In ΔABC holds:

1).

$$\frac{1}{2R^2r} \le \sum \frac{1}{bc(r_a - r)} \le \frac{1}{4Rr^2}.$$

2)

$$\sum \frac{1}{bc(r_a - r)} = \frac{1}{4Rr^2}.$$

3).

$$\frac{1}{2R^2r} \le \sum \frac{1}{bc(h_a - r)} \le \frac{R}{16r^4}.$$

4).

$$\sum \frac{1}{bc(h_a - r)} \ge \sum \frac{1}{bc(r_a - r)}.$$

5).

$$\sum \frac{1}{bc(h_a - r)} = \frac{p^2 - 3r^2 - 4Rr}{2Rr^2(p^2 + r^2 + 2Rr)}.$$

6).

$$\sum \frac{1}{bc(r_a - r)} = \frac{1}{4Rr^2}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema1112.

In non-obtuse ΔABC holds

$$2(R + r) \le \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Arkady Alt, USA, MathOlymp 2/2026

Soluție.

$$2(R + r) \le \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \Leftrightarrow 4(R + r)^2 \le \sum a^2 \Leftrightarrow 4(R + r)^2 \le 2(p^2 - r^2 - 4Rr) \Leftrightarrow$$

$p^2 \ge 2R^2 + 8Rr + 3r^2$, (Walker).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral..

Remarcă.

In non-obtuse ΔABC holds

1).

$$\sum a^4 \geq \frac{16}{3}(R+r)^4.$$

2).In non-obtuse ΔABC holds

$$\sum a^2 \geq 4(R+r)^2.$$

3).

$$\sum a^{2n} \geq 3\left(\frac{4}{3}\right)^n (R+r)^{2n}, \ n \in \mathbf{N}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema1113.

In ΔABC holds

$$\sum \frac{AI_a}{\sin A} \geq 36r.$$

Sarkhan Adgozalov, Georgia, RMM 2/2026

Soluție.

Lema.

In ΔABC holds

$$\sum \frac{AI_a}{\sin A} = \frac{p^2+r^2+4Rr}{r}.$$

Remarcă.

In ΔABC holds

$$18R \leq \sum \frac{AI_a}{\sin A} \leq \frac{4(R+r)^2}{r}.$$

Marin Chirciu

Problema1114.

Solve for reals

$$\begin{cases} x^2(y+z)^2=(3x^2+x+1)y^2z^2 \\ y^2(z+x)^2=(4y^2+y+1)z^2x^2 \\ z^2(x+y)^2=(5z^2+z+1)x^2y^2 \end{cases}.$$

Chew -Seong Cheong, Math 2/2026

Soluție.

$(x,0,0),(0,y,0),(0,0,z)$ sunt soluții.

Pentru $x,y,z\neq 0$ obținem:

$$\begin{cases} x^2(y+z)^2=(3x^2+x+1)y^2z^2 \\ y^2(z+x)^2=(4y^2+y+1)z^2x^2 \\ z^2(x+y)^2=(5z^2+z+1)x^2y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2=3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2} \\ \left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)^2=4+\frac{1}{y}+\frac{1}{y^2} \\ \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2=5+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2} \end{cases} \overset{(a,b,c)=\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y},\frac{1}{z}\right)}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{(a,b,c)=\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y},\frac{1}{z}\right)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} (b+c)^2=3+a+a^2 \\ (c+a)^2=4+b+b^2 \\ (a+b)^2=5+c+c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (b-a)\left(1+2\sum a\right)=-1 \\ (c-b)\left(1+2\sum a\right)=-1 \\ (a-c)\left(1+2\sum a\right)=2 \end{cases} \overset{1+2\sum a=k}{\Leftrightarrow} \begin{cases} (b-a)k=-1 \\ (c-b)k=-1 \\ (a-c)k=2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b-a=\frac{-1}{k} \\ c-b=\frac{-1}{k} \\ a-c=\frac{2}{k} \end{cases} \Rightarrow a,b,c$ sunt în progresie aritmetică $\Rightarrow a=b+r, c=b-r \Rightarrow$

$$\Rightarrow (c+a)^2=4+b+b^2 \Leftrightarrow (b-r+b+r)^2=4+b+b^2 \Leftrightarrow 4b^2=4+b+b^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3b^2-b-4=0 \Leftrightarrow (3b-4)(b+1)=0 \Leftrightarrow b\in\left\{\frac{4}{3},-1\right\} \Rightarrow r\in\left\{\frac{1}{9},\frac{-1}{5}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (a,b,c)\in\left\{\left(\frac{13}{9},\frac{12}{9},\frac{11}{9}\right),\left(\frac{-6}{5},\frac{-5}{5},\frac{-4}{5}\right)\right\} \Rightarrow (x,y,z)\in\left\{\left(\frac{9}{13},\frac{9}{12},\frac{9}{11}\right),\left(\frac{-5}{6},\frac{-5}{5},\frac{-5}{4}\right)\right\}$.

Mulțimea soluțiilor sistemului este: $S=\left\{(x,0,0),(0,y,0),(0,0,z),\left(\frac{9}{13},\frac{9}{12},\frac{9}{11}\right),\left(\frac{-5}{6},\frac{-5}{5},\frac{-5}{4}\right)\right\}$, $x,y,z\in\mathbf{R}$.

Problema1115.

If $a,b,c>0$, $3+\sum a^2\le 2\sum ab$ then

$\sum a\ge 3$.

Nguyen Viet Hung, Vietnam, Mathematical Inequalities 2/2026

Soluție.

$3+\sum a^2\le 2\sum ab \Leftrightarrow 3+\left(\sum a\right)^2\le 4\sum ab \Rightarrow 3+\left(\sum a\right)^2\le 4\sum ab\le 4\cdot\frac{1}{3}\left(\sum a\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3+\left(\sum a\right)^2\le 4\cdot\frac{1}{3}\left(\sum a\right)^2 \Leftrightarrow \left(\sum a\right)^2\ge 9 \Leftrightarrow \sum a\ge 3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarcă.

1).If $a,b,c>0$, $3(\lambda-1)+\sum a^2\le\lambda\sum ab$, $\lambda>1$ then

$\sum a\ge 3$.

2).If $a,b,c>0$, $\sum a\ge 3$ and $\lambda\ge 1$ then

$3(\lambda-1)+\sum a^2\ge\lambda\sum ab$.

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema1116.

Solve in reals

$45^x+48^x=36^x+80^x$.

Math1/2026

Soluție.

$45^x + 48^x = 36^x + 80^x \Leftrightarrow \left(80^x - 45^x\right) + \left(36^x - 48^x\right) = 0 \Leftrightarrow 5^x\left(16^x - 9^x\right) - 12^x\left(4^x - 3^x\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5^x\left(4^x - 3^x\right)\left(4^x + 3^x\right) - 12^x\left(4^x - 3^x\right) = 0 \Leftrightarrow \left(4^x - 3^x\right)\left(20^x + 15^x - 12^x\right) = 0$.

1). $\left(4^x - 3^x\right) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

2). $\left(20^x + 15^x - 12^x\right) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{4}\right)^x + \left(\frac{5}{3}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x = -2$.

Mulțimea soluțiilor ecuației este $S = \{-2, 0\}$.

Remarcă.

Solve in reals

1).

$63^x + 48^x = 36^x + 112^x$.

Soluție.

Mulțimea soluțiilor ecuației este $S = \{-1, 0\}$.

2).

$16^x + 21^x = 9^x + 28^x$.

Soluție.

Mulțimea soluțiilor ecuației este $S = \{0, 1\}$.

3).

$15^x + 16^x = 9^x + 20^x$.

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Mulțimea soluțiilor ecuației este $S = \{0, 2\}$.

Problema1117.

If a,b,c be distint nonzero real numbers such that $a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c}=c+\frac{1}{a}$ then

$|abc|=1$.

Kledis Ahmetaj, Mathematics(College and High School)2/2026

Soluție.

$$a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c}=c+\frac{1}{a}\Rightarrow\begin{cases}a-c=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\\ b-a=\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\\ c-b=\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-c=\frac{b-a}{ab}\\ b-a=\frac{c-b}{bc}\\ c-b=\frac{a-c}{ca}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(a-c)(b-a)(c-b)=\frac{b-a}{ab}\cdot\frac{c-b}{bc}\cdot\frac{a-c}{ca}\Leftrightarrow 1=\frac{1}{ab}\cdot\frac{1}{bc}\cdot\frac{1}{ca}\Leftrightarrow(abc)^2=1\Leftrightarrow|abc|=1.$$

Remarcă.

1).If a,b,c be distint nonzero real numbers and $\lambda>0$ such that $a+\frac{\lambda}{b}=b+\frac{\lambda}{c}=c+\frac{\lambda}{a}$ then

$|abc|=\lambda\sqrt{\lambda}$.

Marin Chirciu

Problema1118.

Solve in reals

$$x+\sqrt{x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}}=1024.$$

Bahadur Heydarov, Math 2/2026

Soluție.

$$x+\sqrt{x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}}=1024\Leftrightarrow x+\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}\right)^2}=1024\Leftrightarrow x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}=1024\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}\right)^2=1024 \Leftrightarrow \frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}=32 \Leftrightarrow \sqrt{x+\frac{1}{4}}=32-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x+\frac{1}{4}}=\frac{63}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+\frac{1}{4}=\left(\frac{63}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x=\left(\frac{63}{2}\right)^2-\frac{1}{4} \Leftrightarrow x=\frac{63^2-1}{4}=\frac{(63-1)(63+1)}{4}=\frac{62\cdot 64}{4}=62\cdot 16=992$.

Deducem că $x=992$ este soluția ecuației.

Remarcă.

Let be $\lambda \geq \frac{1}{2}$ fixed. Solve in reals

$$x+\sqrt{x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}}=\lambda^2.$$

Marin Chirciu

Deducem că $x=\lambda(\lambda-1)$ este soluția ecuației.

Problema1119.

In ΔABC holds

$$\sum \frac{a}{h_a} \geq 2\sqrt{3}.$$

Elton Papanikolla, Math Olymp, 2/2026

Soluție.

Lema.

In ΔABC holds

$$\sum \frac{a}{h_a}=\frac{p^2-r^2-4Rr}{pr}.$$

Remarcă.

In ΔABC holds

1).

$$\frac{9Rr}{F} \leq \sum \frac{a}{h_a} \leq \frac{9R^2}{2F}.$$

2).

$$\frac{18r^2}{F} \leq \sum \frac{a}{r_a} \leq \frac{9Rr}{F}.$$

3).

$$\sum \frac{a}{h_a} \geq \sum \frac{a}{r_a}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Folosim: $\sum \frac{a}{h_a} = \frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{pr}$ și $\sum \frac{a}{r_a} = \frac{2(4R+r)}{p}$.

Problema1120.

In ΔABC holds

$$\sum \frac{a}{b+c} + \frac{1}{2} \prod \frac{w_a}{r_a} \geq 2.$$

Adil Abdullayev, Azerbaijan, RMM 11/2019

Soluție.

Folosim $\sum \frac{a}{b+c} = \frac{2(p^2 - r^2 - Rr)}{p^2 + r^2 + 2Rr}$ și $\frac{w_a w_b w_c}{r_a r_b r_c} = \frac{16Rr}{p^2 + r^2 + 2Rr}$.

Remarcă.

In ΔABC holds

$$\sum \frac{a}{b+c} + \lambda \prod \frac{w_a}{r_a} \geq \lambda + \frac{3}{2},\ \lambda \leq \frac{1}{2}.$$

Marin Chirciu

Problema1121.

In ΔABC holds

$$\sum \frac{\sin A}{\sin B \sin C} \geq \sum \frac{1}{\cos \frac{A}{2}}.$$

Do Thanh Tung, Vietnam, Mathematical Inequalities, 1/2026

Soluție.

Lema.

In ΔABC holds

Remarcă.

In ΔABC holds

$$\frac{18r^2}{F} \leq \sum \frac{\sin A}{\sin B \sin C} \leq \frac{9R^2}{2F}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema.

In ΔABC holds

$$\sum \frac{\sin A}{\sin B \sin C} = \frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{rp}.$$

Problema1122.

Demonstrați că

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1+x^{2014}}}{1+2015^x} dx \leq \sqrt{\frac{2016}{2015}}.$$

OL-Gorj-2014

Soluție.

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1+x^{2014}}}{1+2015^x} dx = \int_{-1}^{0} \frac{\sqrt{1+x^{2014}}}{1+2015^x} dx + \int_{0}^{1} \frac{\sqrt{1+x^{2014}}}{1+2015^x} dx = \int_{0}^{1} \frac{\sqrt{1+(-x)^{2014}}}{1+2015^{-x}} dx + \int_{0}^{1} \frac{\sqrt{1+x^{2014}}}{1+2015^x} dx =$$

$$= \int_{0}^{1} \frac{\sqrt{1+(-x)^{2014}}}{1+\frac{1}{2015^x}} dx + \int_{0}^{1} \frac{\sqrt{1+x^{2014}}}{1+2015^x} dx = \int_{0}^{1} \frac{2015^x\sqrt{1+x^{2014}}}{2015^x+1} dx + \int_{0}^{1} \frac{\sqrt{1+x^{2014}}}{1+2015^x} dx =$$

$$=\int_0^1 \frac{\left(1+2015^x\right)\sqrt{1+x^{2014}}}{1+2015^x}dx=\int_0^1 \sqrt{1+x^{2014}}dx.$$

Inegalitatea se scrie $\int_0^1 \sqrt{1+x^{2014}}dx \le \sqrt{\frac{2016}{2015}}$, care rezultă din CBS:

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^{2014}}dx \overset{CBS}{\le} \sqrt{\int_0^1 1^2 dx \cdot \int_0^1 \left(1+x^{2014}\right)dx}=\sqrt{1\cdot\left.\left(x+\frac{x^{2015}}{2015}\right)\right|_0^1}=\sqrt{\frac{2016}{2015}}.$$

Deducem că $\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1+x^{2014}}}{1+2015^x}dx \le \sqrt{\frac{2016}{2015}}$.

Remarcă.

Demonstrați că

$$\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1+x^{2n}}}{1+(2n+1)^x}dx \le \sqrt{\frac{2n+2}{2n+1}},\ n\in\mathbf{N}^*.$$

Marin Chirciu

Problema1123.

Fie șirul $\left(x_n\right)_{n\ge1}$ definit prin, $x_1=\sqrt{\frac{1}{2}}$, $x_{n+1}=\sqrt{\frac{1+x_n}{2}}$.Calculați

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_1x_2\ldots x_n\right).$$

Al. Gabriel Mârșanu, Iași, GM 12/2013

Soluție.

$x_1=\sqrt{\frac{1}{2}}=\cos\frac{\pi}{4}$, $x_2=\cos\frac{\pi}{8}$,..., $x_n=\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$,(inducție matematică).

Rezultă $x_1x_2\ldots x_n=\dfrac{1}{2^n\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}$.

Obținem $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_1x_2\dots x_n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n\sin\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n\left(\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}{\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}\right)\cdot\dfrac{2^{n+1}}{\pi}}\overset{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}{=}\dfrac{2}{\pi}$.

Deducem că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_1x_2\dots x_n\right)=\dfrac{2}{\pi}$.

Remarcă.

Fie șirul $\left(x_n\right)_{n\ge 1}$ definit prin $x_1=\sqrt{\dfrac{1}{2}}$, $x_{n+1}=\sqrt{\dfrac{1+x_n}{2}}$.Calculați

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n\right)^{2^{2n}}$.

Marin Chirciu

Soluție.

$x_1=\sqrt{\dfrac{1}{2}}=\cos\dfrac{\pi}{4}$, $x_2=\cos\dfrac{\pi}{8}$,..., $x_n=\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$,(inducție matematică).

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_n\right)^{2^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)^{2^{2n}}\overset{(1^\infty)}{=}\lim_{n\to\infty}\left(1+\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}-1\right)^{2^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\left(\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}-1\right)\right)^{\frac{1}{\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}-1}\left(\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}-1\right)2^{2n}}=$$

$$e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}-1\right)2^{2n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-2\sin^2\frac{\pi}{2^{n+2}}-1\right)2^{2n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(-2\sin^2\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)2^{2n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(-2\frac{\sin^2\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)^2}\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)^2\right)2^{2n}}\overset{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}{=}$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(-2\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)^2\right)2^{2n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(-2\frac{\pi^2}{2^{2n+4}}\right)2^{2n}}=e^{\frac{-\pi^2}{8}}.$$

Deducem că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n\right)^{2^{2n}}=e^{\frac{-\pi^2}{8}}$.

Problema1224.

If $a,b,c>0$, $3^{\frac{b+c}{a}}+3^{\frac{c+a}{b}}+3^{\frac{a+b}{c}}=27$ then

$a=b=c$.

George-Florin Șerban, Brăila, SGM12/2013

Soluție.

$$LHS=3^{\frac{b+c}{a}}+3^{\frac{c+a}{b}}+3^{\frac{a+b}{c}}\overset{AG}{\geq}3\sqrt[3]{3^{\frac{b+c}{a}}\cdot 3^{\frac{c+a}{b}}\cdot 3^{\frac{a+b}{c}}}=3\sqrt[3]{3^{\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}}}\overset{AG}{\geq}3\sqrt[3]{3^6}=27=RHS,$$

cu egal pentru $a=b=c$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

Remarcă.

If $a,b,c,d>0$, $4^{\frac{b+c}{a}}+4^{\frac{c+d}{b}}+4^{\frac{d+a}{c}}+4^{\frac{a+b}{d}}=64$ then

$a=b=c=d$.

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS=4^{\frac{b+c}{a}}+4^{\frac{c+d}{b}}+4^{\frac{d+a}{c}}+4^{\frac{a+b}{d}}\overset{AG}{\geq}4\sqrt[3]{4^{\frac{b+c}{a}}\cdot 4^{\frac{c+d}{b}}\cdot 4^{\frac{d+a}{c}}\cdot 4^{\frac{a+b}{d}}}=4\sqrt[4]{4^{\frac{b+c}{a}+\frac{c+d}{b}+\frac{d+a}{c}+\frac{a+b}{d}}}\overset{AG}{\geq}4\sqrt[4]{4^8}=$$

$=64=RHS$, cu egal pentru $a=b=c=d$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=d$.

Problema1225.

If $x,y,z>0$ then

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}\geq 4(x-z).$$

OL-Gorj-2014

Soluție.

$$LHS=\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}\overset{CS}{\geq}\frac{(x+y)^2}{y+z}\overset{(1)}{\geq}4(x-z)=RHS,$$

unde $\frac{(x+y)^2}{y+z}\overset{(1)}{\geq}4(x-z)\Leftrightarrow(x+y)^2\geq 4(x-z)(y+z)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+2xy+y^2\geq 4xy-4yz+4xz-4z^2\Leftrightarrow x^2+y^2+4z^2-2xy+4yz-4xz\geq 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(x-y-2z)^2\geq 0$, cu egal pentru $x-y-2z=0$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y + 2z$.

Remarcă.

If $x, y, z > 0$ then

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{(x+y)^2}{y+z} \geq 8(x-z)$$

Marin Chirciu

Problema1226.

If $a,b,c \in [0,1]$ then

$$\sum \frac{a}{b+c^3+7} \leq \frac{1}{3}.$$

OL-Alba-2014

Soluție.

Lema.

If $a,b,c \in [0,1]$ then

$$\frac{a}{b+c^3+7} \leq \frac{a}{3(a+b+c)}.$$

Demonstrație.

If $x > 0$ then

$$x^3 - 3x + 2 \geq 0.$$

$x^3 - 3x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x(x-1)^2 \geq 0$, cu egal pentru $x = 1$.

$$\frac{a}{b+c^3+7} \overset{c^3 \geq 3c-2}{\leq} \frac{a}{b+3c-2+7} = \frac{a}{b+3c+5} \overset{a,b,c \leq 1}{\leq} \frac{a}{3(a+b+c)}.$$

$$LHS = \sum \frac{a}{b+c^3+7} \overset{Lema}{\leq} \sum \frac{a}{3(a+b+c)} = \frac{1}{3} = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = 1$.

Remarcă.

If $a,b,c\in[0,1]$ and $\lambda\geq 7$ then

$$\sum\frac{a}{b+c^3+\lambda}\leq\frac{3}{\lambda+2}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema.

If $a,b,c\in[0,1]$ and $\lambda\geq 7$ then

$$\frac{a}{b+c^3+\lambda}\leq\frac{3a}{(\lambda+2)(a+b+c)}.$$

Problema1227.

VI.619.Solve in prime numbers

$$p\left(10^q+10+p^2\right)=2028.$$

Mihai Vijdeluc, Baia Mare, RMT-4/2025

Soluție.

$p\left(10^q+10+p^2\right)=2028=par$, $p=prim\Rightarrow p=2\Rightarrow 2\left(10^q+10+2^2\right)=2028\Leftrightarrow 10^q=1000$ $\Leftrightarrow q=3$.

Deducem că $(p,q)=(2,3)$ este soluția ecuației.

Remarcă.

Solve in prime numbers

1).

$$p\left(10^q+10+p\right)=224.$$

Soluție.

Deducem că $(p,q)=(2,2)$ este soluția ecuației.

2).

$p\left(10^{q}+10+p\right)=2024$.

Soluție.

Deducem că $(p,q)=(2,3)$ este soluția ecuației.

3),

$p\left(10^{q}+10+p^{3}\right)=2036$.

Soluție.

Deducem că $(p,q)=(2,3)$ este soluția ecuației.

4).

$p\left(10^{q}+10+p^{4}\right)=2052$.

Soluție.

Deducem că $(p,q)=(2,3)$ este soluția ecuației.

5).

$p\left(10^{q}+10+p^{5}\right)=2084$.

Soluție.

Deducem că $(p,q)=(2,3)$ este soluția ecuației.

6).

$p\left(10^{q}+10+p^{10}\right)=4068$.

Soluție.

Deducem că $(p,q)=(2,3)$ este soluția ecuației.

7).

$p\left(10^{q}+p^{3}+p+q\right)=2026$.

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Deducem că $(p,q)=(2,3)$ este soluția ecuației.

Problema1228

VI.619. Solve in integers

$$xy\left(\frac{x+1}{x}-\frac{2023}{y}\right)=2025.$$

Gheorghe Iacob, Pașcani, Gabriela Munteanu, Iași, RMT-4/2025

Soluție.

$$xy\left(\frac{x+1}{x}-\frac{2023}{y}\right)=2025 \Leftrightarrow y(x+1)-2023x=2025 \Leftrightarrow y(x+1)=2023x+2025 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{2023x+2025}{x+1} \Leftrightarrow y=\frac{2023(x+1)+2}{x+1} \Leftrightarrow y=2023+\frac{2}{x+1}.$$

$$y\in\mathbf{Z},\ y=2023+\frac{2}{x+1} \Rightarrow y=2023+\frac{2}{x+1}\in\mathbf{Z} \Leftrightarrow \frac{2}{x+1}\in\mathbf{Z} \Leftrightarrow x+1\in D_2=\{-2,-1,1,2\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in\{-3,-2,0,1\} \Rightarrow y\in\{2022,2021,2025,2024\}.$$

Mulțimea soluțiilor ecuației este $S=\{(-3,2022),(-2,2021),(0,2025),(1,2024)\}$.

Remarcă.

Let be $\lambda\in\mathbf{Z}$ fixed. Solve in integers

1).

$$xy\left(\frac{x+1}{x}-\frac{\lambda}{y}\right)=\lambda+2.$$

Soluție.

Mulțimea soluțiilor ecuației este $S=\{(-3,\lambda-1),(-2,\lambda-2),(0,\lambda+2),(1,\lambda+1)\}$.

2).

$$xy\left(\frac{x+1}{x}-\frac{\lambda}{y}\right)=\lambda+3.$$

Soluție.

Mulțimea soluțiilor ecuației este $S=\{(-4,\lambda-1),(-2,\lambda-3),(0,\lambda+3),(2,\lambda+1)\}$.

3).

$$xy\left(\frac{x+1}{x}-\frac{\lambda}{y}\right)=\lambda+5$$.

Soluție.

Mulțimea soluțiilor ecuației este $S=\{(-6,\lambda-1),(-2,\lambda-5),(0,\lambda+5),(4,\lambda+1)\}$.

4).

$$xy\left(\frac{x+1}{x}-\frac{\lambda}{y}\right)=\lambda+p$$, p prime number fixed..

Marin Chirciu

Soluție.

Mulțimea soluțiilor ecuației este $S=\{(-p-1,\lambda-1),(-2,\lambda-p),(0,\lambda+p),(p-1,\lambda+1)\}$.

Problema1229.

VIII.619. If $a,b,c>0$, $a+b+c=3$ then

$$\sqrt{4a+4}+\sqrt{4a+5}+\sqrt{4a+6}\le 9$$.

Când are loc egalitatea?

Aurel Doboșan, Lugoj, RMT-4/2025

Soluție.

$$LHS=\sqrt{4a+4}+\sqrt{4a+5}+\sqrt{4a+6}\overset{CBS}{\le}\sqrt{3(4a+4+4a+5+4a+6)}=\sqrt{3(4(a+b+c)+15)}=$$

$$=\sqrt{3(4\cdot 3+15)}=\sqrt{3\cdot 27}=\sqrt{81}=9=RHS$$, cu egal pentru $4a+4=4b+5=4c+6=k\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (a,b,c)=\left(\frac{k-4}{4},\frac{k-5}{4},\frac{k-6}{4}\right)$$, $a+b+c=3\Rightarrow \frac{k-4}{4}+\frac{k-5}{4}+\frac{k-6}{4}=3\Leftrightarrow k=9\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (a,b,c)=\left(\frac{5}{4},\frac{4}{4},\frac{3}{4}\right)$$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $(a,b,c)=\left(\frac{5}{4},\frac{4}{4},\frac{3}{4}\right)$.

Remarcă.

If $a,b,c\geq 0$, $a+b+c=3$ and $\lambda\geq 1$ then

$$\sqrt{\lambda a+\lambda}+\sqrt{\lambda a+\lambda+1}+\sqrt{\lambda a+\lambda+2}\leq\sqrt{9(2\lambda+1)}.$$

Când are loc egalitatea?

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS=\sqrt{\lambda a+\lambda}+\sqrt{\lambda a+\lambda+1}+\sqrt{\lambda a+\lambda+2}\overset{CBS}{\leq}\sqrt{3(\lambda a+\lambda+\lambda a+\lambda+1+\lambda a+\lambda+2)}=$$

$=\sqrt{3(\lambda\cdot 3+3\lambda+3)}=\sqrt{9(2\lambda+1)}=RHS$, cu egal pentru $\lambda a+\lambda=\lambda b+\lambda+1=\lambda c+\lambda+2=k$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $(a,b,c)=\left(\frac{k-\lambda}{\lambda},\frac{k-\lambda-1}{\lambda},\frac{k-\lambda-2}{\lambda}\right)$, $a+b+c=3\Rightarrow\frac{k-\lambda}{\lambda}+\frac{k-\lambda-1}{\lambda}+\frac{k-\lambda-2}{\lambda}=3$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k=2\lambda+1\Leftrightarrow$ $(a,b,c)=\left(\frac{2\lambda+1-\lambda}{\lambda},\frac{2\lambda+1-\lambda-1}{\lambda},\frac{2\lambda+1-\lambda-2}{\lambda}\right)$

$\Leftrightarrow$ $(a,b,c)=\left(\frac{\lambda+1}{\lambda},\frac{\lambda}{\lambda},\frac{\lambda-1}{\lambda}\right)$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $(a,b,c)=\left(\frac{\lambda+1}{\lambda},\frac{\lambda}{\lambda},\frac{\lambda-1}{\lambda}\right)$.

Problema1230.

In ΔABC holds

$$\sum\frac{r_br_c}{w_a^2}=\frac{1}{2}\left(3+\sum\frac{m_a}{s_a}\right).$$

Bogdan Fuștei, RMM 11/2019

Soluție.

Lema.

In ΔABC holds

$$\frac{r_b r_c}{w_a^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{m_a}{s_a}+1\right).$$

Demonstrație.

1). $w_a=\frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{r_b r_c}$, vezi $w_a=\frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\cos\frac{A}{2}$, $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$ și $r_a=\frac{S}{p-a}$.

2). $\frac{m_a}{s_a}=\frac{b^2+c^2}{2bc}$, vezi $s_a=\frac{2bc}{b^2+c^2}m_a$.

$$\frac{r_b r_c}{w_a^2}=\frac{r_b r_c}{\left(\frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{r_b r_c}\right)^2}=\frac{(b+c)^2}{4bc}=\frac{b^2+c^2}{4bc}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{m_a}{s_a}+1\right).$$

$$LHS=\sum\frac{r_b r_c}{w_a^2}=\sum\frac{1}{2}\left(\frac{m_a}{s_a}+1\right)=\frac{1}{2}\left(3+\sum\frac{m_a}{s_a}\right)=RHS.$$

Remarcă.

In ΔABC holds

$$\frac{13}{4}-\frac{r}{2R}\le\sum\frac{r_b r_c}{w_a^2}\le\frac{3R}{2r}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema.

In ΔABC holds

$$\frac{r_b r_c}{w_a^2}=\frac{(b+c)^2}{4bc}.$$

Folosind **Lema** obținem: $\sum\frac{r_b r_c}{w_a^2}=\frac{p^2+r^2+10Rr}{8Rr}$.

Problema1231.

Solve for reals

$$\sqrt{4+2\sqrt{4-x^2}}=x\left(1-\sqrt{4-x^2}\right).$$

Kostas Geronikolas,Greece, Mathematical Inequalities 1/2021

Soluție.

Cu substituția $\sqrt{4-x^2}=t\geq 0 \Leftrightarrow 4-x^2=t^2 \Leftrightarrow x^2=4-t^2$ obținem:

$$\sqrt{4+2\sqrt{4-x^2}}=x\left(1-\sqrt{4-x^2}\right) \Leftrightarrow 4+2\sqrt{4-x^2}=x^2\left(1-\sqrt{4-x^2}\right)^2 \Leftrightarrow 4+2t=\left(4-t^2\right)\left(1-t\right)^2$$

$$\Leftrightarrow t^4-2t^3-3t^2+10t=0 \Leftrightarrow t\left(t^3-2t^2-3t+10\right)=0 \Leftrightarrow t\left(t+2\right)\left(t^2-4t+5\right)=0 \Leftrightarrow t=0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x=2$ soluție acceptată.

Remarcă.

1). Let be $0<\lambda<4$ fixed. Solve for reals

$$\sqrt{\lambda^2+\lambda\sqrt{\lambda^2-x^2}}=x\left(1-\sqrt{\lambda^2-x^2}\right).$$

Deducem că $x=\lambda$ este soluția unică a ecuației.

2).Solve for reals

$$2\sqrt{4+\sqrt{16-x^2}}=x\left(1-\sqrt{16-x^2}\right).$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Cu substituția $\sqrt{16-x^2}=t\geq 0 \Leftrightarrow 16-x^2=t^2 \Leftrightarrow x^2=16-t^2$ obținem:

$$2\sqrt{4+\sqrt{16-x^2}}=x\left(1-\sqrt{16-x^2}\right) \Leftrightarrow 16+4\sqrt{16-x^2}=x^2\left(1-\sqrt{16-x^2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$16+4t=\left(16-t^2\right)\left(1-t\right)^2 \Leftrightarrow t^4-2t^3-15t^2+36t=0 \Leftrightarrow t\left(t^3-2t^2-15t+36\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$t\left(t+4\right)\left(t-3\right)^2=0 \Leftrightarrow t=0, t=3 \Leftrightarrow x=4, x=-\sqrt{7}.$$

Deducem că mulțimea soluțiilor ecuației este $S=\left\{-\sqrt{7},4\right\}$.

Problema1232.

In ΔABC holds

$$\sum\frac{(h_a+h_b)(h_a+h_c)}{h_bh_c}\geq 12.$$

D.M.Bătinețu-Giurgiu, Flaviu Cristian Verde, RMM1/2026

Soluție.

Lema.

In ΔABC holds

$$\sum\frac{(h_a+h_b)(h_a+h_c)}{h_bh_c}=\frac{p^6+p^4(3r^2-4Rr)+p^2r^2(32R^2+8Rr+3r^2)+r^3(4R+r)^3}{16R^2r^2p^2}.$$

Remarcă.

In ΔABC holds

1).

$$\frac{6R}{r}\leq\sum\frac{(r_a+r_b)(r_a+r_c)}{r_br_c}\leq\frac{3R^3}{2r^3}.$$

Soluție.

Lema.

$$\sum\frac{(r_a+r_b)(r_a+r_c)}{r_br_c}=\frac{p^2(r-8R)+(4R+r)^3}{p^2r}.$$

Remarcă.

In ΔABC holds

$$\sum\frac{(h_a+h_b)(h_a+h_c)}{h_bh_c}\geq\left(\frac{2r}{R}\right)^2\sum\frac{(r_a+r_b)(r_a+r_c)}{r_br_c}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema1233.

If $a,b,c>0$ then

$$\sum\frac{a}{b+c}+\frac{3}{2}\geq\sum\frac{a(b+c)}{a^2+bc}.$$

Nguyen Viet Hung, Vietnam, Mathematical Inequalities 1/2026

Soluție.

Lema.

If $a,b,x>0$ then

$$\frac{1}{(a+x)^2}+\frac{1}{(b+x)^2}\ge\frac{1}{x^2+ab}.$$

Demonstrație.

$$(a+b)\left(a+\frac{x^2}{b}\right)\overset{CBS}{\ge}(a+x)^2\Rightarrow\frac{1}{(a+x)^2}\ge\frac{1}{(a+b)\left(a+\frac{x^2}{b}\right)}.$$

$$(a+b)\left(b+\frac{x^2}{a}\right)\overset{CBS}{\ge}(b+x)^2\Rightarrow\frac{1}{(b+x)^2}\ge\frac{1}{(a+b)\left(b+\frac{x^2}{a}\right)}.$$

Rezultă

$$\frac{1}{(a+x)^2}+\frac{1}{(b+x)^2}\ge\frac{1}{(a+b)\left(a+\frac{x^2}{b}\right)}+\frac{1}{(a+b)\left(b+\frac{x^2}{a}\right)}=\frac{1}{x^2+ab}.$$

$$RHS=\sum\frac{a(b+c)}{a^2+bc}\overset{Lema}{\le}\sum a(b+c)\left(\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(a+c)^2}\right)=\sum\frac{a(b+c)}{(a+b)^2}+\sum\frac{a(b+c)}{(a+c)^2}=$$

$$=\sum\frac{a(b+c)+b(c+a)}{(a+b)^2}=\sum\frac{2ab}{(a+b)^2}+\sum\frac{c(a+b)}{(a+b)^2}\overset{AG}{\le}\sum\frac{1}{2}+\sum\frac{c}{a+b}=\frac{3}{2}+\sum\frac{a}{b+c}=LHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

Remarcă.

If $a,b,c>0$ then

$$\sum\frac{a}{b+c}\ge\sum\frac{bc}{a^2+bc}.$$

Marin Chirciu

Problema1234.

If $a,b,c>0$, $a^2+b^2+c^2=3$ then

$$\sum \frac{a^3}{a+bc} \geq \frac{3}{2}.$$

Sanong Huayrerai, Mathematical Inequalities 1/2026

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{a^3}{a+bc} = \sum \frac{a^4}{a^2+abc} \overset{CS}{\geq} \frac{\left(\sum a^2\right)^2}{\sum\left(a^2+abc\right)} = \frac{\left(\sum a^2\right)^2}{\sum a^2+3abc} = \frac{3^2}{3+3abc} =$$

$$= \frac{3}{1+abc} \overset{abc\leq 1}{\geq} \frac{3}{1+1} = \frac{3}{2} = RHS.$$

Am folosit mai sus $abc \leq 1$, vezi $3 = a^2+b^2+c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \Rightarrow abc \leq 1$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarcă.

If $a,b,c>0$, $a^2+b^2+c^2=3$ and $\lambda \geq 0$ then

$$\sum \frac{a^3}{a+\lambda bc} \geq \frac{3}{\lambda+1}.$$

Marin Chirciu

Problema1235.

In ΔABC holds

$$\sum \frac{b^2c^2}{a^2} \geq 9R^2.$$

Nguyen Son Ha,Vietnam, Problems-Book-2nd Edition,Titu Andreesu, Gabriel Dospinescu

Remarcă.

In ΔABC holds

$$\sum \frac{b^2c^2}{a^2} \geq 36r^2.$$

Soluție

$$\sum\frac{b^2c^2}{a^2}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum\frac{bc}{a}\right)^2}{3}\overset{Lema}{\geq}\frac{\left(\frac{27Rr}{p}\right)^2}{3}=\frac{(27Rr)^2}{3p^2}\overset{Mitrinovic}{\geq}\frac{(27Rr)^2}{3\cdot\frac{27R^2}{4}}=\left(\frac{54Rr}{9R}\right)^2=36r^2.$$

Lema.

In ΔABC holds

$$\sum\frac{bc}{a}\geq\frac{27Rr}{p}.$$

Folosim: $$\sum\frac{bc}{a}=\frac{p^2\left(p^2+2r^2-8Rr\right)+r^2(4R+r)^2}{4prR}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

In ΔABC holds

1).

$$\sum\frac{a^2}{b^2c^2}\geq\frac{4r^2}{R^4}.$$

Soluție

$$\sum\frac{a^2}{b^2c^2}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum\frac{a}{bc}\right)^2}{3}\overset{Lema}{\geq}\frac{\left(\frac{9r}{Rp}\right)^2}{3}=\frac{(9r)^2}{3R^2p^2}\overset{Mitrinovic}{\geq}\frac{(9r)^2}{3R^2\cdot\frac{27R^2}{4}}=\frac{9^2r^2}{3R^2\cdot\frac{27R^2}{4}}=\frac{4r^2}{R^4}.$$

2).

$$\sum\frac{a}{bc}\geq\frac{9r}{Rp}.$$

Soluție

Folosim: $$\sum\frac{a}{bc}=\frac{p^2-r^2-4Rr}{2Rrp}.$$

3).

4).

$$\sum\left(\frac{b^2c^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2c^2}\right)\geq 4r^2\left(9+\frac{1}{R^4}\right).$$

5).

$$\sum\frac{b^2c^2}{a^2}\geq 36r^2.$$

6).

$$\sum\frac{a^2}{b^2c^2}\geq\frac{4r^2}{R^4}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema1236.

In ΔABC holds

$$\sum a\sqrt{\frac{a}{b+c-a}}\geq a+b+c.$$

Konstantinos Geronikolas, Greece, Mathematical Inequalities 1/2026

Soluție

Lema.

In ΔABC holds

$$a\sqrt{\frac{a}{b+c-a}}\geq\frac{2a^2}{b+c}.$$

Demonstrație

$$\sqrt{\frac{b+c-a}{a}\cdot 1}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{b+c-a}{a}+1\right)=\frac{b+c}{2a}\Rightarrow a\sqrt{\frac{a}{b+c-a}}\geq a\cdot\frac{2a}{b+c}=\frac{2a^2}{b+c}.$$

$$LHS=\sum a\sqrt{\frac{a}{b+c-a}}\overset{Lema}{\geq}\sum\frac{2a^2}{b+c}\overset{CS}{\geq}\frac{2\left(\sum a\right)^2}{\sum(b+c)}=\frac{2\left(\sum a\right)^2}{2\sum a}=\sum a=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

In ΔABC holds

$$\sum a^n\sqrt{\frac{a}{b+c-a}}\ge 3\left(\frac{\sum a}{3}\right)^n,\ n\in\mathbf{N}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Pentru $n=0$ se obține $\sum\sqrt{\frac{a}{b+c-a}}\ge 3$, vezi $\sqrt{\frac{b+c-a}{a}\cdot 1}\le\frac{1}{2}\left(\frac{b+c-a}{a}+1\right)=\frac{b+c}{2a}\Rightarrow$

$$\sqrt{\frac{a}{b+c-a}}\ge\frac{2a}{b+c}=\frac{2a}{b+c}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sum\sqrt{\frac{a}{b+c-a}}\ge\sum\frac{2a}{b+c}=2\sum\frac{a}{b+c}\overset{Nesbitt}{\ge}2\cdot\frac{3}{2}=3.$$

În continuare fie $n\ge 1$.

Lema.

In ΔABC holds

$$a^n\sqrt{\frac{a}{b+c-a}}\ge\frac{2a^{n+1}}{b+c},\ n\in\mathbf{N}.$$

Demonstrație

$$\sqrt{\frac{b+c-a}{a}\cdot 1}\le\frac{1}{2}\left(\frac{b+c-a}{a}+1\right)=\frac{b+c}{2a}\Rightarrow a^n\sqrt{\frac{a}{b+c-a}}\ge a^n\cdot\frac{2a}{b+c}=\frac{2a^{n+1}}{b+c}.$$

$$LHS=\sum a^n\sqrt{\frac{a}{b+c-a}}\overset{Lema}{\ge}\sum\frac{2a^{n+1}}{b+c}\overset{Holder}{\ge}\frac{2\left(\sum a\right)^{n+1}}{3^{n-1}\sum(b+c)}=\frac{2\left(\sum a\right)^{n+1}}{3^{n-1}\cdot 2\sum a}=\frac{\left(\sum a\right)^n}{3^{n-1}}=$$

$$=3\left(\frac{\sum a}{3}\right)^n=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema1237.

S610. In ΔABC holds

$$\prod\cos\frac{A}{2}\le\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1+\prod\sin\frac{A}{2}\right).$$

Nguyen Viet Hung, Vietnam,Crux Mathematicorum,November 2022

Soluție

Folosind $\prod \cos\frac{A}{2}=\frac{p}{4R}$ și $\prod \sin\frac{A}{2}=\frac{r}{4R}$ inegalitatea se scrie:

$\frac{p}{4R}\le\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1+\frac{r}{4R}\right)\Leftrightarrow\frac{p}{4R}\le\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{4R+r}{4R}\Leftrightarrow p\sqrt{3}\le 4R+r$,(Doucet).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

In ΔABC holds:

1).

$$\left(1+3\sqrt{3}\right)\frac{r}{4R}\le\prod\sin\frac{A}{2}+\prod\cos\frac{A}{2}\le\left(1+3\sqrt{3}\right)\frac{1}{8}.$$

Soluție

Folosim: $\prod \cos\frac{A}{2}=\frac{p}{4R}$ și $\prod \sin\frac{A}{2}=\frac{r}{4R}$.

2).

$$\left(\prod\sin\frac{A}{2}\right)^n+\left(\prod\cos\frac{A}{2}\right)^n\ge 2\left(\frac{r}{8R}\left(1+3\sqrt{3}\right)\right)^n,\ n\in\mathbf{N}.$$

Marin Chirciu

Problema1238.

If $a,b,c>0$ then

$$\sum\frac{1}{8a^2+bc}\ge\frac{1}{ab+bc+ca}.$$

Sanong Huayrerai, Mathematical Inequalities 1/2026

Soluție

Folosim pqr -Method.

Notăm $p=\sum a, q=\sum ab, r=abc$.

Avem $\sum b^3c^3 = q^3 - 3pqr + 3r^2$.

$$LHS = \sum \frac{1}{8a^2+bc} = \sum \frac{b^2c^2}{8a^2b^2c^2+b^3c^3} \overset{CS}{\geq} \frac{\left(\sum bc\right)^2}{\sum\left(8a^2b^2c^2+b^3c^3\right)} = \frac{q^2}{24r^2+\sum b^3c^3} \overset{(1)}{\geq} \frac{1}{q} = RHS,$$

unde $\frac{q^2}{24r^2+\sum b^3c^3} \overset{(1)}{\geq} \frac{1}{q} \Leftrightarrow q^3 \geq \sum b^3c^3 + 24r^2 \Leftrightarrow q^3 \geq \left(q^3 - 3pqr + 3r^2\right) + 24r^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3pqr \geq 27r^2 \Leftrightarrow pq \geq 9r$, vezi $pq = \sum a \sum ab \overset{AG}{\geq} 3\sqrt[3]{abc} \cdot 3\sqrt[3]{(abc)^2} = 9abc = 9r$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

Remarcă.

If $a,b,c>0$ then:

1).

$$\sum \frac{1}{8a^2+bc} \geq \frac{1}{a^2+b^2+c^2}.$$

2).

$$\sum \frac{1}{8a^2+bc} \geq \frac{3}{(a+b+c)^2}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema1239.

If $a,b>0$, $a+b=2$ then

$$\frac{1}{1-a+2a^2} + \frac{1}{1-b+2b^2} \geq \sqrt{ab}.$$

Crăciun Gheorghe, Mathematical Inequalities 1/2026

Soluție.

$$LHS = \frac{1}{1-a+2a^2} + \frac{1}{1-b+2b^2} \overset{Lema}{\geq} 1 = \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} = RHS.$$

Lema.

If $a,b>0$, $a+b=2$ then

$$\frac{1}{1-a+2a^2}+\frac{1}{1-b+2b^2}\geq 1.$$

Remarcă.

If $a,b>0$, $a+b=2$ and $\lambda\geq 2$ then

$$\frac{1}{1-a+\lambda a^2}+\frac{1}{1-b+\lambda b^2}\geq \frac{2\sqrt{ab}}{\lambda}.$$

Marin Chirciu

Problema1240

Solve for $n\in\mathbf{N}$

$$n^3=n+n!.$$

Math Olympiad Germany

Soluție

$$n^3=n+n!\Leftrightarrow n^3-n=n!\Leftrightarrow n\left(n^2-1\right)=n!\Leftrightarrow n=5.$$

Pentru $n\geq 5\Rightarrow n!\geq n\left(n^2-1\right)$, vezi inducție matematică.

Remarcă.

If $n\in\mathbf{N}, n\geq 5$ then

$$n!\geq n\left(n^2-1\right).$$

Marin Chirciu

Soluție.

Se folosește metoda inducției matematice.

Problema1241.

In ΔABC holds

$$\frac{4R}{r}+1\geq \frac{(a+b+c)^3}{3abc}.$$

Nguyen Viet Hung, Vietnam, Mathematical Inequalities 1/2026

Soluție

$$\frac{4R}{r}+1\ge\frac{(a+b+c)^3}{3abc}\Leftrightarrow\frac{4R}{r}+1\ge\frac{8p^3}{3\cdot 4Rrp}\Leftrightarrow\frac{4R}{r}+1\ge\frac{2p^2}{3Rr}\Leftrightarrow 3R(4R+r)\ge 2p^2,$$

vezi inegalitatea lui Gerretsen: $p^2\le 4R^2+4Rr+3r^2$.

Remarcă.

In ΔABC holds

$$\frac{4R}{r}+1\ge\frac{3(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}.$$

Marin Chirciu

Problema1242.

If $a,b,c>0$, $a+b+c=3$ then

$$\sum\frac{a^2-a+1}{b+1}\ge\frac{3}{2}.$$

Nguyen Van Hoa, Vietnam, Mathematical Inequalities 1/2026

Soluție

$$LHS=\sum\frac{a^2-a+1}{b+1}=\sum\frac{(a-1)^2+a}{b+1}=\sum\frac{(a-1)^2}{b+1}+\sum\frac{a}{b+1}\overset{CS}{\ge}\frac{\left(\sum(a-1)\right)^2}{\sum(b+1)}+\sum\frac{a^2}{ab+a}=$$

$$=\frac{\left(\sum a-3\right)^2}{\sum a+3}+\sum\frac{a^2}{ab+a}\overset{CS}{\ge}\frac{(3-3)^2}{\sum a+3}+\frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum ab+\sum a}\overset{SOS}{\ge}0+\frac{3^2}{\frac{1}{3}\left(\sum a\right)^2+3}=\frac{9}{\frac{1}{3}(3)^2+3}=$$

$$=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarcă.

If $a,b,c>0$, $a+b+c=3$ and $\lambda\ge 1$ then:

1).

$$\sum \frac{a^2-a+\lambda}{b+1} \geq \frac{3\lambda}{2}.$$

If $a,b,c>0$, $a+b+c=3$ and $\lambda \geq 1$, $n \geq 0$ then:

2).

$$\sum \frac{a^2-a+\lambda}{b+n} \geq \frac{3\lambda}{n+1}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema1243.

If $x,y>0$, $x+y=2$ then

$$\sum \sqrt{x^2+3xy} \leq 4.$$

Nguyen Van Hoa, Vietnam, Mathematical Inequalities 1/2026

Soluție

$$LHS=\sum \sqrt{x^2+3xy}=\sum \sqrt{x(x+3y)} \overset{CBS}{\leq} \sqrt{\sum x \sum (x+3y)}=\sqrt{\sum x \cdot 4\sum x}=\sqrt{2\cdot 4\cdot 2}=$$

$$=4=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=1$.

Remarcă.

1). If $x,y>0$, $x+y=2$ and $\lambda \geq 0$ then:

$$\sum \sqrt{x^2+\lambda xy} \leq 2\sqrt{\lambda+1}.$$

2). If $x,y,z>0$, $x+y+z=3$ and $\lambda \geq 0$ then

$$\sum \sqrt{x^2+\lambda xy} \leq 3\sqrt{\lambda+1}.$$

3). If $x_1,x_2,...,x_n>0$, $x_1+x_2+...+x_n=n$ and $\lambda \geq 0$ then

$$\sum \sqrt{x_1^2+\lambda x_1x_2} \leq n\sqrt{\lambda+1}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema1244.

Evaluate

$$\int \frac{x-1}{x+x^2\ln x}dx,\ x>1.$$

Aslam Qureshi, Math 1/2026

Soluție

$$\int \frac{x-1}{x(1+x)\ln x}dx=\int\left(\frac{\ln x+1}{1+x\ln x}-\frac{1}{x}\right)dx=\int\left(\frac{\ln x+1}{1+x\ln x}-\frac{1}{x}\right)dx\overset{1+x\ln x=t}{=}\int\frac{dt}{t}-\ln x=$$

$$=\ln t-\ln x+C=\ln(1+x\ln x)-\ln x+C=\ln\frac{1+x\ln x}{x}+C.$$

Deducem că $\int \frac{x-1}{x+x^2\ln x}dx=\ln\frac{1+x\ln x}{x}+C$.

Remarcă.

Let be $\lambda\geq 0$ fixed. Evaluate

$$\int \frac{x-\lambda}{\lambda x+x^2\ln x}dx,\ x>1.$$

Marin Chirciu

Soluție

Deducem că $\int \frac{x-\lambda}{\lambda x+x^2\ln x}dx=\ln\frac{\lambda+x\ln x}{x}+C$.

Problema1245.

5068. In ΔABC holds

$$\frac{4R}{r}\geq\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}\right)\left(\sqrt{r_a}+\sqrt{r_b}\right)^2.$$

Nguyen Viet Hung, Vietnam,Crux Mathematicorum,

Soluție

Folosind substituțiile lui Ravi $(a,b,c)=(y+z,z+x,x+y)$, $x,y,z>0$ avem $(x,y,z)=(p-a,p-b,p-c)$, $\frac{R}{r}=\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{4xyz}$, $F=\sqrt{xyz(x+y+z)}$,

$r_a=\frac{F}{p-a}=\frac{F}{x}=\frac{\sqrt{xyz(x+y+z)}}{x}$.

$$LHS=\frac{4R}{r}=\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}.$$

$$RHS=\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}\right)\left(\sqrt{r_a}+\sqrt{r_b}\right)^2=\left(\frac{x}{F}+\frac{y}{F}\right)\left(\sqrt{\frac{F}{x}}+\sqrt{\frac{F}{y}}\right)^2=\frac{x+y}{F}\frac{F\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2}{xy}=$$

$$=\frac{(x+y)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2}{xy}.$$

Inegalitatea $\frac{4R}{r}\ge\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}\right)\left(\sqrt{r_a}+\sqrt{r_b}\right)^2$ se scrie:

$$\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}\ge\frac{(x+y)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2}{xy}\Leftrightarrow\frac{(y+z)(z+x)}{z}\ge\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{(y+z)(z+x)}{z}\ge x+y+2\sqrt{xy}\Leftrightarrow(y+z)(z+x)\ge xz+yz+2z\sqrt{xy}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow xy+yz+zx+z^2\ge xz+yz+2z\sqrt{xy}\Leftrightarrow xy+z^2\ge 2z\sqrt{xy}\Leftrightarrow\left(z-\sqrt{xy}\right)^2\ge 0,$$

cu egal pentru $z=\sqrt{xy}$ și $x=y=z\Leftrightarrow a=b=c$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

In ΔABC holds

1).

$$\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}\right)\left(\sqrt{r_a}+\sqrt{r_b}\right)^2\ge 8.$$

Marin Chirciu

Soluție

Notând $\left(\sqrt{r_a}, \sqrt{r_b}\right) = (x, y)$ inegalitatea se scrie $\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right)(x+y)^2 \geq 8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^4 + 2x^3y - 6x^2y^2 + 2xy^3 + y^4 \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2\left(x^2 + 4xy + y^2\right) \geq 0$,

cu egal pentru $x = y \Leftrightarrow \sqrt{r_a} = \sqrt{r_b} \Leftrightarrow a = b$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este isoscel cu $a = b$.

2).

$$\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b}\right)\left(\sqrt{h_a} + \sqrt{h_b}\right)^2 \geq 8.$$

3).

$$\left(\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b}\right)\left(\sqrt{m_a} + \sqrt{m_b}\right)^2 \geq 8.$$

4).

$$\left(\frac{1}{w_a} + \frac{1}{w_b}\right)\left(\sqrt{w_a} + \sqrt{w_b}\right)^2 \geq 8.$$

5).

$$\left(\frac{1}{s_a} + \frac{1}{s_b}\right)\left(\sqrt{s_a} + \sqrt{s_b}\right)^2 \geq 8.$$

Dezvoltari, Marin Chirciu

Problema1246.

If $a, b \geq 1$ then

$$\sum 2a\sqrt{b-1} \leq a^2 + b^2.$$

Panagiotis Danousis, Greece, MathAtelier 1/2026.

Soluție

$$LHS = \sum 2a\sqrt{b-1} \overset{AG}{\leq} \sum ab = 2ab \overset{SOS}{\leq} a^2 + b^2 = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=2$.

Remarcă.

If $a,b\geq 1$ and $n\in\mathbf{N}, n\geq 2$ then

$$\sum 2a\sqrt{b-1}\leq a^n+b^n.$$

Marin Chirciu

Problema1247.

If $a,b,c>0$, $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=3$ then

$$\prod(2a+b+c)\geq 64.$$

Panagiotis Danousis, Greece, Mathematical Inequalities 1/2026

Soluție

$$LHS=\prod(2a+b+c)\overset{AG}{\geq}\prod 2\sqrt{(a+b)(a+c)}=8\prod(a+b)\overset{Lema 8/9}{\geq}8\cdot\frac{8}{9}\sum a\sum ab=$$

$$=\frac{64}{9}\sum a\sum bc\overset{(1)}{\geq}64=RHS,$$

unde $\frac{64}{9}\sum a\sum bc\overset{(1)}{\geq}64 \Leftrightarrow \sum a\sum bc\geq 9$, care rezultă din:

1). $\sum ab\geq 3$, vezi $3=\sum\sqrt{ab}\overset{CBS}{\leq}\sqrt{3\sum ab}\Rightarrow 3\leq\sqrt{3\sum ab}\Rightarrow 9\leq 3\sum ab\Rightarrow\sum ab\geq 3$.

2). $\sum a\geq 3$, vezi $\left(\sum a\right)^2\geq 3\sum ab\geq 3\cdot 3=9\Rightarrow\left(\sum a\right)^2\geq 9\Rightarrow\sum a\geq 3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarcă.

1).If $a,b,c>0$, $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=3$ then

$$\sum(2a+b+c)\geq 12.$$

2).If $a,b,c>0$, $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=3$ and $n\in\mathbf{N}$ then

$\sum(2a+b+c)^n \geq 3\cdot 4^n$.

Dezvoltari, Marin Chirciu

Problema1248.

If $a,b,c>0$, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=a+b+c$ then

$\sum a^2+\frac{9}{4}\geq\frac{21}{4}abc$.

Marin Chirciu, Mathematical Inequalities 1/2026

Soluție

Folosim pqr -Method.

Notăm $p=\sum a, q=\sum ab, r=abc$.

$q=pr \Rightarrow p^2-2q+\frac{9}{4}\geq\frac{21}{4}r \Leftrightarrow p^2-2q+\frac{9}{4}\geq\frac{21}{4}\cdot\frac{q}{p} \Leftrightarrow 4p^3-8pq+9p\geq 21q \Leftrightarrow$

$4p^3+9p\geq q(8p+21)$, care rezultă din $q\leq\frac{p^2}{3}$, vezi $p^2=(a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ca)=3q \Rightarrow$ $p^2\geq 3q$.

Este suficient să arătăm că:

$4p^3+9p\geq\frac{p^2}{3}(8p+21) \Leftrightarrow 4p^3-21p^2+27p\geq 0 \Leftrightarrow p(p-3)(4p-9)\geq 0$, vezi $p\geq 3$,

din $q\geq 3$, adevărat din $q^2\geq 3pr$, $q=pr \Rightarrow q^2\geq 3q \Rightarrow q\geq 3$.

$p^2\geq 3q$, $q\geq 3 \Rightarrow p^2\geq 3\cdot 3=9 \Rightarrow p\geq 3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarcă.

1).If $a,b,c>0$, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=a+b+c$ and $0\leq\lambda\leq 3$ then

$\sum a^2+\lambda\geq(\lambda+3)abc$.

2).If $a,b,c>0$, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=a+b+c$ then

$$\sum a^2+3\ge 6abc.$$

Dezvoltari, Marin Chirciu

Problema1250.

In acute ΔABC holds

$$\sum \frac{AH}{a\cdot r_a}\ge \frac{p}{9r^2}.$$

Sarkhan Adgozalov, Georgia, RMM 1/2026

Soluție

Lema.

In acute ΔABC holds:

1).

$$\sum \frac{AH}{a\cdot r_a}=\frac{p^2-5r^2-8Rr}{2pr^2}.$$

2).

$$\frac{1}{p}\left(\frac{4R}{r}-5\right)\le \sum \frac{AH}{a\cdot r_a}\le \frac{1}{p}\left(\frac{2R^2}{r^2}-5\right).$$

3).

$$\frac{3}{p}\le \sum \frac{AH}{a\cdot h_a}\le \frac{3R}{2pr}.$$

4)

$$\sum \frac{AH}{a\cdot h_a}=\frac{R+r}{pr}.$$

5).

$$\sum \frac{AH}{a\cdot h_a}\le \sum \frac{AH}{a\cdot r_a}.$$

Dezvoltari, Marin Chirciu

Problema1251.

Solve for x

$$x^{\ln x}=\left(\frac{e^3}{x}\right)^4.$$

Sanong Huayrerai, Math 1/2026

Soluție

Se impune condiția: $x>0$.

$$x^{\ln x}=\left(\frac{e^3}{x}\right)^4 \Leftrightarrow x^{\ln x}=\frac{e^{12}}{x^4} \Leftrightarrow x^4x^{\ln x}=e^{12} \Leftrightarrow x^{4+\ln x}=e^{12} \Leftrightarrow \ln x^{4+\ln x}=\ln e^{12} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (4+\ln x)\ln x=12 \overset{\ln x=t}{\Leftrightarrow} (4+t)t=12 \Leftrightarrow t^2+4t-12=0 \Leftrightarrow t\in\{-2,6\} \Leftrightarrow x\in\{e^{-2},e^6\}.$$

Deducem că mulțimea soluțiilor ecuației este $S=\{e^{-2},e^6\}$.

Remarcă.

1).Let be $\lambda>0$ fixed. Solve for x

$$x^{\ln x}=\left(\frac{e^{2\lambda}}{x}\right)^{\lambda}.$$

Soluție

Deducem că mulțimea soluțiilor ecuației este $S=\{e^{-2\lambda},e^{\lambda}\}$.

2).Let be $n>0$ fixed. Solve for x

$$x^{\ln x}=\left(\frac{e^{2n}}{x}\right)^{n}.$$

Soluție

Deducem că mulțimea soluțiilor ecuației este $S=\{e^{-2n},e^{n}\}$.

3).Let be $n>0$ fixed. Solve for x

$$x^{\ln x}=\left(\frac{e^{2n+4}}{x}\right)^{n^2}.$$

Deducem că mulțimea soluțiilor ecuației este $S=\left\{e^{2n},e^{-n^2-2n}\right\}$.

4).Let be $\lambda>0$ fixed. Solve for x

$$x^{\ln x}=\left(\frac{e^{\lambda}}{x}\right)^{\lambda+1}.$$

Dezvoltari, Marin Chirciu

Soluție

Deducem că mulțimea soluțiilor ecuației este $S=\left\{e^{-2},e^{6}\right\}$.

Problema1252.

If $a,b,c>0$, $abc=1$ then

$$\sum\frac{1}{a+4b+4c}\leq\frac{1}{3}.$$

Nguyen Viet Hung, Vietnam, Mathematical Inequalities 1/2026

Soluție

Lema.

If $a,b,c>0$, $abc=1$ then

$$\frac{1}{a+4b+4c}\leq\frac{1}{3(1+a+b)}.$$

Demonstrație.

$$a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}=3\Rightarrow a+4b+4c=(a+b+c)+3b+3c\geq 3+3b+3c=3(1+a+b)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a+4b+4c\geq 3(1+a+b)\Rightarrow\frac{1}{a+4b+4c}\leq\frac{1}{3(1+a+b)}.$$

Cu substituția $(a,b,c)=\left(\frac{x^2}{yz},\frac{y^2}{zx},\frac{z^2}{xy}\right)$ obținem:

$$LHS=\sum\frac{1}{a+4b+4c}\overset{Lema}{\leq}\frac{1}{3}\sum\frac{1}{1+b+c}=\frac{1}{3}\sum\frac{1}{1+\frac{y^2}{zx}+\frac{z^2}{xy}}=\frac{1}{3}\sum\frac{xyz}{xyz+y^3+z^3}\overset{SOS}{\leq}$$

$$\overset{SOS}{\leq}\frac{1}{3}\sum\frac{xyz}{xyz+yz(y+z)}=\frac{1}{3}\sum\frac{x}{x+y+z}=\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{3}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarcă.

1). If $a,b,c>0$, $abc\geq 1$ and $0\leq\lambda\leq\frac{9}{2}$ then

$$\sum\frac{1}{a+\lambda b+\lambda c}\leq\frac{3}{2\lambda+1}.$$

2).If $a,b,c>0$, $abc=1$ then

$$\sum\frac{1}{\sqrt{a+4b+4c}}\leq 1.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema1253.

If $x,y>0, x+y\leq 1$ then

$$\left(1-\frac{1}{x^3}\right)\left(1-\frac{1}{y^3}\right)\geq 49.$$

Nguyen Viet Hung, Vietnam, Mathematical Inequalities 1/2026

Soluție

$$LHS=\left(1-\frac{1}{x^3}\right)\left(1-\frac{1}{y^3}\right)=\frac{(x^3-1)(y^3-1)}{x^3y^3}=\frac{(x-1)(y-1)(x^2+x+1)(y^2+y+1)}{x^3y^3}\overset{CBS}{\geq}$$

$$\overset{CBS}{\geq}\frac{(x-1)(y-1)\left(xy+\sqrt{xy}+1\right)^2}{x^3y^3}\overset{CBS}{\geq}\frac{xy\left(xy+\sqrt{xy}+1\right)^2}{x^3y^3}=\frac{\left(xy+\sqrt{xy}+1\right)^2}{x^2y^2}=$$

$$=\left(\frac{xy+\sqrt{xy}+1}{xy}\right)^2=\left(1+\frac{1}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{xy}\right)^2\overset{xy\leq\frac{1}{4}}{\geq}\left(1+\frac{1}{\frac{1}{2}}+\frac{1}{\frac{1}{4}}\right)^2=(1+2+4)^2=7^2=49=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = \frac{1}{2}$.

Remarcă.

1). If $x, y, a > 0, x + y \le a$ then

$$\left(1 - \frac{a^3}{x^3}\right)\left(1 - \frac{a^3}{y^3}\right) \ge 49.$$

2). If $x, y > 0, x + y \le 2$ then

$$\left(1 - \frac{8}{x^3}\right)\left(1 - \frac{8}{y^3}\right) \ge 49.$$

Dezvoltari, Marin Chirciu

Problema1254.

If $a, b, c > 0$, $\sum a^4 = 3$ then find

$$\min \sum \frac{a^7}{b^5}.$$

Oscar Reynaga Alarcon, Mathematics(College and High School) 1/2026

Soluție

Cu substituția $\left(a^4, b^4, c^4\right) = (x, y, z) \Leftrightarrow (a, b, c) = \left(x^{\frac{1}{4}}, y^{\frac{1}{4}}, z^{\frac{1}{4}}\right)$ problema se reformulează:

If $x, y, z > 0$, $\sum x = 3$ then find

$$\min \sum \frac{x^{\frac{7}{4}}}{y^{\frac{5}{4}}}.$$

Remarcă.

1). If $a, b, c > 0$, $\sum a = 3$ then find

$$\min \sum \frac{a^7}{b^5}.$$

Soluție

$$LHS=\sum\frac{a^7}{b^5}\overset{Yang}{\geq}\frac{\left(\sum a\right)^7}{\left(\sum b\right)^5}=\left(\sum a\right)^2=3^2=9=RHS.$$

Deducem că $\min\sum\frac{a^7}{b^5}=9$ pentru $a=b=c=1$.

Am folosit mai sus:

Inegalitatea lui Yang:(generalized Radon inequality).

If $a_k\geq 0, b_k>0, r\geq 0, s\geq 0, r\geq s+1$ then

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^r}{b_k^s}\geq\frac{\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^r}{\left(\sum_{k=1}^{n}b_k\right)^s}$$, equality occurs $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots\frac{a_n}{b_n}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

2). If $a,b,c>0$, $\sum a=3$ and $n,k\in\mathbf{N}$ then find

$$\min\sum\frac{a^{n+k+1}}{b^n}.$$

Dezvoltari, Marin Chirciu

Problema1255.

If $\begin{cases}a\sqrt{b}+b\sqrt{a}=182\\ a\sqrt{a}+b\sqrt{b}=183\end{cases}$ then find $\frac{9}{5}(a+b)$.

Sanong Huayrerai, Math 1/2026

Soluție

Calculăm $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^3=a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+3\left(a\sqrt{b}+b\sqrt{a}\right)=183+3\cdot 182=729\Rightarrow\sqrt{a}+\sqrt{b}=9$.

$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\sqrt{ab}=a\sqrt{b}+b\sqrt{a}=182\Rightarrow\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\sqrt{ab}=182\Rightarrow 9\sqrt{ab}=182\Rightarrow$

$\Rightarrow\sqrt{ab}=\frac{182}{9}$.

$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2=a+b+2\sqrt{ab}\Rightarrow 9^2=a+b+2\cdot\frac{182}{9}\Rightarrow a+b=81-\frac{364}{9}\Rightarrow a+b=\frac{365}{9}$.

Obținem $\frac{9}{5}(a+b)=\frac{9}{5}\cdot\frac{365}{9}=73$.

Remarcă.

1). Let be $n>0,k>0,n+3k=\lambda^3$ fixed. If $\begin{cases} a\sqrt{b}+b\sqrt{a}=n \\ a\sqrt{a}+b\sqrt{b}=k \end{cases}$ then find $\lambda(a+b)$.

Soluție

Deducem că $\lambda(a+b)=\lambda^3-2n$.

2). Let be $n>0,k>0,n+3k=\lambda^3$ fixed. If $\begin{cases} a\sqrt{b}+b\sqrt{a}=n \\ a\sqrt{a}+b\sqrt{b}=k \end{cases}$ then find $\frac{n^2}{\lambda}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$.

Dezvoltari, Marin Chirciu

Soluție

Deducem că $\frac{n^2}{\lambda}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\lambda^3-2n$.

Problema1256.

If $x,y,z>0$, $xy+yz+zx=1$ then

$$\sum\frac{1}{3x^2+1}\geq\frac{3}{2}.$$

Nguyen Viet Hung, Vietnam, Mathematical Inequalities 1/2026

Soluție

$$\sum\frac{1}{3x^2+1}\geq\frac{3}{2}\Leftrightarrow\sum\frac{3x^2}{3x^2+1}\leq\frac{3}{2}.$$

Avem $\sum\frac{3x^2}{3x^2+1}=\sum\frac{3x^2}{3x^2+xy+yz+zx}=\sum\frac{3x^2}{x(x+y+z)+2x^2+yz}=$

$$=\sum\frac{3x^2}{4}\left(\frac{1}{x(x+y+z)}+\frac{1}{2x^2+yz}\right)=\frac{3}{4}\sum\frac{x}{x+y+z}+\frac{3}{4}\sum\frac{x^2}{2x^2+yz}=\frac{3}{4}\cdot1+\frac{3}{4}\sum\frac{x^2}{2x^2+yz}\overset{(1)}{\leq}\frac{3}{2},$$

unde $\frac{3}{4}\cdot 1+\frac{3}{4}\sum\frac{x^2}{2x^2+yz}\overset{(1)}{\leq}\frac{3}{2}\Leftrightarrow\sum\frac{x^2}{2x^2+yz}\leq\frac{3}{2}\Leftrightarrow\sum\frac{yz}{2x^2+yz}\geq 1$, vezi

$$\sum\frac{yz}{2x^2+yz}=\sum\frac{y^2z^2}{2x^2yz+y^2z^2}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum yz\right)^2}{\sum\left(2x^2yz+y^2z^2\right)}=\frac{\left(\sum yz\right)^2}{\left(\sum yz\right)^2}=1.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Remarcă.

In ΔABC holds

1).

$$\sum\frac{1}{3\tan^2\frac{A}{2}+1}\geq\frac{3}{2}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Lema.

If $x,y,z>0$, $xy+yz+zx=1$ then

$$\sum\frac{1}{3x^2+1}\geq\frac{3}{2}.$$

Să trecem la rezolvarea problemei principale.

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=1$.

Aplicând **Lema** pentru $(x,y,z)=\left(\tan\frac{A}{2},\tan\frac{B}{2},\tan\frac{C}{2}\right)$ obținem: $\sum\frac{1}{3\tan^2\frac{A}{2}+1}\geq\frac{3}{2}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

In acute ΔABC holds

$$\sum \frac{1}{3\cot^2 A+1} \geq \frac{3}{2}.$$

Marin Chirciu

Problema1257.

In ΔABC holds

$$\sum \left(\frac{r_a}{w_b w_c}\right)^2 \geq \left(\frac{3}{p}\right)^2.$$

Sarkhan Adgozalov, Georgia, RMM 1/2026

Soluție

$$LHS = \sum \left(\frac{r_a}{w_b w_c}\right)^2 \overset{AG}{\geq} 3\sqrt[3]{\prod \left(\frac{r_a}{w_b w_c}\right)^2} = \sqrt[3]{\left(\frac{r_a r_b r_c}{w_a w_b w_c}\right)^2 \frac{1}{w_a^2 w_b^2 w_c^2}} \overset{r_a r_b r_c \geq w_a w_b w_c}{\geq} \sqrt[3]{1^2 \frac{1}{w_a^2 w_b^2 w_c^2}} \overset{w_a^2 \leq p(p-a)}{\geq}$$

$$\overset{w_a^2 \leq p(p-a)}{\geq} \frac{3}{\sqrt[3]{\prod p(p-a)}} = \frac{3}{\sqrt[3]{p^4 r^2}} \overset{Mitrinovic}{\geq} \frac{3}{\sqrt[3]{p^4 \cdot \frac{p^2}{27}}} = \frac{3}{\sqrt[3]{\frac{p^6}{27}}} = \frac{3}{\frac{p^2}{3}} = \frac{9}{p^2} = \left(\frac{3}{p}\right)^2 = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

In ΔABC holds

$$\sum \left(\frac{r_a}{w_b w_c}\right)^{2n} \geq 3\left(\frac{3}{p^2}\right)^n, n \in \mathbf{N}.$$

Marin Chirciu

Problema1258.

În ΔABC avem $AD = BD, D \in (AB)$, $AP \perp CD, P \in (CD), AP \cap BC = \{E\}$.

Aflați $\sphericalangle AEC$.

Elton Papanikolla,Math Olymp 1/2026

Soluție

Folosim teorema lui Menelaus pentru ΔAEB și transversala $C-P-D \Rightarrow \frac{CE}{CB}\cdot\frac{DA}{DB}\cdot\frac{PA}{PE}=1 \Rightarrow$ $\frac{CE}{2PA}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{PA}{PE}=1$ $\Rightarrow CE=2PE \Rightarrow$în ΔCPE dreptunghic în P, conform reciprocei unghiului de 30° avem $\sphericalangle ECP=30^\circ \Rightarrow \sphericalangle AEC=60^\circ$

Deducem că $\sphericalangle AEC=60^\circ$.

Problema1259.

J722. In acute ΔABC holds

$$\sum\frac{abc}{b^2+c^2-a^2}\geq a+b+c$$.

Titu Andreescu, USA, Mathematical Reflections Nr.1/2026

Solution.

$$LHS=\sum\frac{abc}{b^2+c^2-a^2}=\frac{abc}{2\left(p^2-(2R+r)^2\right)}\overset{Gerretsen}{\geq}\frac{abc}{2\left(4R^2+4Rr+3r^2-(2R+r)^2\right)}=$$

$$=\frac{4Rrp}{2\cdot 2r^2}=\frac{Rp}{r}\overset{Euler}{\geq}2p=a+b+c=RHS$$.

I used above $$\sum\frac{1}{b^2+c^2-a^2}=\frac{1}{2\left[p^2-(2R+r)^2\right]}$$.

Equality occurs if and only if the triangle is equilateral.

Remark.

In acute ΔABC holds

$$\sum\frac{(abc)^2}{b^2+c^2-a^2}\geq(4F)^2$$.

Marin Chirciu

Problema1260.

In ΔABC holds

$$\prod\left(m_a^2+m_am_b+m_b^2\right)\geq\left(\frac{9r_ar_br_c}{r_a+r_b+r_c}\right)^3$$.

Daniel Sitaru, RMM 1/2026

Soluție

$$LHS=\prod\left(m_a^2+m_am_b+m_b^2\right)\overset{SOS}{\geq}\prod 3m_am_b=27m_a^2m_b^2m_c^2\overset{m_am_bm_c\geq r_ar_br_c}{\geq}27r_a^2r_b^2r_c^2\overset{(1)}{\geq}\left(\frac{9r_ar_br_c}{r_a+r_b+r_c}\right)^3=$$

$$=RHS.$$

Remarcă.

In ΔABC holds

$$\prod\left(w_a^2+w_aw_b+w_b^2\right)\geq\left(\frac{2r}{R}\right)^2\left(\frac{9r_ar_br_c}{r_a+r_b+r_c}\right)^3.$$

Marin Chirciu

Problema1261.

If $a,b,c>\frac{1}{4}$, $a+b+c\leq 3$ then

$$\sum\frac{1}{\log_2(3a+b)}\geq\frac{3}{2}.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam, RMM 1/2026

Soluție

$$LHS=\sum\frac{1}{\log_2(3a+b)}\overset{CS}{\geq}\frac{9}{\sum\log_2(3a+b)}=\frac{9}{\log_2\prod(3a+b)}\overset{AG}{\geq}\frac{9}{\log_2\left(\frac{\sum(3a+b)}{3}\right)^3}=$$

$$=\frac{9}{\log_2\left(\frac{4\sum a}{3}\right)^3}=\frac{9}{\log_2\left(\frac{4\cdot 3}{3}\right)^3}=\frac{9}{\log_2 4^3}=\frac{9}{3\cdot 2}=\frac{3}{2}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarcă.

If $a,b,c>\frac{1}{\lambda+1}$, $a+b+c\leq 3$ and $\lambda>0$ then

$$\sum \frac{1}{\log_2(\lambda a+b)} \geq \frac{3}{\log_2(\lambda+1)}.$$

Marin Chirciu

Problema1272.

If $a,b,c>1$, $a+b+c\leq 6$ then

$$\sum \frac{1}{(\log_2 a+\log_2 b)^2} \geq \frac{3}{4}.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam, RMM 1/2026

Soluție

$$LHS = \sum \frac{1}{(\log_2 a+\log_2 b)^2} = \sum \frac{1^3}{(\log_2 a+\log_2 b)^2} \overset{Radon}{\geq} \frac{\left(\sum 1\right)^3}{\left(\sum(\log_2 a+\log_2 b)\right)^2} =$$

$$= \frac{27}{\left(2\sum \log_2 a\right)^2} = \frac{27}{4(\log_2 abc)^2} \overset{abc\leq 8}{\geq} \frac{27}{4(\log_2 8)^2} = \frac{27}{4(3)^2} = \frac{27}{36} = \frac{3}{4} = RHS.$$

Am folosit mai sus $abc \leq 8$, vezi $abc \overset{AG}{\leq} \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \overset{\sum a\leq 6}{\leq} \left(\frac{6}{3}\right)^3 = 2^3 = 8$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=2$.

Remarcă.

1). If $a,b,c>1$, $a+b+c\leq 6$ then

$$\sum \frac{1}{(\log_2 a+\log_2 b)^3} \geq \frac{3}{8}.$$

2). If $a,b,c>1$, $a+b+c\leq 6$ and $n\in\mathbf{N}$ then

$$\sum \frac{1}{(\log_2 a+\log_2 b)^n} \geq \frac{3}{2^n}.$$

Dezvoltari, Marin Chirciu

Problema1273.

J724. If $a,b,c>0$ then

$$\prod\left(a^3+bc\right)\ge(abc)^2\prod(a+1).$$

Nguyen Viet Hung, Vietnam, Mathematical Reflections Nr.1/2026

Solution.

We have $\left(\frac{a^3}{bc}+1\right)\left(\frac{b^3}{ca}+1\right)\overset{CBS}{\ge}\left(\frac{ab}{c}+1\right)^2$ and analogs $\Rightarrow\prod\left(\frac{a^3}{bc}+1\right)\ge\prod\left(\frac{bc}{a}+1\right)$,(1).

Also $\left(\frac{ab}{c}+1\right)\left(\frac{ac}{b}+1\right)\overset{CBS}{\ge}(a+1)^2$ and analogs $\Rightarrow\prod\left(\frac{bc}{a}+1\right)\ge\prod(a+1)$,(2).

From(1) and(2) $\Rightarrow\prod\left(\frac{a^3}{bc}+1\right)\ge\prod(a+1)\Leftrightarrow\prod\left(a^3+bc\right)\ge(abc)^2\prod(a+1)$.

Equality occurs if and only if $a=b=c$.

Remark.

1). If $a,b,c,d>0$ then

$$\prod\left(a^3+bcd\right)\ge16(abcd)^3.$$

2). If $a,b,c,d>0$ then

$$\prod\left(a^3+bcd\right)\ge abcd\prod(ab+cd).$$

Dezvoltari, Marin Chirciu

Problema1274.

Fie ΔABC dreptunghic cu $A=90^\circ$ și $C=30^\circ$. Considerăm bisectoarea $BT,T\in(AC)$ și înălțimea $AE,E\in(BC)$. Paralela prin C la BT taie AB în F.

Arătați că punctele F,E,T sunt coliniare.

Manual-EDP-2004 Niță – Năstăsescu, Ex-11/193

Soluție

Folosim teorema lui Menelaus și arătăm că $\frac{FA}{FB}\cdot\frac{TC}{TA}\cdot\frac{EB}{EC}=1$.

Din teorema bisectoarei $\Rightarrow \frac{TC}{TA}=\frac{BC}{BA}$,(1).

Din teorema unghiului de $30^\circ \Rightarrow \frac{BC}{BA}=2$,(2).

Din(1) și (2) $\Rightarrow \frac{TC}{TA}=2$.

Notând $AE=h \Rightarrow AC=2h$, $AB=\frac{2h}{\sqrt{3}}$, $BE=\frac{h}{\sqrt{3}}$, $CE=h\sqrt{3} \Rightarrow \frac{EB}{EC}=\frac{1}{3}$.

Din $BT \parallel FC \Rightarrow \frac{AB}{BF}=\frac{AT}{TC}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{FA}{FB}=\frac{3}{2}$.

Din $\frac{FA}{FB}=\frac{3}{2}$, $\frac{TC}{TA}=2$ și $\frac{EB}{EC}=\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{FA}{FB}\cdot\frac{TC}{TA}\cdot\frac{EB}{EC}=1 \overset{Menelaus}{\Rightarrow}$ punctele F,E,T sunt coliniare.

Problema1275.

If $a,b,c>0$ then

$$\prod a^{b+c} \le \left(\frac{3abc}{a+b+c}\right)^{a+b+c}.$$

Panagiotis Danousis, Greece, MathAtelier 1/2026

Soluție

Datorită omogenității putem lua $a+b+c=1$ și inegalitatea devine:

$$\prod a^{1-a} \le 3abc \Leftrightarrow \prod a^{-a} \le 3 \Leftrightarrow \ln\prod a^{-a} \le \ln 3 \Leftrightarrow \sum -a\ln a \le \ln 3.$$

Considerăm funcția $f(x)=-x\ln x$, $x>0$, $f'(x)=-\ln x-1$, $f''(x)=-\frac{1}{x}<0 \Rightarrow f$ este funcție concavă și folosim Tangent Line Method în puntul $x_0=\frac{1}{3}$.

Ecuația tangentei este $y=x(\ln 3-1)+\frac{1}{3} \Rightarrow f(x)=-x\ln x \le x(\ln 3-1)+\frac{1}{3}$.

$$\sum -a\ln a \le \sum\left(a(\ln 3-1)+\frac{1}{3}\right)=(\ln 3-1)\sum a+1=(\ln 3-1)\cdot 1+1=\ln 3.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

Remarcă.

If $a,b,c,d>0$ then

$$\prod a^{b+c+d} \le \left(\frac{4abcd}{a+b+c+d}\right)^{a+b+c+d}.$$

Marin Chirciu

Problema1276.

S726. In ΔABC holds

$$\sum \frac{1}{b+c-a} \ge \sqrt{\frac{3}{2Rr}}.$$

Nguyen Viet Hung, Vietnam, Mathematical Reflections Nr.1/2026

Solution.

$$LHS = \sum \frac{1}{b+c-a} = \frac{1}{2}\sum \frac{1}{p-a} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4R+r}{pr} = \frac{4R+r}{2pr} \overset{(1(}{\ge} \sqrt{\frac{3}{2Rr}} = RHS,$$

where $\frac{4R+r}{2pr} \overset{(1)}{\ge} \sqrt{\frac{3}{2Rr}} \Leftrightarrow \frac{(4R+r)^2}{4p^2r^2} \ge \frac{3}{2Rr} \Leftrightarrow R(4R+r)^2 \ge 6rp^2$, see Gerretsen\`Inequality

$$p^2 \le \frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}.$$

It is enough to show that:

$$R(4R+r)^2 \ge 6r\cdot\frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)} \Leftrightarrow 2R-r \ge 3r \Leftrightarrow R \ge 2r$$,(Euler\`Inequality).

Equality occurs if and only if the triangle is equilateral.

Remark.

In ΔABC holds

$$\sum \frac{1}{(b+c-a)^n} \ge 3(6Rr)^{\frac{-n}{2}}, n\in\mathbf{N}.$$

Marin Chirciu

Solution

For $n=0$ we have equality 3=3.

For $n=1$ see Lemma.

For $n\geq 2$ we use Holder`Inequality.

$$LHS=\sum\frac{1}{(b+c-a)^n}\overset{Holder}{\geq}\frac{\left(\sum\frac{1}{b+c-a}\right)^n}{3^{n-1}}\overset{Lemma}{\geq}\frac{\left(\sqrt{\frac{3}{2Rr}}\right)^n}{3^{n-1}}=3\left(\frac{\sqrt{\frac{3}{2Rr}}}{3}\right)^n=3(6Rr)^{\frac{-n}{2}}=RHS.$$

Problema1277.

In ΔABC holds

$$\sum a^6\tan^2\frac{A}{2}\geq 64r^2F^2.$$

D.M,Bătinețu-Giurgiu, Neculai Stanciu, RMM 11/2020

Soluție.

$$LHS=\sum a^6\tan^2\frac{A}{2}\overset{Cebyshev}{\geq}\frac{1}{3}\sum a^6\sum\tan^2\frac{A}{2}\overset{Holder}{\geq}\frac{1}{3}\frac{\left(\sum a\right)^6}{3^5}\cdot 1=\frac{(2p)^6}{3^6}\overset{(1)}{\geq}64r^2F^2=RHS.$$

Remarcă.

1). In ΔABC holds

$$\sum a^n\tan^2\frac{A}{2}\geq\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^n,\ n\in\mathbf{N}.$$

Soluție.

Pentru $n=0$ avem $\sum\tan^2\frac{A}{2}\geq 1$, vezi mai jos.

Pentru $n=1$ avem $\sum a\tan^2\frac{A}{2}\geq\frac{a+b+c}{3}$, vezi

$$\sum a\tan^2\frac{A}{2}\overset{Cebyshev}{\geq}\frac{1}{3}\sum a\sum\tan^2\frac{A}{2}\geq\frac{1}{3}\cdot\sum a\cdot 1=\frac{a+b+c}{3}.$$

Pentru $n\geq 2$ se folosește inegalitatea lui Holder.

$$LHS=\sum a^n\tan^2\frac{A}{2}\overset{Cebyshev}{\geq}\frac{1}{3}\sum a^n\sum\tan^2\frac{A}{2}\overset{Holder}{\geq}\frac{1}{3}\frac{\left(\sum a\right)^n}{3^{n-1}}\cdot 1=\frac{\left(\sum a\right)^n}{3^n}=\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^n=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

2).In ΔABC holds

$$3R^2\leq\sum a^2\tan^2\frac{A}{2}\leq\frac{3R^3}{2r}.$$

Soluție.

Lema.

In ΔABC holds

$$\sum a^2\tan^2\frac{A}{2}=2\left(8R^2+r^2-p^2\right).$$

3).In ΔABC holds

$$54Rr\leq\sum a^2\cot^2\frac{A}{2}\leq\frac{27R^3}{2r}.$$

Dezvoltari, Marin Chirciu

Soluție.

Lema.

In ΔABC holds

$$\sum a^2\cot^2\frac{A}{2}=2\left[\left(4R+r\right)^2-p^2\right].$$

Problema1278.

In ΔABC holds

$$\sum\csc\frac{A}{2}\left(\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)\geq 4\sqrt{3}.$$

Zaza Mzhavanadze, Georgia, RMM 1/2026

Soluție.

Lema.

In ΔABC holds

$$\csc\frac{A}{2}\left(\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)=\frac{\cot\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}.$$

$$LHS=\sum\csc\frac{A}{2}\left(\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)=\sum\frac{\cot\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}\overset{AG}{\geq}3\sqrt[3]{\prod\frac{\cot\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}}=3\sqrt[3]{\frac{\prod\cot\frac{A}{2}}{\left(\prod\cos\frac{A}{2}\right)^2}}=$$

$$=3\sqrt[3]{\frac{\frac{p}{r}}{\left(\frac{p}{4R}\right)^2}}=3\sqrt[3]{\frac{\frac{p}{r}}{\frac{p^2}{16R^2}}}=3\sqrt[3]{\frac{16R^2}{rp}}\overset{(1)}{\geq}4\sqrt{3}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

In ΔABC holds

$$\sum\sec\frac{A}{2}\left(\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)\geq 4.$$

Marin Chirciu

Remarcă.

In ΔABC holds

$$\sum\csc\frac{A}{2}\left(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)\geq 12\sqrt{3}.$$

Zaza Mzhavanadze, Georgia

Soluție.

Lema.

In ΔABC holds

$$\csc\frac{A}{2}\left(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)=\frac{\cot\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}.$$

$$LHS=\sum\csc\frac{A}{2}\left(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)=\sum\frac{\cot\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}\overset{AG}{\geq}3\sqrt[3]{\prod\frac{\cot\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}}=3\sqrt[3]{\frac{\prod\cot\frac{A}{2}}{\left(\prod\sin\frac{A}{2}\right)^2}}=$$

$$=3\sqrt[3]{\frac{\frac{p}{r}}{\left(\frac{r}{4R}\right)^2}}=3\sqrt[3]{\frac{\frac{p}{r}}{\frac{r^2}{16R^2}}}=3\sqrt[3]{\frac{16R^2p}{r^3}}\overset{(1)}{\geq}12\sqrt{3}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

In ΔABC holds

$$\sum\sec\frac{A}{2}\left(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)\geq 12.$$

Marin Chirciu

Problema1279.

Prove

$$\frac{\sin 80^\circ}{\sin 20^\circ}+\left(\frac{\sin 20^\circ}{\sin 80^\circ}\right)^2=3.$$

Elton Papanikolla,Math Olymp 1/2026

Remarcă.

Avem $\frac{\sin 20^\circ}{\sin 80^\circ}=\frac{2\sin 10^\circ\cos 10^\circ}{\sin 80^\circ}=\frac{2\sin 10^\circ\cos 10^\circ}{\cos 10^\circ}=2\sin 10^\circ$.

Obținem: $\frac{\sin 80^\circ}{\sin 20^\circ}+\left(\frac{\sin 20^\circ}{\sin 80^\circ}\right)^2=\frac{1}{2\sin 10^\circ}+\left(2\sin 10^\circ\right)^2=\frac{1}{2\sin 10^\circ}+4\sin^2 10^\circ=\frac{1+8\sin^3 10^\circ}{2\sin 10^\circ}=$

$$=\frac{1+8\sin^3 10^\circ}{2\sin 10^\circ}=\frac{1+6\sin 10^\circ-2\sin\left(3\cdot\sin 10^\circ\right)}{2\sin 10^\circ}=\frac{1+6\sin 10^\circ-2\sin 30^\circ}{2\sin 10^\circ}=$$

$$=\frac{1+6\sin 10^\circ-2\cdot\frac{1}{2}}{2\sin 10^\circ}=\frac{6\sin 10^\circ}{2\sin 10^\circ}=3.$$

Remarcă.

1).Solve for $x\in\left(0,90^\circ\right)$

$$\frac{\sin 80^\circ}{\sin 20^\circ}+\left(\frac{\sin 20^\circ}{\sin 80^\circ}\right)^2=6\sin x.$$

2)Solve for $x\in\left(0,180^\circ\right)$

$$\frac{\sin 80^\circ}{\sin 20^\circ}+\left(\frac{\sin 20^\circ}{\sin 80^\circ}\right)^2=3\sin x.$$

Dezvoltari, Marin Chirciu

Deducem că $x=90^\circ$ este soluția unică a ecuației.

Problema1280.

If $a,b,c>0$ then

$$1+\sqrt[3]{abc}\le\sqrt[3]{\prod\left(1+a\right)}.$$

Viet Giap Tony, Math Olymp 1/2026

Remarcă.

Lema.

If $a_1,a_2,...,a_n>0$ then

$$\prod\left(1+a_1\right)\ge\left(1+\sqrt[n]{\prod a_1}\right)^n.$$

Huygens Lemma

Folosind inegalitatea lui Huygens pentru $n=2\Rightarrow\left(1+a\right)\left(1+b\right)\ge\left(1+\sqrt{ab}\right)^2$ și

$\left(1+c\right)\left(1+d\right)\ge\left(1+\sqrt{cd}\right)^2\Rightarrow$

$$\Rightarrow (1+a)(1+b)(1+c)(1+d) \ge \left(1+\sqrt{ab}\right)^2\left(1+\sqrt{cd}\right)^2 = \left(\left(1+\sqrt{ab}\right)\left(1+\sqrt{cd}\right)\right)^2 \ge$$

$$\ge \left(1+\sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}}\right)^4 = \left(1+\sqrt[4]{abcd}\right)^4 \Rightarrow (1+a)(1+b)(1+c)(1+d) \ge \left(1+\sqrt[4]{abcd}\right)^4.$$

Punând $d=\sqrt[3]{abc} \Rightarrow (1+a)(1+b)(1+c)\left(1+\sqrt[3]{abc}\right) \ge \left(1+\sqrt[4]{abc\sqrt[3]{abc}}\right)^4 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (1+a)(1+b)(1+c)\left(1+\sqrt[3]{abc}\right) \ge \left(1+\sqrt[3]{abc}\right)^4 \Leftrightarrow (1+a)(1+b)(1+c) \ge \left(1+\sqrt[3]{abc}\right)^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{(1+a)(1+b)(1+c)} \ge 1+\sqrt[3]{abc}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

Remarcă.

If $a,b,c,d>0$ then

$$1+\sqrt[4]{abcd} \le \sqrt[4]{\prod(1+a)}.$$

Marin Chirciu

Problema1281.

Solve for naturals

$$x^2-16x = 4\sqrt{x-9}\sqrt[3]{x+9}.$$

Sakthivel Thirunavukkarasu, RMM 1/2026.

Soluție.

$$RHS = 4\sqrt{x-9}\sqrt[3]{x+9} = \frac{4}{27}\sqrt{9(x-9)}\sqrt[3]{27\cdot 27(x+9)} \overset{AG}{\le} \frac{4}{27}\cdot\frac{9+(x-9)}{2}\cdot\frac{27+27+(x+9)}{3} =$$

$$= \frac{4}{27}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x+63}{3} = \frac{2x(x+63)}{81}.$$

$$x^2-16x = LHS = RHS \le \frac{2x(x+63)}{81} \Rightarrow x^2-16x \le \frac{2x(x+63)}{81} \Leftrightarrow 81\left(x^2-16x\right) \le 2x(x+63)$$

$$\Leftrightarrow x(79x-1422) \le 0 \Leftrightarrow 79x(x-18) \le 0,\ x \ge 16 \Leftrightarrow 16 \le x \le 18,\ x \in \mathbf{N} \Leftrightarrow x=18.$$

Deducem că $x=18$ este soluția unică a ecuației.

Remarcă.

Let be $\lambda \in \mathbf{N}$, fixed, $2\lambda+9=k^3$, $n(\lambda+9)=(\lambda+9)^2-12k$. Solve for naturals

$$x^2-nx=4\sqrt{x-\lambda}\sqrt[3]{x+\lambda}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Deducem că $x=\lambda+9$ este soluția unică a ecuației.

Problema1282

Evaluate

$$\int x^{\frac{x}{\ln x}}dx,\ x\in(1,\infty).$$

Aslam Qureshi, Math 1/2026

Soluție.

Din $x^{\frac{x}{\ln x}}=\left(e^{\ln x}\right)^{\frac{x}{\ln x}}=e^{\ln x\cdot\frac{x}{\ln x}}=e^x \Rightarrow \int x^{\frac{x}{\ln x}}dx=\int e^x dx=e^x+C=x^{\frac{x}{\ln x}}+C$.

Deducem că $\int x^{\frac{x}{\ln x}}dx=x^{\frac{x}{\ln x}}+C$,

Remarcă.

Let be $\lambda>0$ fixed. Evaluate

$$\int x^{\frac{\lambda x}{\ln x}}dx,\ x\in(1,\infty).$$

Marin Chirciu

Soluție.

Din $x^{\frac{\lambda x}{\ln x}}=\left(e^{\ln x}\right)^{\frac{\lambda x}{\ln x}}=e^{\ln x\cdot\frac{\lambda x}{\ln x}}=e^{\lambda x} \Rightarrow \int x^{\frac{\lambda x}{\ln x}}dx=\int e^{\lambda x}dx=\frac{1}{\lambda}e^{\lambda x}+C=\frac{1}{\lambda}x^{\frac{\lambda x}{\ln x}}+C$.

Problema1283.

Solve for reals

$$\sqrt[4]{x-1}+\sqrt[4]{3-x}=x^3-12x+18.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam, RMM 1/2026

Soluție.

Domeniul de definiție este $D=[1,3]$.

Folosind inegalitatea ponderată a mediilor $\frac{a+b}{2}\le\sqrt[4]{\frac{a^4+b^4}{2}}$ pentru $(a,b)=\left(\sqrt[4]{x-1},\sqrt[4]{3-x}\right)$,

obținem: $\frac{\sqrt[4]{x-1}+\sqrt[4]{3-x}}{2}\le\sqrt[4]{\frac{\left(\sqrt[4]{x-1}\right)^4+\left(\sqrt[4]{3-x}\right)^4}{2}}=\sqrt[4]{\frac{x-1+3-x}{2}}=1\Rightarrow\sqrt[4]{x-1}+\sqrt[4]{3-x}\le 2$,(1).

Apoi $x^3-12x+18\ge 2$,(2) $\Leftrightarrow x^3-12x+16\ge 0\Leftrightarrow (x-2)^2(x+4)\ge 0$.

Din (1) și (2) $\Rightarrow LHS=\sqrt[4]{x-1}+\sqrt[4]{3-x}\ge x^3-12x+18=RHS$, cu egal pentru $x=2$.

Deducem că $x=2$ este soluția unică a ecuației.

Remarcă.

Let be $\lambda\ge 0$ fixed. Solve for reals

$\sqrt[4]{x+1-\lambda}+\sqrt[4]{\lambda+1-x}=x^3-3\lambda^2x+2\lambda^3+2$.

Marin Chirciu

Soluție.

Deducem că $x=\lambda$ este soluția unică a ecuației.

Problema1284.

In ΔABC holds

$$\sum\frac{m_a}{\cos^2\frac{A}{2}}\ge 2R\sum\cos\frac{B-C}{2}.$$

Eldeniz Hesenov, Georgia, RMM 1/2026

Soluție.

Lema1.

In ΔABC holds

$$\sum \frac{m_a}{\cos^2 \frac{A}{2}} \geq 12r$$
.

Demonstrație.

Folosim: $m_a \geq \sqrt{p(p-a)}$ și $\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{p(p-a)}{bc}$.

In ΔABC holds:

1).

$$\sum \cos \frac{B-C}{2} \leq 3$$
.

2).

$$12r \leq \sum \frac{m_a}{\cos^2 \frac{A}{2}} \leq \frac{3R^2}{r}$$
.

3).

$$36r \leq \sum \frac{m_a}{\sin^2 \frac{A}{2}} \leq \frac{4\left(R^4 - 7r^4\right)}{r^3}$$
.

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema1285.

Arată că ecuația admite o infinitate de soluții in numere întregi:

$$x^3 + y^3 + z^3 + (x+y+z)^3 = xyz$$
.

Marin Chirciu, Math 1/2026

Soluție.

Ecuația admite mulțimea de soluții: $(x,y,z) = (k,-k,0)$, $k \in \mathbf{Z}$.

Problema1286.

If $n \in \mathbf{N}^*$ then

1).

$$1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+...+n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

2)

$$1\cdot 4+2\cdot 7+3\cdot 10+...+n(3n+1)=n(n+1)^2.$$

3).

$$(1+2)(1+2^2)(1+2^4)....(1+2^{2^n})=2^{2^{n+1}}-1.$$

4).

$$13^n+7^n-2\,\vdots\,6.$$

5).

$$7^{2n}-1\,\vdots\,48.$$

6).

$$9^n-1\,\vdots\,8.$$

7).

$$n^3+5n\,\vdots\,6.$$

8).

$$\sqrt{1}+\sqrt{2}+...+\sqrt{n}>\frac{n(\sqrt{n}+1)}{2}.$$

9).

$$2^n\geq 2n-1.$$

10).

$$3^{n+1}\geq n^4+n^2+1.$$

11).

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}.$$

12).

$$\frac{1}{1\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 15}+\ldots+\frac{1}{(7n-6)(7n+1)}=\frac{n}{7n+1}.$$

13).

$$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}.$$

14).

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}.$$

Manual-IX

Soluție.

Se folosește metoda inducției matematice.

Problem1286.

If $k^3-2k+1=0$ then find

$$\frac{k}{k^5+k^2+2}.$$

Math 10/2025

Soluție.

$$k^3-2k+1=0 \Leftrightarrow k^3+1=2k \Rightarrow$$
$$\frac{k}{k^5+k^2+2}=\frac{k}{k^2\left(k^3+1\right)+2}=\frac{k}{k^2\cdot 2k+2}=\frac{k}{2\left(k^3+1\right)}=\frac{k}{2\cdot 2k}=\frac{1}{4}.$$

Deducem că $\frac{k}{k^5+k^2+2}=\frac{1}{4}$.

Remarcă.

If $k^3-\lambda k+1=0$, $\lambda>0$ then find

$$\frac{k}{k^5+k^2+\lambda}.$$

Marin Chirciu

Deducem că $\dfrac{k}{k^5+k^2+2}=\dfrac{1}{\lambda^2}$.

Problema1287.

In acute ΔABC holds

$$\sum \frac{1}{r_a}\sqrt{\cot A} > \frac{2}{3r}.$$

Vasile Mircea Popa, RMM 1/2026

Soluție.

$$LHS=\sum \frac{1}{r_a}\sqrt{\cot A} \overset{Chebyshev}{\geq} \frac{1}{3}\sum \frac{1}{r_a}\sum \sqrt{\cot A} \overset{Chebyshev}{\geq} \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{r}\cdot 3\sqrt[3]{\prod \sqrt{\cot A}}=$$

$$=\frac{1}{r}\sqrt[6]{\prod \cot A} > \frac{2}{3r}=RHS.$$

Remarcă.

In acute ΔABC holds

$$\sum \frac{1}{h_a}\sqrt{\cot A} \leq \frac{R}{2r^2}\cdot 3^{\frac{-1}{4}}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS=\sum \frac{1}{h_a}\sqrt{\cot A} \overset{Chebyshev}{\leq} \frac{1}{3}\sum \frac{1}{h_a}\sum \sqrt{\cot A} \overset{CBS}{\leq} \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{r}\cdot\sqrt{3\sum \cot A} \leq \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{r}\cdot\sqrt{3\cdot\frac{R^2\sqrt{3}}{4r^2}}=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{R}{2r}\sqrt{3\sqrt{3}}=\frac{R}{6r^2}\sqrt{3\sqrt{3}}=\frac{R}{2r^2}\cdot 3^{\frac{-1}{4}}=RHS.$$

Problema1288.

If $x,y,z>0$ then in ΔABC holds

$$\sum \frac{x}{y+z}\left(\frac{a}{bc}\right)^2 \geq \frac{1}{2R^2}.$$

Mehmet Şahin, Turkey, Math Olymp 1/2026

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{x}{y+z}\left(\frac{a}{bc}\right)^2=\frac{1}{a^2b^2c^2}\sum\frac{x}{y+z}a^4\overset{Tsintsifas}{\geq}\frac{1}{16R^2F^2}\cdot 8F^2=\frac{1}{2R^2}=RHS.$$

Am folosit mai sus inegalitatea lui Tsintsifas $\sum\frac{x}{y+z}a^4\geq 8F^2$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

1). If $x,y,z>0$ then in ΔABC holds

$$\sum\frac{x}{y+z}\left(\frac{a}{bc}\right)\geq\frac{\sqrt{3}}{2R}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{x}{y+z}\left(\frac{a}{bc}\right)=\frac{1}{abc}\sum\frac{x}{y+z}a^2\overset{Tsintsifas}{\geq}\frac{1}{4RF}\cdot 2\sqrt{3}F=\frac{\sqrt{3}}{2R}=RHS.$$

Am folosit mai sus inegalitatea lui Tsintsifas $\sum\frac{x}{y+z}a^2\geq 2\sqrt{3}F$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

2).If $x,y,z>0$ then in ΔABC holds

$$\sum\frac{y+z}{x}\left(\frac{a}{bc}\right)\geq\frac{2\sqrt{3}}{R}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{y+z}{x}\left(\frac{a}{bc}\right)=\frac{1}{abc}\sum\frac{y+z}{x}a^2\overset{Tsintsifas}{\geq}\frac{1}{4RF}\cdot 8\sqrt{3}F=\frac{2\sqrt{3}}{R}=RHS.$$

Am folosit mai sus inegalitatea lui Tsintsifas $\sum\frac{y+z}{x}a^2\geq 8\sqrt{3}F$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema1289.

If $a,b>0$ then

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\le\sqrt[3]{2(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}.$$

Czeh Slovacia Olympiad

Soluție.

Lema.

If $x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2>0$ then

$$(x_1+x_2)(y_1+y_2)(z_1+z_2)\ge\left(\sqrt[3]{x_1y_1z_1}+\sqrt[3]{x_2y_2z_2}\right)^3.$$

$(1+1)(a+b)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)\overset{Huygens}{\ge}\left(\sqrt[3]{1\cdot a\cdot\frac{1}{b}}+\sqrt[3]{1\cdot b\cdot\frac{1}{a}}\right)^3=\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)^3$, cu egal pentru $\frac{1}{1}=\frac{a}{b}=\frac{b}{a}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=1$.

Remarcă.

1). If $a,b>0$ then

$$\sqrt[4]{\frac{a}{b}}+\sqrt[4]{\frac{b}{a}}\le\sqrt[4]{4(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}.$$

Soluție.

Lema.

If $x_1,y_1,z_1,t_1,x_2,y_2,z_2,t_2>0$ then

$$(x_1+x_2)(y_1+y_2)(z_1+z_2)(t_1+t_2)\ge\left(\sqrt[4]{x_1y_1z_1t_1}+\sqrt[4]{x_2y_2z_2t_2}\right)^4.$$

Remarcă.

2). If $a,b>0$ and $n\in\mathbf{N},n\ge2$ then

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}+\sqrt[n]{\frac{b}{a}}\le\sqrt[n]{2^{n-2}(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție

Lema.

If $a_1,a_2,...,a_n,b_1,b_2,...,b_n>0$ then

$$\left(a_1+b_1\right)\left(a_2+b_2\right)...\left(a_n+b_n\right)\geq\left(\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}+\sqrt[n]{b_1b_2...b_n}\right)^n.$$

Problema1290.

If $7^a=11^b=5929$ then find $\frac{ab}{a+b}$.

Math 10/2025

Soluție.

$$7^a=7^2\cdot11^2\Leftrightarrow7^{a-2}=11^2\Leftrightarrow\left(a-2\right)\lg7=2\lg11\Leftrightarrow\frac{\lg7}{\lg11}=\frac{2}{a-2}.$$

$$11^b=7^2\cdot11^2\Leftrightarrow11^{b-2}=7^2\Leftrightarrow\left(b-2\right)\lg11=2\lg7\Leftrightarrow\frac{\lg7}{\lg11}=\frac{b-2}{2}.$$

Rezultă: $\frac{\lg7}{\lg11}=\frac{2}{a-2}=\frac{b-2}{2}\Rightarrow\frac{2}{a-2}=\frac{b-2}{2}=k\Leftrightarrow\frac{2}{a-2}=k$ și $\frac{b-2}{2}=k\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a=\frac{2+2k}{k}$ și $b=2+2k$

Obținem $\frac{ab}{a+b}=\frac{\frac{2+2k}{k}\cdot\left(2+2k\right)}{\frac{2+2k}{k}+\left(2+2k\right)}=\frac{\frac{2+2k}{k}}{\frac{1}{k}+1}=\frac{\frac{2\left(1+k\right)}{k}}{\frac{1+k}{k}}=2$.

Remarcă.

1). Let be $a>1,b>1$ fixed. If $a^x=b^y=\left(ab\right)^2$ then find $\frac{xy}{x+y}$.

Soluție.

Deducem că $\frac{xy}{x+y}=2$.

2). Let be $a>1, b>1$ fixed. If $a^x=b^y=(ab)^3$ then find $\frac{xy}{x+y}$.

Soluție.

Deducem că $\frac{xy}{x+y}=3$.

3).Let be $a>1, b>1$, $\lambda>0$ fixed. If $a^x=b^y=(ab)^\lambda$ then find $\frac{xy}{x+y}$.

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Deducem că $\frac{xy}{x+y}=\lambda$.

Problema1291.

If $x,y,z>0$ then

$$\sum\frac{yz}{2x+y+z}\le\frac{1}{4}(x+y+z).$$

Viorel Vâjâitu, Alexandru Zaharia, GM

Soluție.

Lema.

If $x,y,z>0$ then

$$\frac{yz}{2x+y+z}\le\frac{yz}{4}\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+z}\right).$$

Demonstrație.

$$\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+z}\overset{CS}{\ge}\frac{(1+1)^2}{(x+y)+(x+z)}=\frac{4}{2x+y+x}\Rightarrow\frac{yz}{2x+y+z}\le\frac{yz}{4}\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+z}\right).$$

Să trecem la rezolvarea problemei principale.

$$LHS\sum\frac{yz}{2x+y+z}\overset{Lema}{\le}\sum\frac{yz}{4}\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+z}\right)=\frac{1}{4}\sum\left(\frac{yz}{x+y}+\frac{yz}{x+z}\right)=\frac{1}{4}(x+y+z)=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z$.

Remarcă.

In ΔABC holds:

1).

$$\sum \frac{1}{\frac{2r_b r_c}{r_a} + r_b + r_c} \le \frac{1}{4r}$$.

Soluție.

Lema.

If $x, y, z > 0$, $x + y + z = 1$ then

$$\sum \frac{yz}{2x + y + z} \le \frac{1}{4}$$.

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum \frac{r}{r_a} = 1$.

Folosind **Lema** pentru $(x, y, z) = \left(\frac{r}{r_a}, \frac{r}{r_b}, \frac{r}{r_c} \right)$ obtinem $\sum \frac{1}{\frac{2r_b r_c}{r_a} + r_b + r_c} \le \frac{1}{4r}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

2).

$$\sum \frac{1}{\frac{2h_b h_c}{h_a} + h_b + h_c} \le \frac{1}{4r}$$.

Dezvoltari, Marin Chirciu

Problema1292.

If $a, b, c > 0$, $abc = 1$ then

$$\sum \frac{1}{a + b + 1} \le 1$$.

Nguyen Viet Hung, Vietnam, Mathematical Inequalities1/2026

Remarcă.

If $a,b,c>0$, $ab+bc+ca=3$ then

$$\sum\frac{1}{a+b+1}\le 1.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$\sum\frac{1}{a+b+1}\le 1 \Leftrightarrow \sum(a+b+1)(b+c+1)\le\prod(a+b+1) \Leftrightarrow \sum a\sum ab\ge abc+2\sum a+2.$$

Notăm $p=\sum a, q=\sum ab=3, r=abc$.

Inegalitatea se scrie:

$pq\ge r+2p+2$, $q=3 \Leftrightarrow 3p\ge r+2p+2 \Leftrightarrow p\ge r+2$,(1).

Din $q^2\ge 3pr$, $q=3 \Leftrightarrow 9\ge 3pr \Leftrightarrow 3\ge pr \Leftrightarrow r\le\frac{3}{p}$,(2).

Pentru demonstrarea (1) , știind (2)este suficient să arătăm că:

$p\ge\frac{3}{p}+2 \Leftrightarrow p^2-2p-3\ge 0 \Leftrightarrow (p-3)(p+1)\ge 0 \Leftrightarrow p\ge 3$, vezi

$p^2\ge 3q=3\cdot 3=9 \Rightarrow p\ge 3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarcă.

1). In ΔABC holds

$$\sum\frac{1}{\sqrt{3}\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}\right)+1}\le 1.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema.

If $x,y,z>0$, $xy+yz+zx=3$ then

$$\sum \frac{1}{x+y+1} \le 1.$$

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=1 \Leftrightarrow \sum \sqrt{3}\tan\frac{A}{2}\cdot\sqrt{3}\tan\frac{B}{2}=3$.

Folosind **Lema** pentru $(x,y,z)=\left(\sqrt{3}\tan\frac{A}{2},\sqrt{3}\tan\frac{B}{2},\sqrt{3}\tan\frac{C}{2}\right)$.

$$\sum \frac{1}{\sqrt{3}\tan\frac{A}{2}+\sqrt{3}\tan\frac{B}{2}+1} \le 1 \Leftrightarrow \sum \frac{1}{\sqrt{3}\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}\right)+1} \le 1.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

2).

In acute ΔABC holds

$$\sum \frac{1}{\sqrt{3}\left(\cot A+\cot B\right)+1} \le 1.$$

Marin Chirciu

<u>Problema1293.</u>

In ΔABC holds

$$2 \le 1+\sum \tan^2\frac{A}{2} \le 2\left(\frac{R}{2r}\right)^4.$$

George Apostolopoulos, Greece

<u>Soluție.</u>

<u>Lema.</u>

In ΔABC

$$\sum \tan^2\frac{A}{2}=\frac{(4R+r)^2-2p^2}{p^2}.$$

<u>Remarcă.</u>

In ΔABC holds

1).

$$3-\frac{2r}{R}\le 1+\sum\tan^2\frac{A}{2}\le\frac{R}{r}.$$

Soluție.

Lema.

In ΔABC

$$\sum\tan^2\frac{A}{2}=\frac{(4R+r)^2-2p^2}{p^2}.$$

2).

$$2-\frac{2r}{R}\le\sum\tan^2\frac{A}{2}\le\frac{R}{r}-1.$$

3).

$$\frac{8R}{r}-7\le\sum\cot^2\frac{A}{2}\le\left(\frac{2R}{r}-1\right)^2.$$

Soluție.

Lema.

In ΔABC

$$\sum\cot^2\frac{A}{2}=\frac{p^2-2r^2-8Rr}{r^2}.$$

4).

$$\sum\tan^2\frac{A}{2}\le\frac{R}{18r}\sum\cot^2\frac{A}{2}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema1294.

In ΔABC holds

$$\sum\frac{a}{b+c-a}\ge\frac{3\sum a^2}{\sum ab}.$$

Chris Iliadis, Greece, Mathematical Inequalities 1/2026

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{a}{b+c-a}=\sum\frac{a^2}{ab+ac-a^2}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum\left(ab+ac-a^2\right)}=\frac{\left(\sum a\right)^2}{2\sum ab-\sum a^2}\overset{(1)}{\geq}\frac{3\sum a^2}{\sum ab}=RHS$$,

unde $\frac{\left(\sum a\right)^2}{2\sum ab-\sum a^2}\overset{(1)}{\geq}\frac{3\sum a^2}{\sum ab}\Leftrightarrow\frac{\sum a^2+2\sum ab}{2\sum ab-\sum a^2}\geq\frac{3\sum a^2}{\sum ab}\overset{\sum a^2=x,\sum ab=y}{\Leftrightarrow}\frac{x+2y}{2y-x}\geq\frac{3x}{y}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x^2-5xy+2y^2\geq 0\Leftrightarrow(x-y)(3x-2y)\geq 0$, care rezultă din $x\geq y\Leftrightarrow\sum a^2\geq\sum ab$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

In ΔABC holds:

1).

$$\sum\frac{a}{b+c-a}\geq\frac{9\sum a^2}{\left(\sum a\right)^2}.$$

2).

$$\sum\frac{a}{b+c-a}\geq\frac{\left(\sum a^2\right)\left(\sum a\right)^2}{\left(\sum ab\right)^2}.$$

Problema1295.

If $a,b,c>0$, $\sum ab(a+b)=2\sum a$ then

$$\sum ab\leq 3.$$

Nguyen Viet Hung, Vietnam, Mathematical Inequalities 1/2026

Soluție.

Lema.

If $a,b,c>0$, $\sum ab(a+b)=2\sum a$ then

$\sum a \geq 3abc$.

Demonstrație.

$2\sum a = \sum ab(a+b) \overset{AG}{\geq} 3\sqrt[3]{\prod ab(a+b)} = 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2\prod(a+b)} \overset{Cesaro}{\geq} 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2 \cdot 8abc} =$
$= 3\sqrt[3]{8a^3b^3c^3} = 6abc$.

$\sum ab(a+b) = 2\sum a \Leftrightarrow \sum ab\sum a - 3abc = 2\sum a \Leftrightarrow \sum a\left(\sum ab - 2\right) = 3abc$.

Din $\sum a\left(\sum ab - 2\right) = 3abc$ și $\sum a \geq 3abc \Rightarrow \sum a\left(\sum ab - 2\right) = 3abc \leq \sum a \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum a\left(\sum ab - 2\right) \leq \sum a \Leftrightarrow \left(\sum ab - 2\right) \leq 1 \Leftrightarrow \sum ab \leq 3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = 1$.

Remarcă.

1). If $a,b,c > 0$, $\sum ab(a+b) = 2\sum a$ then

$\sum a \geq 3abc$.

2). If $a,b,c > 0$, $\sum ab(a+b) = 2\sum a$ and $n \in \mathbf{N}$ then

$\sum a^n \geq 3(abc)^n$.

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema1296.

If $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 3$ then fiind

$x^{90} + x^{84} + x^{18} + x^{12} + 1$.

Omar Hamrit, Math 1/2026

Soluție.

$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 3 \Rightarrow x = \cos\frac{\pm\pi}{6} + i\sin\frac{\pm\pi}{6} \Rightarrow x^6 = \cos(\pm\pi) + i(\pm\pi) = \cos(\pm\pi) = -1 \Rightarrow x^6 = -1$.

Obținem $x^{90}+x^{84}+x^{18}+x^{12}+1=\left(x^6\right)^{15}+\left(x^6\right)^{14}+\left(x^6\right)^3+\left(x^6\right)^2+1=$

$=(-1)^{15}+(-1)^{14}+(-1)^3+(-1)^2+1=-1+1-1+1+1=1$.

Deducem că $x^{90}+x^{84}+x^{18}+x^{12}+1=1$.

Remarcă.

If $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=3$ and $n,k\in\mathbf{N}$ then fiind

$x^{12n+6}+x^{12n}+x^{12k+6}+x^{12k}+1$.

Marin Chirciu

Soluție.

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=3 \Rightarrow x=\cos\frac{\pm\pi}{6}+i\sin\frac{\pm\pi}{6} \Rightarrow x^6=\cos(\pm\pi)+i(\pm\pi)=\cos(\pm\pi)=-1 \Rightarrow x^6=-1$.

Obținem $x^{12n+6}+x^{12n}+x^{12k+6}+x^{12k}+1=\left(x^6\right)^{2n+1}+\left(x^6\right)^{2n}+\left(x^6\right)^{2k+1}+\left(x^6\right)^{2k}+1=$

$=(-1)^{2n+1}+(-1)^{2n}+(-1)^{2k+1}+(-1)^{2k}+1=-1+1-1+1+1=1$.

Deducem că $x^{12n+6}+x^{12n}+x^{12k+6}+x^{12k}+1=1$.

Problema1297.

If $a>0$ then

$$\frac{1}{a^2+a+1}+\frac{1}{2a+1}\le\frac{a+1}{a^2+2a}.$$

Crăciun Gheorghe,Math Atelier 1/2026

Soluție.

$$LHS=\frac{1}{a^2+a+1}+\frac{1}{2a+1}\overset{SOS}{\le}\frac{1}{3a}+\frac{1}{2a+1}\overset{(1)}{\le}\frac{a+1}{a^2+2a}=RHS,$$

unde $\frac{1}{3a}+\frac{1}{2a+1}\overset{(1)}{\le}\frac{a+1}{a^2+2a} \Leftrightarrow \frac{5a+1}{3a(2a+1)}\le\frac{a+1}{a^2+2a} \Leftrightarrow \frac{5a+1}{3(2a+1)}\le\frac{a+1}{a+2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (5a+1)(a+2) \le 3(2a+1)(a+1) \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 \ge 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 \ge 0$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = 1$.

Remarcă.

If $a > 0$ then

$$\frac{1}{3a} + \frac{1}{2a+1} \le \frac{a+1}{a^2+2a}.$$

Marin Chirciu

Problema1298.

In ΔABC holds

$$\sum \frac{1-\cos(B-C)}{h_a} = \frac{R-2r}{Rr}.$$

Adil Abdullayev, Azerbaijan, Mathematical Inequalities 1/2026

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{1-\cos(B-C)}{h_a} = \sum \frac{1}{h_a} - \sum \frac{\cos(B-C)}{h_a} = \frac{1}{r} - \frac{2}{R} = \frac{R-2r}{Rr} = RHS,$$

Am folosit mai sus $\sum \frac{1}{h_a} = \frac{1}{r}$ și $\sum \frac{\cos(B-C)}{h_a} = \frac{2}{R}$.

Remarcă.

In ΔABC holds:

1).

$$\sum \frac{1-\cos(B-C)}{h_a} \ge 0.$$

2).

$$\frac{2}{R} \le \sum \frac{\cos(B-C)}{h_a} \le \frac{1}{r}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema1299.

In ΔABC holds

$$\sum\sqrt{\frac{h_a}{r_b}}\le 3$$.

Hoang Le Nhat Thung, Mathematical Inequalities 1/2026

Soluție.

$$LHS=\sum\sqrt{\frac{h_a}{r_b}}=\sum\sqrt{\frac{\frac{2S}{a}}{\frac{S}{p-b}}}=\sum\sqrt{\frac{2(p-b)}{a}}\overset{RaviSubstitution}{=}\sum\sqrt{\frac{2y}{y+z}}\overset{(1)}{\le}3=RHS$$,

unde $\sum\sqrt{\frac{2y}{y+z}}\overset{(1)}{\le}3 \Leftrightarrow \sum\sqrt{\frac{2x}{x+y}}\le 3 \Leftrightarrow \sum\sqrt{2x(y+z)(z+x)}\le 3\sqrt{\prod(y+z)}$

$\Leftrightarrow \left(\sum\sqrt{2x(y+z)(z+x)}\right)^2\le 9\prod(y+z)$, vezi

$$\left(\sum\sqrt{2x(y+z)(z+x)}\right)^2\overset{CBS}{\le}\sum 2x(y+z)\sum(z+x)=4\sum xy\cdot 2\sum x=$$

$$=8\sum xy\sum x\overset{Lema8/9}{\le}9\prod(y+z)$$.

Am folosit mai sus substituțiile lui **Ravi** $(x,y,z)=(p-a,p-b,p-c)$.

Am folosit mai sus **Lema8/9**: $\prod(y+z)\ge\frac{8}{9}\sum xy\sum x$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

In ΔABC holds:

1).

$$\sum\sqrt[4]{\frac{h_a}{r_b}}\le 3$$.

Soluție.

$$LHS=\sum\sqrt[4]{\frac{h_a}{r_b}}\overset{CBS}{\leq}\sqrt{3\sum\sqrt{\frac{h_a}{r_b}}}\overset{Lema}{\leq}\sqrt{3\cdot 3}=3=RHS$$
.

Lema.

In ΔABC holds

$$\sum\sqrt{\frac{h_a}{r_b}}\leq 3$$
.

Remarcă.

If $x,y,z>0$ then

$$\sum\sqrt{\frac{2x}{x+y}}\leq 3$$
.

Vasile Cîrtoaje

Soluție.

$$\sum\sqrt{\frac{2x}{x+y}}\leq 3 \Leftrightarrow \sum\sqrt{2x(y+z)(z+x)}\leq 3\sqrt{\prod(y+z)}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum\sqrt{2x(y+z)(z+x)}\right)^2\leq 9\prod(y+z)$$
, vezi

$$\left(\sum\sqrt{2x(y+z)(z+x)}\right)^2\overset{CBS}{\leq}\sum 2x(y+z)\sum(z+x)=4\sum xy\cdot 2\sum x=$$

$$=8\sum xy\sum x\overset{Lema\,8/9}{\leq}9\prod(y+z)$$
.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z$.

2). If $x,y,z>0$ then

$$\sum\sqrt[4]{\frac{2x}{x+y}}\leq 3$$
.

Soluție.

$$LHS=\sum\sqrt[4]{\frac{2x}{x+y}}\overset{CBS}{\leq}\sqrt{3\sum\sqrt{\frac{2x}{x+y}}}\overset{Lema}{\leq}\sqrt{3\cdot 3}=3=RHS$$
.

Lema.

If $x, y, z > 0$ then

$$\sum \sqrt{\frac{2x}{x+y}} \le 3.$$

3). In ΔABC holds

$$3 \le \sum \sqrt{\frac{r_a}{h_b}} \le \sqrt{1+\frac{4R}{r}}.$$

4). If $x, y, z > 0$ then

$$\sum \sqrt{\frac{x+y}{2x}} \ge 3.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema1300.

Solve for positive integers the equation

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{1992}.$$

IMO TST 1992

Soluție.

Ecuația este simetrică și fie $x \le y$.

Se verifică că o soluție a ecuației este $(x, y)=(498, 498)$.

Pentru orice altă soluție avem $x<498$ și $y>498$.

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{1992} \Leftrightarrow \sqrt{y}=\sqrt{1992}-\sqrt{x} \Rightarrow y=1992+x-4\sqrt{498x}.$$

Deoarece $x, y \in \mathbf{N}^* \Rightarrow 4\sqrt{498x} \in \mathbf{N}^* \Rightarrow 498x$ este pătrat perfect $\Rightarrow 498x=2\cdot 3\cdot 83\cdot x$ este pătrat perfect.

Cel mai mic număr natural x este $2\cdot 3\cdot 83$, adică $x=498$.

Deducem că $(x, y)=(498, 498)$ este soluția unică a ecuației.

Remarcă.

Solve for positive integers the equation

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{2024}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Ecuația este simetrică și fie $x \le y$.

Se verifică că o soluție a ecuației este $(x,y)=(506,506)$.

Pentru orice altă soluție avem $x<506$ și $y>506$.

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{2024} \Leftrightarrow \sqrt{y}=\sqrt{2024}-\sqrt{x} \Rightarrow y=2024+x-4\sqrt{506x}.$$

Deoarece $x,y\in\mathbf{N}^* \Rightarrow 4\sqrt{506x}\in\mathbf{N}^* \Rightarrow 506x$ este pătrat perfect $\Rightarrow 506x=2\cdot 11\cdot 13\cdot x$ este pătrat perfect.

Cel mai mic număr natural x este $x=2\cdot 11\cdot 13$, adică $x=506$

Deducem că $(x,y)=(506,506)$ este soluția unică a ecuației.

Problema1301.

If $a,b,c>0$ then

$$\sum a^4+abc\sum a\ge \frac{2}{27}\left(\sum a\right)^4.$$

Nguyen Minh Tho, Vietnam, Mathematical Inequalities 12/2025

Soluție.

Notăm $p=\sum a, q=\sum ab, r=abc$.

Avem $\sum a^4=p^4-4p^2q+4q^2-2pr$.

Datorită omogenității putem lua $p=1$.

Inegalitatea se scrie:

$1-4q+4q^2-2r+r\ge \frac{2}{27} \Leftrightarrow 108q^2-108q-27r+25\ge 0$, care rezultă din $r\le \frac{1}{27}$, vezi

$1=p=a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}=3\sqrt[3]{r}$.

Este suficient să arătăm că:

$108q^2-108q-27\cdot\frac{1}{27}+25\geq 0 \Leftrightarrow 9q^2-9q+2\geq 0 \Leftrightarrow \left(q-\frac{1}{3}\right)\left(q-\frac{2}{3}\right)\geq 0$, vezi $q\leq\frac{1}{3}$, adevărat din $1=p^2=(a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ca)=3q$.

Avem $q\leq\frac{1}{3}<\frac{2}{3}\Rightarrow\left(q-\frac{1}{3}\right)\leq 0$ și $\left(q-\frac{2}{3}\right)\leq 0 \Rightarrow \left(q-\frac{1}{3}\right)\left(q-\frac{2}{3}\right)\geq 0$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

Remarcă.

1).If $a,b,c>0$ and $2n\geq k\geq 0$ then

$$n\sum a^4+kabc\sum a\geq\frac{n+k}{27}\left(\sum a\right)^4.$$

2).If $a,b,c>0$ and $\lambda\geq\frac{1}{2}$ then

$$\lambda\sum a^4+abc\sum a\geq\frac{\lambda+1}{27}\left(\sum a\right)^4.$$

3).If $a,b,c>0$ then

$$\frac{1}{2}\sum a^4+abc\sum a\geq\frac{1}{18}\left(\sum a\right)^4.$$

4).If $a,b,c>0$ then

$$\sum a^4+2abc\sum a\geq\frac{1}{9}\left(\sum a\right)^4.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema1302.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=1$ then

$15\sum xy-27xyz\le 4$.

Marcel Chiriță, București, Mathematical Inequalities 12/2025

Soluție.

Notăm $p=\sum x=1, q=\sum xy, r=xyz$.

Inegalitatea se scrie:

$15q-27r\le 4$, care rezultă din inegalitatea lui Schur $p^3-4pq+9r\ge 0$, $p=1 \Leftrightarrow r\ge \frac{4q-1}{9}$.

Este suficient să arătăm că:

$15q-27\cdot\frac{4q-1}{9}\le 4 \Leftrightarrow 3q\le 1$, vezi $1=(x+y+z)^2\overset{SOS}{\ge} 3(xy+yz+zx)=3q$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Remarcă.

1). If $x,y,z>0$, $x+y+z=1$ and $9n\ge 4k>0$ then

$n\sum xy-kxyz\le \frac{9n-k}{27}$.

2).If $x,y,z>0$, $x+y+z=1$ and $\lambda\ge\frac{4}{9}$ then

$\lambda\sum xy-xyz\le\frac{9\lambda-1}{27}$.

3).If $x,y,z>0$, $x+y+z=1$ then

$4\sum xy-9xyz\le 1$.

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema1303.

Evaluate

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{6dx}{\sin x + \sin 2x}.$$

Mohammed Ali Aziz, Math 12/2025

Soluție.

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{6dx}{\sin x + \sin 2x} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{6dx}{\sin x + 2\sin x \cos x} == \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{6dx}{\sin x(1+2\cos x)} \underset{-\sin x dx = dt}{\overset{cox=t}{=}} \int_{\frac{1}{2}}^{0} \frac{6(-dt)}{\sin^2 x(1+2\cos x)} =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{6dt}{(1-t^2)(1+2t)} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{6dt}{(1-t)(1+t)(1+2t)} = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{1-t} - \frac{3}{1+t} + \frac{8}{1+2t} \right) dt =$$

$$= -\ln|1-t| - 3\ln|1+t| + 4\ln|1+2t| \Big|_0^{\frac{1}{2}} = -\ln\frac{1}{2} - 3\ln\frac{3}{2} + 4\ln 2 = 8\ln 2 - 3\ln 3 = \ln\frac{256}{27}.$$

Deducem că $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{6dx}{\sin x + \sin 2x} = \ln\frac{256}{27}$.

Remarcă.

Evaluate

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin x + \sin 3x}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{6dx}{\sin x + \sin 3x} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin x + \sin x(3-4\sin^2 x)} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin x(1+3-4\sin^2 x)} =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{4\sin x(1-\sin^2 x)} \underset{-\sin x dx = dt}{\overset{cox=t}{=}} \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{(-dt)}{4\sin^2 x(1-\sin^2 x)} = \frac{1}{4}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dt}{t^2(1-t^2)} = \frac{1}{4}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{1-t^2} \right) =$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{-1}{t}+\arcsin t\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{4}\left(\frac{-1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\frac{1}{2}}-\arcsin\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\left(2-\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(2-\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{6}\right).$$

Deducem că $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\sin x+\sin 3x}=\frac{1}{4}\left(2-\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{6}\right)$.

Problema1304.

VII.623. a).Determinați $x\in\mathbf{N}$ pentru care

$\sqrt{x\left(x+n^2\right)}\le x+n$, $\forall x\ge 0$.

b).Rezolvați în **R** inecuația:

$\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+4x}\le 2x+3$.

Ionel Tudor, Călugăreni, RMT-4/2025

Soluție.

a). $\sqrt{x\left(x+n^2\right)}\le x+n \Leftrightarrow x\left(x+n^2\right)\le\left(x+n\right)^2 \Leftrightarrow n\left(1-x\right)\ge -nx \Leftrightarrow n\in\{0,1,2\}$.

b). Inecuația are sens pentru $x\ge 0$.

Folosind a)$\Rightarrow \sqrt{x\left(x+1^2\right)}+\sqrt{x\left(x+2^2\right)}\le\left(x+1\right)+\left(x+2\right) \Leftrightarrow x\ge 0$.

Deducem că $x\in[0,\infty)$ este soluția inecuației.

Problema1305.

JP.375. If $a,b,c>0$, $a+b+c=3$ then

$9\sum a^2-2\sum a^3\ge 21$.

George Apostolopoulos, Greece , RMM-12/2020

Soluție.

Folosim pqr -Method.

Notăm $p=\sum a=3, q=\sum ab\le 3, r=abc\le 1$.

Avem $\sum a^2=p^2-2q=9-2q$, $\sum a^3=p^3-3pq+3r=27-9q+3r$.

Inegalitatea se scrie $9(9-2q)-2(27-9q+3r)\ge 21 \Leftrightarrow r\le 1$, vezi $3=a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}=3\sqrt[3]{r}$ $\Rightarrow r\le 1$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarcă.

1). If $a,b,c>0$, $a+b+c=3$ and $2n\ge 9k\ge 0$ then

$$n\sum a^2-k\sum a^3\ge 3(n-k).$$

2). If $a,b,c>0$, $a+b+c=3$ and $\lambda\ge\frac{9}{2}$ then

$$\lambda\sum a^2-\sum a^3\ge 3(\lambda-1).$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema1306.

VIII.621. a).If $x\in\mathbf{N}^*$ și $k\in\mathbf{N}$ then $\frac{x+2k}{3k+1}\ge\frac{4k+2}{x+6k+1}$.

b).Solve the equation

$$\frac{x}{2}+\frac{x+2}{8}+\frac{x+4}{14}+\ldots+\frac{x+200}{602}=\frac{1}{x+2}+\frac{3}{x+7}+\frac{5}{x+13}+\ldots+\frac{201}{x+601}.$$

Ion Neață, Slatina, Olt, RMT-4/2025

Soluție.

a). $\frac{x+2k}{3k+1}\ge\frac{4k+2}{x+6k+1}\Leftrightarrow (x+2k)(x+6k+1)\ge(3k+1)(4k+2)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+(8k+1)x-8k-2\ge 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+8k+2)\ge 0$, vezi $x\in\mathbf{N}^*$ și $k\in\mathbf{N}$, cu egal pentru $x=1$.

b).Folosind a) $\Rightarrow \frac{x+2k}{3k+1} \geq \frac{4k+2}{x+6k+1} \Leftrightarrow \frac{x+2k}{4k+2} \geq \frac{3k+1}{x+6k+1}$, $k=0,1,,...,100$,

care prin sumare $\Rightarrow \frac{x}{2}+\frac{x+2}{8}+\frac{x+4}{14}+...+\frac{x+200}{602} \geq \frac{1}{x+2}+\frac{3}{x+7}+\frac{5}{x+13}+...+\frac{201}{x+601}$,

cu egal pentru $x=1$.

Deducem că $x=1$ este soluția unică a euației.

Problema1307.

X.622. In ΔABC holds

$$\sum \frac{a^2+(b-c)^2}{a^2-(b-c)^2} \geq 3$$.

D. M.Bătinețu-Giurgiu, București, RMT-4/2025

Soluție.

$$LHS=\sum \frac{a^2+(b-c)^2}{a^2-(b-c)^2} \overset{CS}{\geq} \frac{\left(\sum a\right)^2+\left(\sum (b-c)\right)^2}{\sum\left(a^2-(b-c)^2\right)}=\frac{\left(\sum a\right)^2+0^2}{\sum\left(a^2-b^2-c^2+2bc\right)}=$$

$$=\frac{\sum a^2+2\sum bc}{2\sum bc-\sum a^2} \overset{(1)}{\geq} 3=RHS$$.

Remarcă.

If $\lambda \geq 0$ then in ΔABC holds

$$\sum \frac{a^2+\lambda(b-c)^2}{a^2-(b-c)^2} \geq 3$$.

Marin Chirciu

Problema1308.

Calculează

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{(2n+2)^2}+\ldots+\frac{1}{(2n+n)^2}\right).$$

Sursa : Carmen Necula Pasoi, Math 12/2025

Soluție

$$n\left(\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{(2n+2)^2}+\ldots+\frac{1}{(2n+n)^2}\right)=n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2n+k)^2}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{(2n+k)^2}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(2+\frac{k}{n}\right)^2}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(2+\frac{k}{n}\right)^2}=\int_0^1\frac{1}{(2+x)^2}dx=\int_0^1(2+x)^{-2}dx=\frac{(2+x)^{-2+1}}{-2+1}\Bigg|_0^1=\frac{-1}{x+2}\Bigg|_0^1=\frac{-1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}.$$

Deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} n\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(2n+k)^2}=\frac{1}{6}$.

Remarcă.

Let be $\lambda>0$. Evaluate:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{(\lambda n+1)^2}+\frac{1}{(\lambda n+2)^2}+\ldots+\frac{1}{(\lambda n+n)^2}\right).$$

Marin Chirciu

Soluție

$$n\left(\frac{1}{(\lambda n+1)^2}+\frac{1}{(\lambda n+2)^2}+\ldots+\frac{1}{(\lambda n+n)^2}\right)=n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(\lambda n+k)^2}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{(\lambda n+k)^2}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(\lambda+\frac{k}{n}\right)^2}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(\lambda+\frac{k}{n}\right)^2}=\int_0^1\frac{1}{(\lambda+x)^2}dx=\int_0^1(\lambda+x)^{-2}dx=\frac{(\lambda+x)^{-2+1}}{-2+1}\Bigg|_0^1=\frac{-1}{x+\lambda}\Bigg|_0^1=\frac{-1}{\lambda+1}+\frac{1}{\lambda}=$$

$$=\frac{1}{\lambda(\lambda+1)}.$$

Deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} n\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(\lambda n+k)^2}=\frac{1}{\lambda(\lambda+1)}$.

Problema1309.

321. In ΔABC hods:

$$\prod\left(\frac{\sin^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}}+2\right)\geq 36.$$

D.M.Bătinețu-Giurgiu, Daniel Sitaru, RMM-12/2025

Soluție

Lema

If $a,b,c,t\geq 0$

$$\prod\left(a^2+t\right)\geq\frac{3}{4}(a+b+c)^2t^2.$$

Hojoo Lee Inequality

$$LHS=\prod\left(\frac{\sin^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}}+2\right)\overset{HojooLee}{\geq}\frac{3}{4}\cdot 4\left(\sum\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}\right)^2=3(2)^2=12=RHS.$$

Remarcă.

1). If $\lambda>0$ then in ΔABC hods:

$$\prod\left(\frac{\sin^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}}+\lambda\right)\geq 3\lambda^2.$$

2).If $\lambda>0$ then in ΔABC hods:

$$\prod\left(\frac{\cos^2\frac{A}{2}}{\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}}+\lambda\right)\geq 81\lambda^2.$$

3).In ΔABC hods:

$$\sum\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}\geq 6\sqrt{3}\sum\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție

Folosim $\sum\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=2$ și $\sum\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}=\frac{2p}{r}$.

Problema1310.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=3$ then

$$\sum x^3y+9\geq 4\sum xy.$$

Turkey JBMO TST 2017

Soluție.

$$LHS=\sum x^3y+9=\sum\frac{x^3y^3}{y^2}+9\overset{Radon}{\geq}\frac{\left(\sum xy\right)^3}{\left(\sum y\right)^2}=\frac{q^3}{3^2}+9\overset{(1)}{\geq}4q=RHS,$$

unde $\frac{q^3}{3^2}+9\overset{(1)}{\geq}4q \Leftrightarrow q^3-36q+81\geq 0 \Leftrightarrow (q-3)\left(q^2+3q-27\right)\geq 0$, vezi $q\leq 3$,

$$q=xy+yz+zx\leq\frac{1}{3}(x+y+z)^2=\frac{1}{3}\cdot 3^2=3.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1$.

Remarcă.

1).If $x,y,z>0$, $x+y+z=3$ and $\lambda\geq 3$ then

$$\sum x^3y+3(\lambda-1)\geq\lambda\sum xy.$$

2). If $x,y,z>0$, $x+y+z=3$ then

$$\sum x^3y+6\geq 3\sum xy.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS=\sum x^3y+6=\sum\frac{x^3y^3}{y^2}+6\overset{Radon}{\geq}\frac{\left(\sum xy\right)^3}{\left(\sum y\right)^2}=\frac{q^3}{3^2}+6\overset{(1)}{\geq}3q=RHS,$$

unde $\frac{q^3}{3^2}+6\overset{(1)}{\geq}3q\Leftrightarrow q^3-27q+54\geq0\Leftrightarrow(q-3)^2(q+6)\geq0$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1$.

Problema1311.

J.3092. If $m\geq0,a,b,c,x,y,z>0,abc=1$ then

$$\sum\frac{1}{a^{2m+1}(bx+cy)^m}\geq\frac{3}{(x+y)^m}.$$

D. M. Bătinețu-Giurgiu,Mihaly Bencze, RMM-47/2025

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{1}{a^{2m+1}(bx+cy)^m}=\sum\frac{\frac{1}{a^{2m+1}}}{(bx+cy)^m}=\sum\frac{\left(\frac{1}{a}\right)^{m+1}}{a^m(bx+cy)^m}=\sum\frac{\left(\frac{1}{a}\right)^{m+1}}{(abx+acy)^m}\overset{Radon}{\geq}$$

$$=\frac{\left(\sum\frac{1}{a}\right)^{m+1}}{\left(\sum(abx+acy)\right)^m}=\frac{\left(\frac{\sum ab}{abc}\right)^{m+1}}{\left((x+y)\sum ab\right)^m}=\frac{\left(\sum ab\right)^{m+1}}{\left((x+y)\sum ab\right)^m}=\frac{\sum ab}{(x+y)^m}\overset{AG}{\geq}\frac{3\sqrt[3]{(abc)^2}}{(x+y)^m}=$$

$$=\frac{3}{(x+y)^m}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Problema1312.

Să se arate că pentru orice $n\in\mathbf{N}^*$ numărul

$$N=\left(20^{2n}-13^{2n}\right)\left(13^{2^n}+13^{2^{n-1}}+1\right)$$

Este divizibil prin2013.

Benedict G. Niculescu, București, GM 1/2013, 26711

Soluție.

$2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$.

$\left(20^{2n} - 13^{2n}\right)$ se divide cu 33.

$\left(13^{2^n} + 13^{2^{n-1}} + 1\right)$ se divide cu 61, inducție matematică.

Problema1313.

Solve for reals

$$x\left(3+\sqrt{5}\right)^{\lg x} + 20 = 10\left(5+\sqrt{5}\right)^{\lg x}.$$

Gabriela Boeriu, OL-Brașov-2014

Soluție.

Domeniul de definiție este $D = (0, \infty)$.

Folosind $x = 10^{\lg x}$ ecuația se scrie:

$$10^{\lg x}\left(3+\sqrt{5}\right)^{\lg x} + 20 = 10\left(5+\sqrt{5}\right)^{\lg x} \Leftrightarrow \left(30+10\sqrt{5}\right)^{\lg x} + 20 = 10\left(5+\sqrt{5}\right)^{\lg x}.$$

Cu substituția $t = \left(5+\sqrt{5}\right)^{\lg x}$ ecuația devine:

$$t^2 + 20 = 10t \Leftrightarrow t^2 - 10t + 20 = 0 \Leftrightarrow t_{1,2} = 5 \pm \sqrt{5} \Leftrightarrow \left(5+\sqrt{5}\right)^{\lg x} = 5 \pm \sqrt{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lg x = \log_{5+\sqrt{5}}\left(5 \pm \sqrt{5}\right) \Leftrightarrow x = 10^{\log_{5+\sqrt{5}}\left(5\pm\sqrt{5}\right)}.$$

Remarcă.

Let be $a > 0, b \geq 4, 10a = b + 25$. Solve for reals

$$x\left(a+\sqrt{b}\right)^{\lg x} + 4b = 2b\left(5+\sqrt{b}\right)^{\lg x}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Domeniul de definiție este $D=(0,\infty)$.

Folosind $x=10^{\lg x}$ ecuația se scrie:

$$10^{\lg x}\left(a+\sqrt{b}\right)^{\lg x}+4b=2b\left(5+\sqrt{b}\right)^{\lg x} \Leftrightarrow \left(10a+10\sqrt{b}\right)^{\lg x}+4b=2b\left(5+\sqrt{b}\right)^{\lg x}.$$

Cu substituția $t=\left(5+\sqrt{b}\right)^{\lg x}$ ecuația devine:

$$t^2+4b=2bt \Leftrightarrow t^2-2bt+4b=0 \Leftrightarrow t_{1,2}=b\pm\sqrt{b^2-4b}$$

$$\Leftrightarrow \left(5+\sqrt{b}\right)^{\lg x}=b\pm\sqrt{b^2-4b} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lg x=\log_{5+\sqrt{b}}\left(b\pm\sqrt{b^2-4b}\right) \Leftrightarrow x=10^{\log_{5+\sqrt{b}}\left(b\pm\sqrt{b^2-4b}\right)}.$$

Problema1314.

Determinați primitivele funcției

$f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^{\ln x-1}\cdot\ln^3 x$.

Cristina Homentcovschi, Constanța

Soluție.

Cu schimbarea de variabilă $x=e^t$ obținem:

$$I=\int x^{\ln x-1}\cdot\ln^3 x dx=\int\left(e^t\right)^{\ln e^t-1}\cdot\ln^3 e^t\cdot e^t dt=\int\left(e^t\right)^{t-1}\cdot t^3 e^t dt=\int e^{t^2}\cdot t^3 dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(e^{t^2}\right)'\cdot t^2 dt\overset{parti}{=}\frac{1}{2}\left(e^{t^2}\cdot t^2-\int e^{t^2}\cdot 2t dt\right)=\frac{1}{2}e^{t^2}\cdot t^2-\int e^{t^2}\cdot t dt=\frac{1}{2}e^{t^2}\cdot t^2-\frac{1}{2}\int\left(e^{t^2}\right)' dt=$$

$$=\frac{1}{2}e^{t^2}\cdot t^2-\frac{1}{2}e^{t^2}=\frac{1}{2}e^{t^2}\left(t^2-1\right)+C.$$

Deducem $I=\int x^{\ln x-1}\cdot\ln^3 x dx=\frac{1}{2}e^{\ln^2 x}\left(\ln^2 x-1\right)+C$.

Bibliografie:

1. C.Năstăsescu, C.Niță, M.Brandiburu, D. Joița , Exerciții de algebră, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1992.

2. O. Bottema, R. Z. Djordjević, R. R. Janić, D. S. Mitrinović și P. M. Vasić, „Geometric Inequalities", Groningen 1969, Olanda .

3. Marin Chirciu, Inegalități trigonometrice, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2016.

4. Marin Chirciu, Inegalități cu linii importante în triunghi ,de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2018.

5. Marin Chirciu, Inegalități cu laturi și cu raze în triunghi, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2017.

6. George Apostolopoulos, Greece , Mathematical Inequalites 1/2025.

7. Konstantinos Geronikolas, Greece, Mathematical Inequalities 2/2026.

8. Tapas Das, India, RMM 1/2026.

9. Nguyen Van Hoa, Vietnam, Mathematical Inequalities 2/2026.

10. Crăciun Gheorghe, Ploiești, Mathematical Inequalities 2/2026.

11. Niculae Cavachi, Constanța, OL-Constanța-2014.

12. Cătălin Zîrnă, Constanța, OL-Constanța-2014.

13. Rareș-Andrei Cotoi, Cluj-Napoca, OL-Cluj-2026.

13. Nguyen Hung Cuong, Vietnam, RMM 2/2026.

14. Adil Abdullayev, Azerbaijan, RMM 11/2019.

15. Panagiotis Danousis, Greece, Math Atelier 2/2026.

16.Zaza Mzhavanadze, Georgia, RMM 1/2026

16. Dorin Marghidanu, Corabia, Olt, Mathematical Inequalities 1/2026.

17. D.M. Bătinețu-Giurgiu, București, RMM 47/2025.

18. Claudia Nănuți, România, RMM 47/2025.

20.Titu Zvonaru, Sclipirea Minții Nr.36/2025, Q117.

19. Mihaly Bencze, Brașov, RMM 47/2025.

21. Neculai Stanciu,Buzău , GM-12/2013 , E:14587.

20. Iuliana Trașcă, Olt , GM-12/2013, E:14587.

21. Titu Andreescu,USA, Mathematical Reflections 5/2025.

25. Kunihiko Chikaya, Japan, Mathematical Inequalities 1/2026.

22. Nguyen Ngoc Phuc, Vietnam, Mathematical Inequalities 1/2026.

23. Sanong Huayrerai,Math 2/2026.

24. Nguyen Viet Hung, Vietnam, Mathematical Inequalities 2/2026.

25. Daniel Sitaru, Romania, RMM 1/2026.

26. Elton Papanikolla,MathOlymp, 1/2026.

27. Mehmet Şahin, Turkey, RMM 1/2026.

28. Nguyen Minh Tho, Vietnam, Mathematical Inequalites 12/2025.

38. Marcel Chiriță, București, Mathematical Inequalities 12/2025.

39. D. M.Bătinețu-Giurgiu, București, RMT-4/2025.

40. Ion Neață, Slatina, Olt, RMT-4/2025.

41.Amir Sofi, Kosovo. Mathematics(College and High School) 2/2026.

42.George Tsintsifas, Greece, Crux Mathematicorum 11/1986.

43. Mircea Fianu, București, Concursul"Panaitopol", Tulcea-2013.

44. Mohammed Ali Aziz, Math 12/2025.

45. Ilie Dinulescu, Pitești, Concursul"Dan Barbilian"-2001-Pitești.

46. Costel Fodor, Mathematical Inequalities 2/2026.

47. Thailand-2019.

48. Sakthivel Thirunavukkarasu, RMM 1/2026.

49. Aslam Qureshi, Math 1/2026.

50. Chew-Seong Cheong, Math 2/2026.

51. Moscow Math Olympiad.

52. Concursul "Laurențiu Duican", Brașov,5-7 mai 1994.

53. Bogdan Fuștei, RMM 12/2019.

54. Traian Preda, București, GM-9/2013.

55. Gheorghe Râmbu, OL-2014-Maramureș.

56. Marius Farkaș, OL-2014-Iași.

57. Sarkhan Adgozalov, Georgia, RMM 2/2026

58.Cătălin Cristea, Craiova, RMT 3/2025.

59. Aurel Doboșan, Lugoj, GM-11/2013, E:14574.

60. Arkady Alt, USA, MathOlymp 2/2026.

61. Cristina Homentcovschi, Constanța.

62. Kledis Ahmetaj, Mathematics(College and High School)2/2026.

63. Do Thanh Tung, Vietnam, Mathematical Inequalities, 1/2026.

64.Elton Papanikolla, Greece,Math Olymp 2/2026.

65.Vasile Mircea Popa,RMM 1/2026.

66.Shirvan Tahirov, Mathematical Inequalities 10/2025.

67. Al. Gabriel Mârșanu, Iași, GM 12/2013.

68. Mihai Vijdeluc, Baia Mare, RMT-4/2025.

69. Gheorghe Iacob, Pașcani, RMT-4/2025.

70. Gabriela Munteanu, Iași, RMT-4/2025.

71. Aurel Doboșan, Lugoj, RMT-4/2025.

72. Kostas Geronikolas,Greece, Mathematical Inequalities 1/2021.

73. Flaviu Cristian Verde, RMM1/2026.

74. Nguyen Son Ha, Vietnam, Problems-Book-2nd Edition .

75. Titu Andreesu ,USA, Mathematical ReflectionsNr.1/2026.

76. Gabriel Dospinescu,Problems-Book-2nd Edition .

77.Dan Nănuți,Romania,RMM9/2025.

78. Zaza Mzhavanadze, Georgia, RMM 1/2026.

79.Bahadur Heydarov, Math 2/2026.

80. George-Florin Șerban, Brăila, SGM12/2013.

81. Kaltrin Surdulli, Pure Inequalities 2/2026.

82. Nguyen Viet Hung, Vietnam,Crux Mathematicorum,November 2022.

83.Hoang Le Nhat Thung, Vietnam, RMM 1/2026.

84. Neculai Stanciu, RMM 11/2020.

85. Viet Giap Tony, Math Olymp 1/2026.

86.Oscar Reynaga Alarcon, Mathematics(College and High School)1/2026.

87. Eugen Predoiu, Călărași, GM-10/2013.

88. Dorinel Anca, Mathematical Inequalities 2/2026.

89. Ionel Tudor, Călugăreni, RMT-4/2025.

90. Eldeniz Hesenov, Georgia, RMM 1/2026.

91. Sursă:Marin Ionescu Mathematical Inequalities 2/2026.

92.Traian Tămâian, Carei, SGM-5/2016, S:L.16.167.

94. Tournament Of the Towns 1998.

95. Manual Burtea, Math 2/2026.

96. 2014 JBMO.

97. Turkey 2015 JBMO.

98. Lucian Petrescu, Tulcea, Concursul"Panaitopol", Tulcea-2013.

99. Turkey 2019 Junior National Olympiad.

100. Math Olympiad Germany.

101.Czeh Slovacia Olympiad.

102.Viorel Vâjâitu, GM.

103. Alexandru Zaharia, GM.

104.Chris Iliadis, Greece, Mathematical Inequalities 1/2026.

105.Omar Hamrit, Math 1/2026.

106.IMO TST 1992.

107. Turkey JBMO TST 2017.

108.D. M. Bătinețu-Giurgiu,Mihaly Bencze, RMM-47/2025.

109.Marin Chirciu, Inegalități algebrice 2,de inițiere la perf, Ed.Paralela 45, Pitești, 2021.

110.Marin Chirciu, Inegalități geometrice2, inițiere și perf, Ed. Paralela 45, Pitești, 2021.

111.Marin Chirciu, Inegalități algebrice, de la inițiere la perf, Ed.Comper, Băbana, 2025.

Art 9800

1 Martie 2026