WWW.MATEINFO.RO

REVISTA ELECTRONICA MATEINFO.RO

176 pagini

DECEMBRIE 2025

ISSN 2065 - 6432

REVISTĂ DIN FEBRUARIE 2009

COORDONATOR:
ANDREI OCTAVIAN DOBRE

REDACTORI PRINCIPALI ȘI SUSȚINĂTORI PERMANENȚI AI REVISTEI

NECULAI STANCIU
MARIN CHIRCIU
ROXANA MIHAELA STANCIU

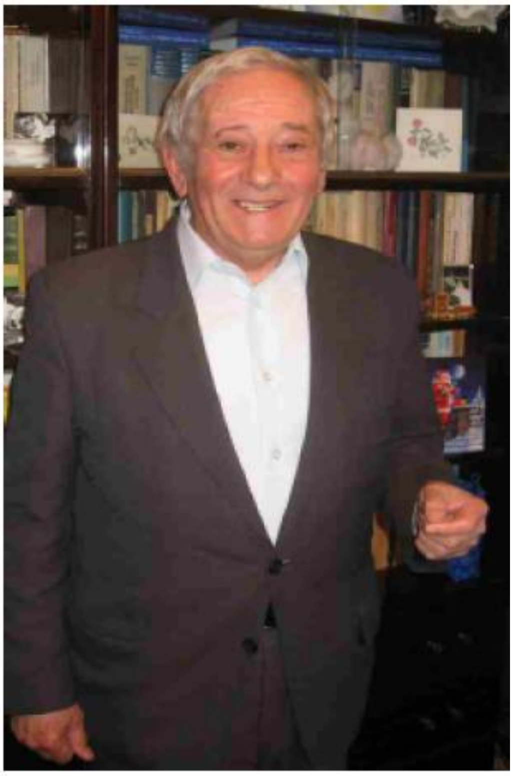
ARTICOLE

R.E.M.I. DECEMBRIE 2025

PUTEȚI TRIMITE ARTICOLE ÎN FORMAT WORD PE REVISTA.MATEINFO@YAHOO.COM

1. Profesorul DUMITRU BĂTINEŢU-GIURGIU la 90 DE ANI

prof. Neculai Stanciu



Dumitru Bătineţu-Giurgiu s-a născut pe 27 ianuarie 1936, în comuna Pietroşani, judeţul Vlaşca unde a urmat şi cursurile gimnaziale. A urmat apoi Liceul Teoretic din Giurgiu.

În toamna anului 1960, devine student al Universităţii din Bucureşti, Facultatea de Matematică, specializarea analiză matematică.

A fost:

- Asistent universitar la catedra de Matematică a Institutului Politehnic ''Gh. Asachi'' din Iaşi (1965-1968);
- Cercetător ştiinţific la Institutul de Cercetări Forestiere din Bucureşti (1968-1970);
- Asistent universitar la catedra de matematică-fizică a Institutului Agronomic ''Nicolae Bălcescu'' din Bucureşti (1970-1972);
- Profesor la Colegiul Naţional ''Ion Creangă'' din Bucureşti (1985-1989);
- Profesor la Colegiul Naţional ''Matei Basarab'' din Bucureşti (1976-1985; 1989-2003).

A introdus:

- Şirul lui Lalescu, diferite extinderi şi conceptele de funcţii Lalescu şi funcţii Euler-Lalescu;
- Şirul lui Ioachimescu, noţiunea de constantă de tip Ioachimescu, şirurile de tip Euler-Ioachimescu şi generalizări ale şirului Ioachimescu;
- Şirul lui Ghermănescu şi constanta Euler-Ghermănescu.
    - A fost mulţi ani în Comisia Centrală a Olimpiadei Naţionale de Matematică.

- A participat la pregătirea loturilor naţionale olimpice ale României şi la pregătirea elevilor în diverse tabere de matematică.
- A propus o problemă, în numele României, la Olimpiada Internaţională de Matematică, desfăşurată la Budapesta în 1970.
- Activitatea ştiinţifică a domnului profesor **D.M. Bătineţu-Giurgiu** este extrem de bogată şi variată prin: cărţi de referinţă, articole, note, probleme şi soluţii propuse.
- A colaborat cu multe reviste de matematică: Gazeta Matematică, Recreaţii Matematice, Revista de Matematică din Timişoara, Sclipirea Minţii, The Fibonacci Quarterly, The American Mathematical Monthly, The College Mathematics Journal, Mathematics Magazine, Romanian Mathematical Magazine, School Science and Mathematics Journal, The Pentagon, Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matematica, La Gaceta de la RSME, Octogon Mathematical Magazine şi altele, în care a propus numeroase probleme frumoase date la concursuri şi olimpiade naţionale şi internaţionale.
- A prezentat rezultatele cercetărilor sale ştiinţifice la Conferinţe, Simpozioane şi Sesiuni de comunicări ştiinţifice naţionale şi internaţionale.

De-a lungul carierei sale, a fost onorat cu numeroase premii, medalii şi diplome.

❖ Cărţi publicate - în colaborare - cu Dumitru Bătineţu-Giurgiu

1. **Olympiad problems from all over the world (coautor), 7th Grade Content, Vol. 3, Editura Cartea Românească Educaţional, 2018.**
2. **Olympiad problems from all over the world (coautor), 8th Grade Content, Vol. 4, Editura Cartea Românească Educaţional, 2018.**
3. **Olympiad problems from all over the world (coautor), 9th Grade Content, Vol. 5, Editura Cartea Românească Educaţional, 2018.**
4. **Din tainele numerelor Fibonacci şi Lucas, Editura Sitech, Craiova, 2013 (coautor cu D.M. Bătineţu-Giurgiu şi Gabriel Leonard Tica)**

❖ Articole publicate - în colaborare - cu Dumitru Bătineţu-Giurgiu

1. **’’Câteva probleme cu integrale funcţionale’’ - Sclipirea Minţii, Nr. 36, 2025, 7-9.**
2. **’’Special new trigonometric inequalities’’ – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 32, No. 2, October, 2024, 874-880.**
3. **’’Happy Birthday to Mihály Bencze – 70 Years!’’ – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 32, No. 2, October, 2024, 1052-1058.**
4. **’’Exploatarea unor relaţii funcţionale pentru schimbarea de variabilă în integrala Riemann’’ – Recreaţii Matematice, Anul XXVII, Nr. 1, Ianuarie – Iunie, 2025, 33-34.**
5. **’’O nouă demonstraţie a inegalităţii Finsler - Hadwiger’’– Sclipirea Minţii, Nr. 34, 2024, 11.**

6. **’’Some limits of sequences of Bătineţu and lalesc type’’ - R.M.M.-46, Autumn Edition, 2025, 84 - 90.**
7. **’’Some special definite integrals’’ - R.M.M.-46, Autumn Edition, 2025, 78 - 84.**
8. **’’Lalescu and Euler-Mascheroni type new limits’’ - R.M.M.-46, Autumn Edition, 2025, 12 - 14.**
9. **’’Ionescu-weitzenböck’s type inequality with Fibonacci numbers’’ - R.M.M.-46, Autumn Edition, 2025, 6 - 9.**
10. **’’New inequalities with Fibonacci and Lucas numbers’’ - R.M.M.-44, Spring Edition, 2025, 22 - 29.**
11. **’’Certain limits of Fibonacci and Lucas’ sequences and functions’’ - R.M.M.-44, Spring Edition, 2025, 29 - 34.**
12. **’’Lalescu and Euler-Mascheroni type new limits’’ – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 32, No. 1, April, 2024, 139 - 143.**
13. **’’Ionescu-Weitzenböck’s type inequalities with Fibonacci numbers’’ – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 32, No.1, April, 2024, 182 - 186.**
14. **’’H. Bergstrom and J. Radon triangle collaboration’’ - Revista R.E.M.I. Iunie, 2024, 3-7.**
15. **’’Generalizarea unor probleme din Gazeta Matematică’’– Sclipirea Minţii, Nr. 33, 2024, 3 - 6.**
16. **’’Asupra unei clase de probleme cu integrale funcţionale definite’’ – Revista de Matematică din Timişoara (RMT), Nr. 2, 2024, 3 - 5.**
17. **’’Applications of the inequality of means to obtain new inequalities in triangle’’ - Revista R.E.M.I. Martie, 2024, 1-10.**
18. **’’Asupra unei clase de probleme cu limite din integrale’’– Recreaţii Matematice, Anul XXVI, Nr. 1, Ianuarie - Iunie, 2024, 32 - 34.**
19. **’’New inequalities with Fibonacci and Lucas Numbers’’ – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 31, No. 2, October, 2023, 842 - 850.**
20. **’’Certain limits of Fibonacci and Lucas Sequences and Functions’’– Octogon Mathematical Magazine, Vol. 31, No. 2, October, 2023, 913 - 920.**
21. **’’Applications of J. Radon’s inequality in triangle’’ - Revista R.E.M.I. Decembrie 2023, 1-9.**
22. **’’7 Outstanding limits’’ – R.M.M.-42, Autumn Edition, 2024, 51-54.**
23. **’’The endless desert of decimals of Pi - results without words’’ – R.M.M.-42, Autumn Edition, 2024, 49-51.**
24. **’’Noi demonstraţii pentru unele inegalităţi celebre în triunghi’’ – Revista de Matematică din Timişoara (RMT), Nr. 3-4, 2023, 14 - 16.**
25. **’’Applications of J. Radon’s inequality in triangle’’– Revista R.E.M.I. Septembrie 2023, 2 - 4.**
26. **’’Some applications of H. Bergström’s inequality and J. Radon’s inequality in triangle’’– Revista R.E.M.I. Iunie 2023, 1 - 25.**
27. **’’New Tsintsifas and Hadwiger-Finsler type inequalities in triangle’’ – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 31, No. 1, April, 2023, 209-212.**
28. **’’7 Outstanding Limits’’– Octogon Mathematical Magazine, Vol. 31, No. 1, April, 2023, 205-208.**
29. **’’Some applications of Harald Bergström’s inequality in triangle’’ – Revista R.E.M.I. Martie 2023, 2-7.**
30. **’’Asupra unor inegalităţi în triunghi’’ – Sclipirea Minţii, Nr. 31, 2023, 6-7.**
31. **’’Note on Ionescu-Weitzenböck’s inequality – Arhimede Mathematical Journal, No. 2, 2022, 137-142.**

32. ’’A generalization of one inequality and some geometric applications’’ – Revista R.E.M.I. Decembrie 2022, 2-8.
33. ’’Asupra unor inegalităţi din Gazeta Matematică’’ – Sclipirea Minţii, Nr. 30, 2022, 12-14.
34. ’’A Tribute to Octogon Mathematical Magazine 2022 celebrating 30 YEARS of publication’’– Octogon Mathematical Magazine, Vol. 30, No. 1, April, 2022, 5 - 12.
35. ’’New Bătineţu-Pedoe-Bottema-Tsintsifas type inequalities in triangle’’ – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 30, No. 1, April, 2022, 100 - 110.
36. ’’Elegant, Classic and New in Integral Calculus’’ – R.M.M.-4, New Edition, 2022, 41-46.
37. ’’Asupra unor probleme de tip Lalescu’’ – Sclipirea Minţii, Nr. 29, Aprilie, 2022, 6 – 8.
38. ’’Solved Problems – (III) ’’ – R.M.M.-3, New Edition, 2022, 47-58.
39. ’’Solved Problems – (IV) ’’ – R.M.M.-3, New Edition, 2022, 87-95.
40. ’’New inequalities with two triangles ’’ – R.M.M.-2, New Edition, 2022, 10-13.
41. ’’Two refinements of Ionescu-Weitzenböck inequality ’’ – R.M.M.-2, New Edition, 2022, 43-44.
42. ’’One problem – seven solutions ’’ – R.M.M.-2, New Edition, 2022, 54-56.
43. ’’Solved Problems – (II) ’’ – R.M.M.-2, New Edition, 2022, 89-96.
44. ’’Inequalities with Fibonacci and Lucas numbers’’– Octogon Mathematical Magazine, Vol. 29, No. 2, October, 2021, 994-1008.
45. ’’A Generalization of some inequalities in triangle ’’ – R.M.M.-1, New Edition, 2022, 81-83.
46. ’’Generalization and refinements for Ionescu-Weitzenböck inequality ’’ – R.M.M.-1, New Edition, 2022, 53-55.
47. ’’O generalizare a unor inegalităţi în triunghi’’ – Sclipirea Minţii, Nr. 28, Decembrie, 2021, 7 – 8.
48. ’’În legătură cu inegalitatea lui Hayashi’’– Sclipirea Minţii, Nr. 28, Decembrie, 2021, 6 – 7.
49. ’’A mathematical correspondence’’– Octogon Mathematical Magazine, Vol. 29, No. 1, April, 2021, 382-395.
50. ’’New inequalities in acute triangles’’ – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 29, No. 1, April, 2021, 348-352.
51. ’’Popoviciu’s inequalities revisited’’– Octogon Mathematical Magazine, Vol. 29, No. 1, April, 2021, 338-341.
52. ’’IMO type inequalities with Fibonacci and Lucas numbers’’ – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 29, No. 1, April, 2021, 320-326.
53. ’’Some new inequalities in convexe polygons’’ – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 29, No. 1, April, 2021, 296-303.
54. ’’Some limits os sequences of Bătineţu and Lalescu type’’– Octogon Mathematical Magazine, Vol. 29, No. 1, April, 2021, 283-292 .
55. ’’Some special definite integrals’’ – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 29, No. 1, April, 2021, 262-268.
56. ’’Special sequences (I)’’– Octogon Mathematical Magazine, Vol. 29, No. 1, April, 2021, 239-252.
57. ’’Two classes of Lalescu’s sequences’’– Octogon Mathematical Magazine, Vol. 29, No. 1, April, 2021, 197-206.
58. ’’New classes of sequences/functions and famous limits’’ – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 29, No. 1, April, 2021, 151-164 .

59. **’’Some limits of Traian Lalescu Type (III)’’ – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 29, No. 1, April, 2021, 87-127 .**
60. **’’A tribute to Traian Lalescu an outstanding romanian great scientist’’ – R.M.M.-37, Summer Edition, 2023, 4-16.**
61. **’’Matematica este incompletă, inconsistentă şi indecidabilă.’’ – Revista ALPHA, nr. 1/2021, 7 - 10.**
62. **’’Omagiu lui Traian Lalescu’’ – Revista Sclipirea Minţii, Nr. 27, Aprilie, 2021, 51-52.**
63. **’’Asupra unei inegalităţi a lui A. Padoa’’ – Revista Sclipirea Minţii, Nr. 27, Aprilie, 2021, 13.**
64. **’’Tribute to Ion Ionescu – who discovered with 22 years before Weitzenböck the inequality $a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}S$ ’’ – R.M.M.-35, Winter Edition, 2022, 20-21.**
65. **’’Asupra unor inegalităţi într-un triunghi’’ – Recreaţii Matematice, Nr. 1, Ianuarie - Iunie, 2021, 31-32.**
66. **’’New limits related to Euler-Mascheroni and Ioachimescu constants’’ – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 28, No. 2, October, 2020, 981 - 990.**
67. **’’Few beautiful challenging functional equations’’ – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 28, No. 2, October, 2020, 974 - 980.**
68. **’’New limits of Lalescu type with Fibonacci and Lucas sequences’’ – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 28, No. 2, October, 2020, 953 - 973.**
69. **’’Amazing linear recurrences of positive real sequences’’ – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 28, No. 2, October, 2020, 945 - 950.**
70. **’’New limits involving famous sequences’’ – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 28, No. 2, October, 2020, 918 - 938.**
71. **’’Refinement of some geometrical inequalities’’ – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 28, No. 2, October, 2020, 860 - 863.**
72. **’’Traian Lalescu’’– R.M.M., December 11, 2020.**
73. **’’New inequalities in triangle’’– R.M.M., No. 31, Winter Edition 2021, 8-9.**
74. **’’120 Years of Lalescu sequences (II)’’– R.M.M., No. 30, Autumn Edition 2021, 14-20.**
75. **’’Câteva limite de tip Lalescu la 120 de ani de la apariţia în gazeta Matematică’’– REMI, Septembrie 2020, 2-6.**
76. **’’120 Years of Lalescu sequences (I)’’ – R.M.M., No. 29, Summer Edition 2021, 16-26.**
77. **’’About Fibonacci – Lucas – Kantorovich – Surányi – Collaboratio Inequalities’’ – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 28, No. 1, April, 2020, 159-173.**
78. **’’Traian Lalescu type limits with Fibonacci and Lucas sequences and golden ratio’’– Octogon Mathematical Magazine, Vol. 28, No. 1, April, 2020, 173-195.**
79. **’’Some matrix results’’– Octogon Mathematical Magazine, Vol. 28, No. 1, April, 2020, 195-200.**
80. **’’Trigonometric and geometric inequalities with Fibonacci and Lucas numbers’’– Octogon Mathematical Magazine, Vol. 28, No. 1, April, 2020, 200-208.**
81. **’’New generalizations of Ionescu-Nesbitt inequality’’ – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 28, No. 1, April, 2020, 208-212.**
82. **’’Ionescu-Nesbitt inequality revisited’’ – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 28, No. 1, April, 2020, 212-215.**
83. **’’New generalizations for famous triangle inequalities’’ – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 28, No. 1, April, 2020, 215-218.**
84. **’’Mihály Bencze – 65 years – Happy Birthday’’– Octogon Mathematical Magazine, Vol. 28, No. 1, April, 2020, 261-263.**

85. **’’120 de ani de la limita lui Traian Lalescu’’ – Recreaţii Matematice, Nr. 2, Iulie - Decembrie, 2020, 105-107.**
86. **’’Proofs for old and new triangle inequalities’’ – The Teaching of Mathematics, Vol. 23, No.1, 2020, 30-34.**
87. **’’The Last Three Decades of Lalescu Limit’’ – Arhimede Mathematical Journal, Vol. 7, No.1, 2020, 18-28.**
88. **’’Alte inegalităţi cu numere Fibonacci şi Lucas’’– REMI, Iunie, 2020.**
89. **’’120 de ani de la limita şirului lui Traian Lalescu’’ – Sclipirea Minţii, Nr. 25, Mai, 2020, 6-7.**
90. **’’Criteriile Stolz-Cesàro şi Cauchy-D’ Alembert în diverse aplicaţii’’ – Gazeta Matematică seria B, nr. 4/2020, 179-186.**
91. **’’120 Years of Lalescu Sequences’’ –Romanian Mathematical Magazine, February 2020.**
92. **’’Happy birthday to editor-in-chief of Octogon Mathematical Magazine – Mihály Bencze – 65 years !’’ – RMM 27/2020, 4-6.**
93. **’’New classes of sequences-functions and famous limits’’ – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 27, No.2, October, 2019, 784-797.**
94. **’’Two classes of Lalescu’s sequences’’ – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 27, No. 2, October, 2019, 805-813.**
95. **’’About an inequality from R.M.T.’’– Octogon Mathematical Magazine, Vol. 27, No. 2, October, 2019, 824-827.**
96. **’’About an inequality from IMO, 1995’’ – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 27, No. 2, October, 2019, 828-831.**
97. **’’About Nicolaie Ciorănescu’s double inequaliy’’ – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 27, No. 2, October, 2019, 832-840.**
98. **’’An algebraic inequality and some geometric applications’’ – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 27, No. 2, October, 2019, 884-886.**
99. **’’About a conditional inequality from IMO 1995’’ – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 27, No. 2, October, 2019, 887-889.**
100. **’’Inegalităţi Fibonacci - Lucas’’ – REMI, Decembrie, 2019, 2 – 9.**
101. **’’About some Ion Ionescu’s inequalities’’– RMM, Nr. 26, Autumn Edition 2020, 4 – 9.**
102. **’’Other inequalities with Fibonacci and Lucas numbers’’– REMI, Septembrie, 2019, 4 – 13.**
103. **’’Generalizări şi soluţii pentru problema 5460 din revista School Science and Mathematics’’ – Revista de matematică Alpha, Anul XXIX (seria a II-a), nr. 2/2019, 8 -10.**
104. **’’Some limits of Traian Lalescu type with Fibonacci and Lucas numbers (II)’’ – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 27, No. 1, April, 2019, 101-111.**
105. **’’Some inequalities in bicentric quadrilaterals’’ (împreună cu Marius Drăgan şi Mihaly Bencze) – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 27, No. 1, April, 2019, 112-122.**
106. **’’Functions that generates derivable sequences’’– Octogon Mathematical Magazine, Vol. 27, No. 1, April, 2019, 135-142.**
107. **’’Some limits of Traian Lalescu type (II)’’ – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 27, No. 1, April, 2019, 184-209.**
108. **’’Certain results on integrals’’– Octogon Mathematical Magazine, Vol. 27, No. 1, April, 2019, 241-271.**
109. **’’Some inequalities in triangle’’ – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 27, No. 1, April, 2019, 272-290.**

110. **’’Some limits of definite integrals of Lalescu’s type’’ – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 27, No. 1, April, 2019, 312-328.**
111. **’’Pairs of sequences γ - Euler or s - Ioachimescu’’ – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 27, No. 1, April, 2019, 340-345.**
112. **’’About some triangles inequalities’’ – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 27, No. 1, April, 2019, 352-356.**
113. **’’Certain Ionescu-Weitzenböck type inequalities’’ – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 27, No. 1, April, 2019, 360-364.**
114. **’’Some certain inequalities with Fibonacci and Lucas numbers’’ – Revista REMI, Iunie, 2019, 2-7.**
115. **’’Soluţii pentru unele probleme din Revista Mathematical Excalibur’’ – Revista de matematică Alpha, Anul XXIX (seria a II-a), nr. 1/2019, 6-7.**
116. **’’Unele inegalităţi importante’’– Revista de matematică Alpha, Anul XXIX (seria a II-a), nr. 1/2019, 7-10.**
117. **’’Geometric inequalities via one algebraic inequality’’ – RMM, Nr. 23, 1 Septembrie 2019, 4 – 8.**
118. **’’On certain algebraic inequalities’’ – RMM, Nr. 23, 1 Septembrie 2019, 24 – 27.**
119. **’’Some inequalities and identities with Fibonacci numbers and Lucas numbers (V)’’– Octogon Mathematical Magazine, Vol. 26, No. 2, October, 2018, 627-663.**
120. **’’Some limits of Traian Lalescu type (II)’’ – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 26, No. 2, October, 2018, 664-690.**
121. **’’Some matrices identities with Fibonacci numbers and Lucas numbers’’ – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 26, No.2, October, 2018, 691-699.**
122. **’’Applications of Tsintsifas inequality’’ – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 26, No. 2, October, 2018, 700-702.**
123. **’’O generalizare a unei probleme din Revista Crux Mathematicorum’’ – Revista de matematică Alpha, Anul XXVIII (seria a II-a), nr. 2/2018, 9.**
124. **’’Asupra unor funcţii şi medii pe R_+^*’’ - Sclipirea Minţii, An XI, Nr. 22/2018, 8-9.**
125. **’’Inequalities with Fibonacci and Lucas numbers’’ – Revista MateInfo.Ro , Decembrie, 2018, 1-11.**
126. **’’Some limits of Traian Lalescu type with Fibonacci and Lucas numbers’’ – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 26, No. 1, April, 2018, 54-87.**
127. **’’Some limits of Traian Lalescu type (I) ’’ – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 26, No. 1, April, 2018, 116-136.**
128. **’’Some Ionescu-Weitzenböck inequalities’’– Octogon Mathematical Magazine, Vol. 26, No. 1, April, 2018, 147-175.**
129. **’’Some inequalities with Fibonacci numbers and Lucas numbers (IV)’’ – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 26, No. 1, April, 2018, 216-229.**
130. **’’Certain classes of Lalescu sequence’’ – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 26, No. 1, April, 2018, 243-251.**
131. **’’Few solutions and two refinements for Bogdan Fustei’s inequality’’ – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 26, No. 1, April, 2018, 258-264.**
132. **’’Asupra unor inegalităţi din RMT’’ - RMT, Nr. 3, 2018, 14.**
133. **’’Asupra unor probleme din RMT’’ – Revista Electronică MateInfo.Ro , septembrie, 2018, 3 - 6.**
134. **’’Some results about the Fibonacci numbers and the golden ratio’’– RMM, Nr. 21, 1 Septembrie 2018, 23 – 25.**
135. **’’A generalization of J. Radon’s inequality’’ – RMM, Nr. 21, 1 Septembrie 2018, 27 – 29.**

136. **’’Generalization of the limits of the sequences of Bătineţu, Ghermănescu, Ianculescu, Lalescu and other collaborations’’ – RMM, Nr. 21, 1 Septembrie 2018, 34 – 37.**
137. **’’Generalizations of the limits of the sequences of Bătineţu, Ghermănescu, Ianculescu, Lalescu and other collaborations’’– Sclipirea Minţii, An XI, Nr. 21, mai, 2018, 17 – 20.**
138. **’’Câteva generalizări ale unei probleme din revista School Science and Mathematics’’ – Revista de matematică Alpha – Anul XXVIII (seria a II-a) , nr. 1 / 2018, 5 - 7.**
139. **’’The numbers of Fibonacci and Lucas – Identities – Proofs with few words (VI)’’ - Revista MateInfo.Ro_Aprilie_2018, 9-22.**
140. **’’The numbers of Fibonacci and Lucas – Identities – Proofs with few words (V)’’ - Revista MateInfo.Ro_Martie_2018, 4-13.**
141. **’’The numbers of Fibonacci and Lucas – Identities – Proofs with few words (IV)’’ - Revista MateInfo.Ro_Februarie_2018, 21-37.**
142. **’’The numbers of Fibonacci and Lucas – Identities – Proofs with few words (III)’’ - Revista MateInfo.Ro_Ianuarie_2018, 24-34.**
143. **’’A retrospective of the Ionescu-Nesbitt inequality’’ – R. M. M., No. 20, March 2018, 10-14.**
144. **’’Una nueva demonstración de la desigualdad de Euler’’ - Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática, Número 58 (Julio - Diciembre 2017).**
145. **’’25 Years of Octogon Mathematical Magazine Happy Birthday!’’ – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 25, No. 2, October, 2017, 8-10.**
146. **’’Some inequalities with Fibonacci numbers and Lucas numbers (III)’’ – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 25, No.2, October, 2017, 102-117.**
147. **’’New classes of sequences and functions and some applications’’ – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 25, No.2, October, 2017, 205-218.**
148. **’’About the calculus of some famous sequences’’ – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 25, No.2, October, 2017, 224-230.**
149. **’’About some inequalities in triangle’’– Octogon Mathematical Magazine, Vol. 25, No.2, October, 2017, 268-274.**
150. **’’Limits of sequences and functions from certain classes’’ – The Teaching of Mathematics, Vol. XX, 1, 2017, 37 – 45.**
151. **’’Câteva aplicaţii ale inegalităţii lui H. Bergström’’ – Revista Alpha, Anul XXVII (Seria a II-a), Nr. 2, 2017, 5 – 7.**
152. **’’O generalizare şi o rafinare a inegalităţii Ionescu-Weitzenböck’’ - Revista Sclipirea Minţii – An X, Nr. XX, 2017, 9-10.**
153. **’’An elementary proof of Blundon’s inequality’’ - Revista Sclipirea Minţii – An X, Nr. XX, 2017, 10 -11.**
154. **’’The numbers of Fibonacci and Lucas – Identities – Proofs with few words (II)’’ - Revista MateInfo.Ro_Decembrie_2017, 4-15.**
155. **’’The numbers of Fibonacci and Lucas – Identities – Proofs with few words (I)’’ - Revista MateInfo.Ro_Noiembrie_2017, 12-19.**
156. **’’About Ionescu-Nesbitt’s inequality’’ – R.M.M. - Romanian Mathematical Magazine – nr. 19, septembrie 2017, 18-19.**
157. **’’Other solutions and generalizations to some problems from ’’The College Mathematics Journal’’ and ’’Crux Mathematicorum’’ – R.M.M. - Romanian Mathematical Magazine – nr. 19, septembrie 2017, 20-22.**
158. **’’Applications of Tsintsifas inequality’’ – R.M.M. - Romanian Mathematical Magazine – nr. 19, septembrie 2017, 24-25.**

159. **’’A retrospective of the Ionescu-Nesbitt inequality’’– R.M.M. - Romanian Mathematical Magazine Online – 8 August 2017.**
160. **’’Soluţii problema lunii martie 2017’’– Revista MateInfo.Ro_Aprilie_2017, 3-15.**
161. **’’Some inequalities with Fibonacci numbers and Lucas numbers of Bergström’s type inequality and Radon’s type inequality II’’ – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 25, No.1, April, 2017, 65-89.**
162. **’’Asupra unor probleme din revista Alpha’’- Alpha, Nr. 1/2017, 12-13.**
163. **’’Some inequalities with Fibonacci numbers and Lucas numbers of Bergström’s type inequality and Radon’s type inequality ’’ – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 24, No.2, October, 2016, 493-512.**
164. **’’Other generalization of a problem from Balkan Mathematical Olympiad ’’ – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 24, No.2, October, 2016, 578-581.**
165. **’’Two solutions of a problem from The College Mathematics Journal – Revista de matematică din Craiova - Cardinal, Anul XXVII, Nr. 2, 2016/2017, 8.**
166. **’’Solution to problem 4106 from Crux mathematicorum’’ – Revista MateiInfo.Ro_August_2016, 2.**
167. **’’Asupra unor probleme din revista Alpha’’ – Alpha, An XXVI, Nr. 2, 2016, 9-11.**
168. **’’Some generalizations of some problems from School Science and Mathematics’’ – Revista de matematică din Craiova - Cardinal, Anul XXVII, Nr. 1, 2016/2017, 4-6.**
169. **’’About problem 3941 from Crux Mathematicorum’’– Revista de matematică şi informatică, Constanţa, anul XV-nr. 3-4 – septembrie 2016, 1-5.**
170. **’’Nesbitt-Ionescu type inequalities. Some generalizations of problem 37, MathProblems (4) 4 (2014)’’ – MathProblems, Issue 5, 2015, 503-506.**
171. **’’Solutions and generalizations of some problems from Crux Mathematicorum’’ – R.M.M. - Romanian Mathematical Magazine – nr. 17, septembrie 2016, 21-25.**
172. **’’Solved problems III – Asupra problemei 4075 din revista Crux Mathematicorum’’ – R.M.M. Romanian Mathematical Magazine – nr. 17, septembrie 2016, 40-41.**
173. **’’The independence of Bergström’s inequality’’ – Romanian Mathematical Magazine – August 22, 2016.**
174. **’’Two refinements of Ionescu-Weitzenböck’s inequality’’– Romanian Mathematical Magazine – August 8, 2016, 1-2.**
175. **’’About calculus of limits for famous sequences’’– Romanian Mathematical Magazine – July 30, 2016, 1-4.**
176. **’’A generalization of 1-st Problem of 1-st Balkan Mathematical Olympiad’’ – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 24, No.1, April, 2016, 158-163.**
177. **’’Two refinements of Ionescu-Weitzenböck inequality’’ – Revista de Matematică Mehedinţeană (R.M.M.), Nr. 16 – Martie 2016, 14 – 16.**
178. **’’Two generalizations of Problem 11783 from AMM June-July 2014’’ – Revista de matematică şi informatică_Constanţa, Anul XV, Nr. 1, februarie, 2016, 4-7.**
179. **’’New inequalities in triangle and convex polygons ’’– Octogon Mathematical Magazine, Vol. 23, No.2, October, 2015, 408-414.**
180. **’’New generalizations and refinements of Ionescu-Weitzenböck inequality’’– Octogon Mathematical Magazine, Vol. 23, No.1., April, 2015, 77-88.**
181. **’’Some applications of H. Bergström’s inequality and J. Radon’s inequality’’ – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 23, No.1., April, 2015, 103-107.**
182. **’’Una nota sobre una desigualdad de Nesbitt-Ionescu’’ – Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matematica, Numero 53 (Julio-Diciembre 2015).**

183. **''Ce este mai simplu de utilizat: (CBS) sau (B) ?'' – Recreaţii Matematice, Anul XVII, Nr. 2, Iulie – Decembrie 2015, 120-122.**
184. **''Some inequalities of Ionescu – Weitzenböck type in triangle''– Octogon Mathematical Magazine, Vol. 22, No.2., October, 2014, 785-804.**
185. **''Some applications of H. Bergström' s inequality and J. Radon's inequality in triangle (V)'' – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 22, No. 2., October, 2014, 825-845.**
186. **''Inegalităţi de tip Radon – Ionescu – Weitzenböck în triunghi'' – RMI – Constanţa, Ianuarie 2015, 1-3.**
187. **''New generalizations and refinements of Ionescu-Weitzenböck inequality – Arhimede Mathematical Journal – Vol. 1, No. 2, Fall 2014, 33-45.**
188. **''Several results of some classes of sequences'' – The Pentagon – Volume 73, Number 2, Spring 2014, 10-24.**
189. **''Inegalităţi de tip Radon-Ionescu-Weitzenböckn în triunghi'' - Alpha, Nr. 2/2014, 5-6.**
190. **''O rafinare a unei inegalităţi''- Alpha, Nr. 2/2014, 4-5.**
191. **''Asupra problemei 21317 din Gazeta Matematică'' – RMI – Constanţa, Septembrie 2014, 6-7.**
192. **''An elementary proof of one Wallis-type limit'' - Sclipirea Minţii, Nr. 14, 11.**
193. **''În legătură cu problema 11783 din A.M.M. iunie-Iulie 2014'' – Anuar Matematic, Bistriţa- Năsăud, 2014, 10-12.**
194. **''Asupra inegalităţii Ionescu-Weitzenböck''– Anuar Matematic, Bistriţa-Năsăud, 2014, 13-25.**
195. **''Solutions of some problems from Octogon Mathematical Magazine'' – Revista MateInfo.Ro – Septembrie, 2014, 5-12.**
196. **''La suficiencia de la equivalencia e independencia de las desigualdades de Cauchy-Buniakowski-Schwarz y de Bergström'' – REOIM, No. 50, Septiembrie 2013- Mayo 2014.**
197. **''Inegalitatea lui Nesbitt – o temă pentru centrele de excelenţă şi câteva chestiuni de metodica predării matematicii (2)'' – Revista de Matematică Alpha, Anul XXIII (seria a II-a), Nr. 1/2014, pp. 6-8.**
198. **''Calculating the limits of some real sequences'' – Math Problems, Issue 1, 2014, 252-257.**
199. **''Some applications of H. Bergström' s inequality in triangle (III) – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 22, No. 1., April, 2014, 70-76.**
200. **''Some applications of H. Bergström' s inequality and J. Radon's inequality in triangle (IV) – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 22, No. 1., April, 2014, 246-252.**
201. **''Some refinements of some inequalities and geometric applications'' – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 22, No. 1., April, 2014, 257-266.**
202. **''How we use the injectivity of functions for solving equations''– Octogon Mathematical Magazine, Vol. 22, No. 1., April, 2014, 272-285.**
203. **''Demostrarea unor inegalităţi din Octogon Mathematical Magazine'' – Sclipirea Minţii, Anul VII, Nr. 13, 2014, 3-4.**
204. **''O generalizare a inegalităţii lui Mitrinović'' – Sfera Matematicii, Anul XI, Nr. 23, 2/2013, 7-9.**
205. **''Un pionierat matematic – Inegalitatea Ionescu – Weitzenböck'' – Arhimede, Nr. 1-12/2012 ianuarie-decembrie, 13-18.**
206. **''A new generalization of Ionescu - Weitzenböck inequality'' – Asymmetry, Vol. 5, March 2014, 35-38.**

207. **’’Câteva proprietăţi ale unor clase de şiruri’’ – Revista MateInfo.Ro – Martie, 2014, 2-5.**
208. **’’New methods for calculations of some limits’’ – The Teaching of Mathematics, Vol. XVI, Nr. 2, 2013, 82-88.**
209. **’’Generalizarea problemei VIII.169 din RecMat, nr. 2/2013’’ - Recreaţii Matematice, Anul XVI, Nr. 1, Ianuarie – Iunie 2014, 28-29.**
210. **’’Generalizări ale unor probleme din GMB şi RMT care utilizează inegalitatea lui J. Radon şi H. Bergström’’– Anuar Matematic, Vol. XVI, 2013, 13-38.**
211. **’’About some polynomial functions’’ – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 21, No. 2., October, 2013, 697-713.**
212. **’’Some applications of J. Radon’s inequality in triangle (III)’’ – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 21, No. 2., October, 2013, 678-681.**
213. **’’A generalization of one inequality and some geometric applications’’ – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 21, No.2., October, 2013, 641-648.**
214. **’’Inegalitatea lui Nesbitt – o temă pentru centrele de excelenţă şi câteva chestiuni de metodica predării matematicii (1)’’ – Revista de Matematică Alpha, Anul XXII (seria a II-a), Nr. 2/2013, pp. 7-9.**
215. **’’Istoria unei inegalităţi’’ – Sclipirea Minţii, Nr. 12, 1.**
216. **’’Demonstrarea unor inegalităţi din Octogon’’– Sclipirea Minţii, Nr. 12, 2013, 5-6.**
217. **’’A new generalization of Nesbitt’s inequality’’ – Journal of Science and Arts – Year 13, No. 3(24), pp. 255-260, 2013.**
218. **’’Generalizations of some remarkable inequalities’’– The Teaching of Mathematics, 2013, Vol. XVI, 1, pp. 1-5.**
219. **’’ Las desigualdades de Cauchy-Buniakovski-Schwarz y de Bergström son equivalentes e independientes’’ - Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática, Número 49 (julio – agosto 2013).**
220. **’’Some inequalities in triangle’’ – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 21, No. 1., April, 2013, 105-115.**
221. **’’Some applications of J. Radon’s inequality in triangle (II)’’ – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 21, No. 1., April, 2013, 131-138.**
222. **’’Some applications of H. Bergström’s inequality in triangle (II)’’– Octogon Mathematical Magazine, Vol. 21, No. 1., April, 2013, 167-175.**
223. **’’One inequality and some applications’’ – Journal of Science and Arts – Year 13, No. 2(23), pp. 131-134, 2013.**
224. **’’Câteva aplicaţii ale inegalităţii Ionescu-Weitzenböck’’ – Recreaţii Matematice, Aul XV, Nr. 2, Iulie – Decembrie 2013, 100-102.**
225. **’’Some generalizations of IMO inequality’’ – Journal of Science and Arts – Year 13, No. 2(23), pp. 135-140, 2013.**
226. **’’A generalization of J. Radon’s inequality and some applications’’ — G.M.-B – Nr. 6-7-8/2013, 287-293.**
227. **’’O inegalitate algebrică şi consecinţe numerice ale ei’’ – Alpha, Anul XXII (seria a II-a), nr. 1, 2013, p. 4.**
228. **’’Generalizations and Applications of Problems 682 and 694’’ – The Pentagon, Vol. 72, No. 1, Fall 2012, pp. 21-33.**
229. **’’The inequality Ionescu-Weitzenböck’’ - MathProblems, Vol. 3, Issue 1 (2013), pages 136 – 138.**
230. **’’Some geometric inequalities of Ionescu-Weitzenböck type’’ – International Journal of Geometry, Vol 2 (2013), No. 1, 68-74.**
231. **’’The inequality Ionescu-Weitzenböck’’ - Revista MateInfo.Ro, Mai, 2013, 2-5.**
232. **’’Consecinţe numerice ale unei inegalităţi algebrice’’ – SM, Nr. 11, 2013, p.10;**

233. **’’New proofs of Cauchy-Buniakovski-Schwarz’ inequality and Bergström’s inequality’’ – SM, Nr. 11, 2013, p.15.**
234. **’’Some generalizations of Ionescu-Weitzenböck’s inequality’’– Journal of Science and Arts – Year 13, No. 1(22), pp. 27-32, 2013.**
235. **’’Some geometric inequalities of Ionescu-Weitzenböck type in triangle’’– Journal of Science and Arts – Year 13, No. 1(22), pp. 43-50, 2013.**
236. **’’Nuevas generalizaciones y aplicaciones de la desigualdad de Nesbitt’’ – Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matematica – Numero 47 (noviembre 2012 – febrero 2013).**
237. **’’Inegalităţi de tip Ionescu-Weitzenböck’’ – G.M.-B – Nr. 1/2013, 1-10.**
238. **’’Some geometric inequalities of Radon-Mitrinović’’– Journal of Mathematical Inequalities, Vol. 7, No. 1 (2013), 25-32.**
239. **’’Some applications of Radon’s inequality in triangle’’– Octogon Mathematical Magazine, Vol. 20, No. 2., October, 2012, 468-471.**
240. **’’Some applications of Bergström’s inequality in triangle’’ – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 20, No. 2., October, 2012, 481-486.**
241. **’’Some facts of special sequences’’ – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 20, No. 2., October, 2012, 521-541.**
242. **’’About Nesbitt’s inequality’’ – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 20, No. 2., October, 2012, 559-575.**
243. **’’Asupra unui pionierat matematic. Inegalitatea Ionescu-Weitzenböck’’ - Sfera Matematicii, Nr. 1-2/2012, 4-6.**
244. **’’Some colaboration for the calculations of some limits’’ – Revista MateInfo.Ro, Februarie, 2013, 4-10.**
245. **’’New generalizations and new applications for Nesbitt’s inequality’’ - Journal of Science and Arts – Year 12, No. 4(21), pp. 425-430, 2012.**
246. **’’Aplicaţii ale unor inegalităţi clasice’’ – Anuar Matematic, 2012, SSMR – Filiala Bistriţa-Năsăud, pp. 9-22.**
247. **’’Generalización de un problema propuesto en la 46-a OME y su relación con desigualdad de Nesbitt’’- Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática – Número 46 (julio – octubre 2012), pp. 37 – 40.**
248. **’’Some geometric inequalities of Radon – Erdös – Mordell type’’ – Journal of Science and Arts – Year 12, No. 3(20), pp. 291-296, 2012.**
249. **’’Some generalizations of Nesbitt’s inequality’’– Sclipirea Minţii, Nr. 10, 2012, pp. 8-9.**
250. **’’Octogon Mathematical Magazine Celebrates 20 years of Publication’’ – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 20, No. 1., Aprilie, 2012, 3-31.**
251. **’’A new generalization for an I.M.O. problem and its geometrical applications’’ – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 20, No. 1., Aprilie, 2012, 190-198.**
252. **’’Some geometric inequalities in convex polygons’’ – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 20, No. 1., Aprilie, 2012, 227-233.**
253. **’’On OQ. 3184’’ – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 20, No. 1., Aprilie, 2012, 406-408.**
254. **’’Câteva inegalităţi geometrice în poligoane convexe şi nu numai’’ – Recreaţii Matematice, Nr. 2, 2012.**
255. **’’Inegalitatea lui Nesbitt’’ – Didactica Matematică, Anul II, Nr. 1, 2012.**
256. **’’Încă patru demonstraţii ale problemei L:155 din Sclipirea Minţii nr.VII 2011’’, Sclipirea Minţii, nr. IX, 2012, pp. 6-8.**
257. **’’New generalizations and new approaches for two IMO problems’’– Journal of Science and Arts, Year 12, Nr. 1(18), pp. 25-34, 2012.**

258. **’’O extindere şi o rafinare a inegalităţii lui Nesbitt’’ – RMT – nr. 1/2012**
259. **’’Inegalitatea lui Bergström şi soluţiile unor probleme interesante’’– Anuar Matematic, 2011, SSMR – Filiala Bistriţa-Năsăud, pp. 9-17.**
260. **’’On possible I.M.O. inequality and its generalized forms’’ - Gazeta Matematică, seria B, nr. 7-8-9 / 2011.**
261. **“Inegalităţi geometrice în poligoane convexe, de tip Begström – Mitrinovič” – Recreaţii Matematice, Iaşi, nr. 2/2011.**
262. **“A new generalization an I.M.O. problem” - Gazeta Matematică, seria B, nr. 5 / 2011.**

❖ Probleme publicate - în colaborare - cu Dumitru Bătineţu-Giurgiu în reviste de matematică internaţionale:

The American Mathematical Monthly:

11634 (Mar.2012), 11676 (Nov.2012), 11701 (Apr.2013), 11771 (Apr.2014), 11808 (Dec. 2014), 11851 (June_July.2015), 11875 (Dec.2015), 11889 (Feb.2016), 11935 (October 2016), 12024 (Feb.2018), 12068 (October 2018), 12220 (Dec. 2020), 12360 (Dec. 2022).

Mathematics Magazine:

1908(dec.2012), 1963(feb. 2015), 2012(feb.2017).

The College Mathematics Journal:

976(mai2012), 984(sep.2012), 986(nov.2012), 992(ian2013), 1003(mai2013), 1013(nov.2013), 1018(ian2014), 1018(mai2014), 1038(nov.2014), 1050(march2015), 1055(may2015), 1062(nov.2015), 1063(nov.2015), 1076(mai2016), 1122 (march2018), 1127 (mai2018), 1137(nov.2018), 1142(ian2019).

Math Horizons:

307(apr.2014), 311 (sep.2014).

School Science and Mathematics:

5172(oct.2011), 5178(nov.2011), 5184(dec.2011), 5190(ian.2012), 5196(feb.2012), 5202(mar.2012), 5208(apr.2012), 5215(mai2012), 5226(nov.2012), 5232(dec.2012), 5243(feb.2013), 5250(mar.2013), 5256(apr.2013), 5267(oct.2013), 5273(nov.2013), 5279(dec.2013), 5285(ian.2014), 5292(feb.2014), 5298(mar.2014), 5310(mai2014), 5322(nov.2014), 5327(dec.2014), 5339(feb.2015), 5346(mar.2015), 5351(apr.2015), 5357(mai.2015), 5363(oct.2015), 5381(ian.2016), 5392(mar.2016), 5398(apr.2016), 5405(mai.2016), 5411(oct.2016), 5418(nov.2016), 5429(ian.2017), 5434(feb.2017), 5443(mar.2017), 5453(may.2017), 5466(nov.2017), 5478(ian.2018), 5483(feb.2018), 5489(mar.2018), 5495(apr.2018), 5501(may.2018), 5514(nov.2018), 5536(mar.2019), 5567(dec.2019), 5573(ian.2020), 5580(feb.2020), 5616(dec.2020), 5656(nov.2021), 5685(apr.2022), 5691(may.2022), 5697(oct.2022), 5703(nov.2022), 5710(dec.2022), 5723(feb.2023), 5731(mar.2023), 5735(apr.2023), 5742(may.2023), 5745(oct.2023), 5764(ian.2024), 5808(apr.2025), 5812(jun.2025).

- **The Fibonacci Quarterly:**

B-1101(feb.2012), B-1108(mai2012), B-1109(mai2012), B-1113(aug.2012), B-1114(aug.2012), B-1117(nov.2012), B-1119(nov.2012), H-728(nov.2012), B-1121 (feb.2013), B-1124(feb.2013), B-1125(feb.2013), B-1129(mai2013), B-1130(mai2013), B-1132(aug.2013), B-1135(aug.2013), B-1135(aug.2013), B-1137(nov.2013), B-1138(nov.2013), B-1139(nov.2013), H-744(nov.2013), B-1142(feb.2014), B-1144(feb.2014), B-1145(feb.2014), H-748(feb.2014), H-751(mai.2014), H-752(mai2014), B-1151(aug.2014), H-755(aug.2014), H-758(aug.2014), B-1158 (nov.2014), B-1159 (nov.2014), B-1160 (nov.2014), H-760 (nov.2014), H-763 (nov.2014), H-765 (feb.2015), B-1170 (May.2015), H-769 (May.2015), H-771 (May.2015), H-772 (May.2015), B-1173 (August 2015), B-1175 (August 2015), B-1178 (November 2015), B-1179 (November 2015), B-1184 (Feb.2016), B-1185 (Feb. 2016), H-789 (Feb.2016), B-1194 (August 2016), H-793 (August 2016), H-794 (August 2016), B-1197 (November 2016), H-798 (November 2016), H-799 (November 2016), B-1202 (Feb.2017), B-1205 (Feb.2017), B-1207 (May 2017), H-805 (May 2017), B-1194 (August 2017), B-1212 (August 2017), B-1216 (November 2017), B-1219 (November 2017), H-813 (November 2017), H-816 (November 2017), H-819 (February 2018), H-820 (February 2018), B-1229 (May 2018), H-822 (May 2018), B-1232 (August 2018), H-825 (August 2018), H-827 (August 2018), B-1236 (November 2018), B-1240 (November 2018), B-1253 (August 2019), H-845 (August 2019), B-1258 (November 2019), B-1262 (February 2020), H-851 (February 2020), H-854 (May 2020), H-865 (November 2019), H-875 (May 2021), B-1292 (August 2021), B-1297 (November 2021), H-886 (November 2021), H-887 (November 2021), H-898 (May 2022), H-908 (November 2022), B-1322 (February 2023), H-919 (May 2023), B-1331 (August 2023), H-923 (August 2023), B-1337 (November 2023), H-934 (February 2024),

H-942 (August 2024), S-8 (August 2025), S-10 (August 2025).

- **Crux Mathematicorum:**

3823(mar.2013), 3867(sep.2013), 3875 (oct.2013), 3895(dec.2013), 3901(ian.2014), 3906(ian.2014), 3963(sept. 2014), 4031(apr. 2015), 4062(sept.2015), 4069(sept.2015), 4082(nov.2015), 4106(ian.2016), 4118(feb.2016), 4127(mar.2016), 4133(apr.2016), 4179(oct.2016), 4365(sep. 2018), 4376(oct.2018), 4390(nov.2018), 4424(mar.2019), 4506(ian.2020), 4619(feb. 2021), 99(june2021), MA152(ian.2022), 4719(feb.2022).

- **The Pentagon:**

692(fall2011), 693(fall2011), 704(spring2012), 715(fall2012), 716(fall2012), 736(fall2013), 753(fall2014), 754(fall2014), 763(spring2015), 764(spring2015), 784(spring2016), 793(fall2016), 794(fall2016), 804(spring2017), 805(spring2017), 806(spring2017), 813(fall2017), 814(fall2017), 815(fall2017), 818(fall2017), 826(spring2018), 827(spring2018), 828(spring2018), 834(fall2018), 835(fall2018), 847(spring2019), 848(spring2019), 854(fall2019), 855(fall2019), 868(spring2020), 869(spring2020), 873(fall2020), 887(spring2021), 888(spring2021), 896(fall2021), 899(fall2021), 900(fall2021), 906(spring2022), 912(fall2022), 913(fall2022), 914(fall2022), 921(spring2023), 925(spring2023), 942(spring2024), 943(spring2024).

- **Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matematica:**

217(no.44), 221(no.45), 234(no.47), 241(no.49), 242(no.49), 243(no.49), 255(no.50), 257(no.51), 261(no.52), 268 (no. 53), 277 (no. 55), 282 (no. 56), 286(no. 57), 294 (no. 58), 295 (no. 58), 296 (no. 59).

- **La Gaceta de la RSME:**

182(3-2011), 188(4-2011), 210(3-2012), 213(4-2012), 234(3-2013), 258(3-2014), 263(4-2014), 265(1-2015), 280(2-2015), 294(1-2016), 309(3-2016), 320(1-2017), 328(2-2017), 352(2-2018), 397(2-2020), 411(1-2021), 411(2-2021), 424(2-2021), 430(3-2021).

- **Math Problems:**

18(3-2011), 24(4-2011), 30(1-2012), 39(2-2012), 43(3-2012), 51(4-2012), 59(1-2013), 61(1-2013), J1(1-2013), J2(1-2013), 67(2-2013), J10(2-2013), 75(3-2013), J14(3-2013), 85(4-2013), J16(4-2013), J17(4-2013), 92(1-2014), J25(1-2014), J30(2-2014), 100(2-2014), 107(3-2014), J34(3-2014), 114(4-2014), J36(4-2014), 121(1-2015), J41(1-2015), 128 (2-2015), J46 (2-2015), 135(3-2015), 142(4-2015), 148(1-2016), 155(2-2016).

- **Asymmetry:**

V5-2(mar.2014)

- **Octogon Mathematical Magazine:**

PP.23201 (Vol. 22, No. 1, April, 2014), PP.23202 (Vol. 22, No. 1, April, 2014), PP.23203 (Vol. 22, No. 1, April, 2014), PP.24122 (Vol. 23, No. 2, October 2015), PP.24124 (Vol. 23, No. 2, October 2015).

- **Câteva sute de probleme - în colaborare - publicate în revistele naţionale de matematică.**

Îi mulţumim pentru întreaga activitate şi îi dorim, din inimă,

LA MULŢI ANI !

Bibliografie:

[1] M. Bencze, D. Sitaru, N. Stanciu, *Happy birthday, dear professor Dumitru M. Bătineţu-Giurgiu !*, Octogon Mathematical Magazine,Vol. 29, No. 1, April 2021.

[2] Editorial board of Math Magazine Sclipirea Minţii, *Dedication. Happy birthday, DMBG !,* Sclipirea Minţii, An XIII, Nr. 26, 2020, 6.

[3] M. Bencze, N. Stanciu, N. Ivăşchescu, *Profesorul Dumitru Bătineţu-Giurgiu la 80 de ani*, Alpha, An XXVI, Nr. 1, 2016, 5.

[4] M. Bencze, N. Stanciu, *Profesorul Dumitru Bătineţu-Giurgiu la 80 de ani*, Sclipirea Minţii, An IX, Nr. 17, 2016, 9.

[5] M. Bencze, N. Stanciu, *Dumitru Bătineţu-Giurgiu*, Octogon Mathematical Magazine,Vol. 19, No. 1, April 2011, pp 125-148.

[6] N. Stanciu, *Profesorul D.M. Bătinețu-Giurgiu la 75 de ani*, Gazeta Matematică, seria B, nr. 7-8-9 / 2011.

[7] N. Stanciu, *Profesorul D.M. Bătinețu-Giurgiu un matematician notabil*, Revista MateInfo.Ro, noiembrie, 2011.

2. On 1-st Problem of 1-st Balkan Mathematical Olympiad

Prof. Neculai Stanciu

1. Introduction

The first Balkan Mathematical Olympiad (BMO) was organized in Greece in 1984. That year four countries competed: Bulgaria, Cyprus, Greece and Romania.

Since then, the competition has been held annually. Nowadays there are ten member countries of BMO: Albania, Bulgaria, Cyprus, FYR Macedonia, Greece, Moldova, Montenegro, Romania, Serbia, Turkey. However, the hosting country may invite guest teams to participate (in 2014 was participate Azerbaijan, Italy, Kazakhstan, Kyrgyzstan, Saudi Arabia, Tajikistan, Turkmenistan, United Kingdom, Uzbekistan).

Each country sends up to six contestants, a team leader and a deputy leader. Like the IMO, this is an individual competition. On the competition students are given 4.5 hours to solve 4 problems. Each problem is worth 10 points, making 40 the maximum possible score.

Successful contestants are awarded first, second, and third prizes. A honorable mention is awarded to each student who does not receive a prize, but who has obtained 10 points on at least one question. The total number of prizes should not exceed 2/3 of participans, and the first, second, and third prizes are distributed approximately in the ratio 1:2:3.

31-th BMO was organized in 2014 in Bulgaria.

At 1-st BMO, Athens, Greece-May 6-10, 1984 the first problem was proposed by Greece:

1. If $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ $(n \geq 2)$ are positive real numbers with $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n=1$, prove that

$$\frac{\alpha_1}{1+\alpha_2+\alpha_3+...+\alpha_n}+\frac{\alpha_2}{1+\alpha_1+\alpha_3+...+\alpha_n}+...+\frac{\alpha_n}{1+\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_{n-1}} \geq \frac{n}{2n-1}$$,(BMO).

2. Main result

In the next we generalize the above problem:

Theorem I. If $a,b,m \in R_+, c,u,v \in R_+^*, n \in N^*, n \geq 2, x_k, y_k \in R_+^*, k=\overline{1,n}, X_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$,

$Y_n = \sum_{k=1}^{n} y_k$, where $bY_n + cX_n > v \cdot \max_{1\leq k\leq n} x_k$, then

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{aX_n + ux_k}{(bY_n + cX_n - vx_k)^m} \geq \frac{(an+u)n^m X_n}{(bnY_n + (cn-v)X_n)^m}, \text{ (1).}$$

Proof. We have $W = \sum_{k=1}^{n} \frac{(aX_n + ux_k)^{m+1}}{(aX_n + ux_k)^m (bY_n + cX_n - vx_k)^m} \overset{J.Radon}{\geq}$

$$\overset{J.Radon}{\geq} \frac{\left(\sum_{k=1}^{n}(aX_n + ux_k)\right)^{m+1}}{\left(\sum_{k=1}^{n}(aX_n + ux_k)(bY_n + cX_n - vx_k)\right)^m} =$$

$$= \frac{(anX_n + uX_n)^{m+1}}{\left(\sum_{k=1}^{n}(abX_nY_n + acX_n^2 + buY_nx_k + cuX_nx_k - uvx_k^2 - avX_nx_k)\right)^m} =$$

$$= \frac{(an+u)^{m+1} X_n^{m+1}}{(abnX_nY_n + acnX_n^2 + buX_nY_n + cuX_n^2 - uv\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - avX_n^2)^m}, \text{ (2).}$$

By AM-QM inequality we have

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \geq \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 = \frac{1}{n} X_n^2, \text{ (3).}$$

By (2) and (3) we deduce that

$$W \geq \frac{(an+u)^{m+1} n^m X_n^{m+1}}{(abn^2X_nY_n + acn^2X_n^2 + bunX_nY_n + cunX_n^2 - uvX_n^2 - avnX_n^2)^m} =$$

$$=\frac{(an+u)^{m+1}n^m X_n^{m+1}}{((an+u)bnY_n+(an+u)cnX_n-(an+u)vX_n)^m}=\frac{(an+u)n^m X_n}{(bnY_n+(cn-v)X_n)^m}$$, q.e.d.

I.1. If $b=0$, then (1) becomes

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{aX_n+ux_k}{(cX_n-vx_k)^m}\geq\frac{(an+u)n^m X_n}{(cn-v)^m X_n^m}=\frac{(an+u)n^m}{(cn-v)^m}X_n^{1-m}$$, (4).

I.2. If $m=1$, then (4) becomes

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{aX_n+ux_k}{cX_n-vx_k}\geq\frac{(an+u)n}{cn-v}$$, (5).

I.3. If $m=1$, then (1) becomes

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{aX_n+ux_k}{bY_n+cX_n-vx_k}\geq\frac{(an+u)nX_n}{bnY_n+(cn-v)X_n}$$, (6).

I.4. If $a=b=0, u=1$, then (6) becomes

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{cX_n-vx_k}\geq\frac{n}{cn-v}$$, (7).

I.5. If $a=0, X_n=Y_n, u=1$, then (6) becomes

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{(b+c)X_n-vx_k}\geq\frac{n}{(b+c)n-v}$$, (8).

I.6. If $b=c=v=1$, then (8) becomes

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{2X_n-x_k}\geq\frac{n}{2n-1}$$, (9).

I.7. If $X_n=1$, then by (9) we obtain (BMO).

Theorem II. If $a,b\in R_+$, $c,u,v\in R_+^*$, $n\in N, n\geq 2$, $x_k, y_k\in R_+^*, k=\overline{1,n}$, $X_n=\sum_{k=1}^{n}x_k$,

$Y_n=\sum_{k=1}^{n}y_k$, where $bY_n+cX_n>v\cdot\max_{1\leq k\leq n}x_k$, then

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{aX_n+ux_k}{bY_n+cX_n-vx_k}\geq\frac{(an+u)nX_n}{bnY_n+(cn-v)X_n}, \text{ (1).}$$

Proof 1. Let $W=\sum_{k=1}^{n}\frac{aX_n+ux_k}{bY_n+cX_n-vx_k}\Leftrightarrow vW=\sum_{k=1}^{n}\frac{avX_n+uvx_k}{bY_n+cX_n-vx_k}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow vW+nu=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{avX_n+uvx_k}{bY_n+cX_n-vx_k}+u\right)=$$

$$=\left((av+cu)X_n+buY_n\right)\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{bY_n+cX_n-vx_k}\overset{Bergstrom}{\geq}\frac{\left((av+cu)X_n+buY_n\right)n^2}{bnY_n+cnX_n-v\sum_{k=1}^{n}x_k}=$$

$$=\frac{\left((av+cu)X_n+buY_n\right)n^2}{bnY_n+cnX_n-vX_n}\Leftrightarrow vW\geq\frac{\left((av+cu)X_n+buY_n\right)n^2}{bnY_n+cnX_n-vX_n}-nu=$$

$$=\frac{avn^2X_n+cun^2X_n+bun^2Y_n-bun^2Y_n-cun^2X_n+uvnX_n}{bnY_n+(cn-v)X_n}=$$

$$=\frac{(an+u)vnX_n}{bnY_n+(cn-v)X_n}\Leftrightarrow W\geq\frac{(an+u)X_n}{bnY_n+(cn-v)X_n}, \text{ q.e.d.}$$

Proof 2. We have $W=\sum_{k=1}^{n}\frac{(aX_n+ux_k)^2}{(aX_n+ux_k)(bY_n+cX_n-vx_k)}=$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{(aX_n+ux_k)^2}{abX_nY_n+acX_n^2+buY_nx_k+cuX_nx_k-uvx_k^2-avX_nx_k}\overset{Bergstrom}{\geq}$$

$$\geq\frac{\left(\sum_{k=1}^{n}(aX_n+ux_k)\right)^2}{\sum_{k=1}^{n}(abX_nY_n+acX_n^2+buY_nx_k+cuX_nx_k-uvx_k^2-avX_nx_k)}=$$

$$=\frac{(an+u)^2X_n^2}{abnX_nY_n+acnX_n^2+buX_nY_n+cuX_n^2-uv\sum_{k=1}^{n}x_k^2-avX_n^2}, \text{ (2).}$$

By AM-QM inequality we have

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \geq \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 = \frac{1}{n} X_n^2, \text{ (3).}$$

By (2) and (3) we deduce that

$$W \geq \frac{(an+u)^2 nX_n^2}{abn^2 X_n Y_n + acn^2 X_n^2 + bunX_n Y_n + cunX_n^2 - uvX_n^2 - avnX_n^2} =$$

$$= \frac{(an+u)^2 nX_n}{(an+u)bnY_n + (an+u)cnX_n - (an+u)vX_n} = \frac{(an+u)nX_n}{bnY_n + (cn-v)X_n}, \text{ q.e.d.}$$

II.1. If $a = b = 0, u = 1$, then (1) becomes

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{cX_n - vx_k} \geq \frac{n}{cn-v}, \text{ (4).}$$

II.2. If $a = 0, X_n = Y_n, u = 1$, then (1) becomes

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{(b+c)X_n - vx_k} \geq \frac{n}{(b+c)n-v}, \text{ (5).}$$

II.3. If $b = c = v = 1$, then (5) becomes

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{2X_n - x_k} \geq \frac{n}{2n-1}, \text{ (6).}$$

II.4. If $X_n = 1$, then by (6) we obtain (BMO).

Art 9500

Math Journal
-8-

Prof. Marin Chirciu [1]

Mathematical Journal prezintă o selecție de probleme recente din diverse publicații de specialitate .

Problema801.

In acute ΔABC

$$\sum\frac{\sin B+\sin C}{\cos A}\ge 6\sqrt{3}.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam,RMM 12/2025

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{\sin B+\sin C}{\cos A}\overset{AG}{\ge}\sum\frac{2\sqrt{\sin B\sin C}}{\cos A}\overset{AG}{\ge}2\cdot 3\sqrt[3]{\prod\frac{\sqrt{\sin B\sin C}}{\cos A}}=6\sqrt[3]{\frac{\sin A\sin B\sin C}{\cos A\cos B\cos C}}=$$
$$=6\sqrt[3]{\prod\tan A}\ge 6\sqrt{3}=RHS.$$

Am folosit mai sus $\prod\tan A\ge 3\sqrt{3}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

In ΔABC

$$\sum\frac{\cos B+\cos C}{\sin A}\ge 2\sqrt{3}\left(\frac{2r}{R}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{\cos B+\cos C}{\sin A}=\sum\frac{2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}=\sum\frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}\overset{AG}{\ge}3\sqrt[3]{\prod\frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}}=$$

[1] *Profesor, Colegiul Național „Zinca Golescu"Pitești*

$$=3\sqrt[3]{\frac{\prod\cos\frac{B-C}{2}}{\prod\cos\frac{A}{2}}}=3\sqrt[3]{\frac{\frac{p^2+r^2+2Rr}{8R^2}}{\frac{p}{4R}}}=3\sqrt[3]{\frac{p^2+r^2+2Rr}{2Rp}}\overset{Gerretsen}{\geq}$$

$$\overset{Gerretsen}{\geq}3\sqrt[3]{\frac{16Rr-5r^2+r^2+2Rr}{2Rp}}=3\sqrt[3]{\frac{18Rr-4r^2}{2Rp}}\overset{Euler}{\geq}3\sqrt[3]{\frac{16r^2}{Rp}}\overset{Mitrinovic}{\geq}3\sqrt[3]{\frac{16r^2}{R\cdot\frac{3R\sqrt{3}}{2}}}=$$

$$=3\sqrt[3]{\frac{32r^2}{3R^2\sqrt{3}}}=3\sqrt[3]{\frac{8\cdot 4r^2}{R^2\left(\sqrt{3}\right)^3}}=3\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt[3]{\frac{4r^2}{R^2}}=2\sqrt{3}\left(\frac{2r}{R}\right)^{\frac{1}{3}}=RHS\ .$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema802.

Solve for reals

$$(x+1)(x^2+1)(x^3+1)=30x^3.$$

Math11/25

Soluție.

$$(x+1)(x^2+1)(x^3+1)=30x^3\Leftrightarrow(x^3+x^2+x+1)(x^3+1)=30x^3\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(x^3+x^2+x+1)\left(1+\frac{1}{x^3}\right)=30\Leftrightarrow x^3+x^2+x+1+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}=30\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)=28\Leftrightarrow\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2+\left(x+\frac{1}{x}\right)=28$$

$$\overset{x+\frac{1}{x}=t}{\Leftrightarrow}t^3+t^2-2t-30=0\Leftrightarrow(t-3)(t^2+4t+10)=0\Leftrightarrow t=3\Leftrightarrow x+\frac{1}{x}=3\Leftrightarrow x^2-3x+1=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Remarcă.

Solve for reals

$$1).\ (x+1)(x^2+1)(x^3+1)=8x^3.$$

Soluție.

Deducem că $x=1$ este soluția unică a ecuației.

2). $(x+1)(x^2+1)(x^3+1)=72x^3$.

Soluție.

Mulțimea soluțiilor ecuației este $S=\left\{2-\sqrt{3},2+\sqrt{3}\right\}$.

Let be $\lambda \geq 2$ fixed. Solve for reals

3). $(x+1)(x^2+1)(x^3+1)=\lambda(\lambda-1)(\lambda+2)x^3$.

Dezvoltări, Marin Chirciu

Mulțimea soluțiilor ecuației este $S=\left\{\frac{\lambda-\sqrt{\lambda^2-4}}{2},\frac{\lambda+\sqrt{\lambda^2-4}}{2}\right\}$.

Problema803.

Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil .

Fie H_1,H_2,H_3,H_4 ortocentrele triunghiurilor BCD,CDA,DAB,ABC.

Demonstrați că $AC=H_1H_3$ și $BD=H_2H_4$.

OL Vaslui 2023

Soluție.

Se folosesc afixele punctelor A,B,C,D,H_1,H_2,H_3,H_4.

Fie $A(a),B(b),C(c),D(d),H_1(h_1),H_2(h_2),H_3(h_3),H_4(h_4)$.

Folosind teorema lui Sylvester pentru $H_1(h_1)$ ortocentrul $\Delta BCD \Rightarrow h_1=b+c+d$.

Analog obținem: $h_2=c+d+a$, $h_3=d+a+b$, $h_4=a+b+c$.

Avem $H_1H_3=|b+c+d-d-a-b|=|c-a|=AC$.

Analog $H_2H_4=|c+d+a-a-b-c|=|d-b|=BD$.

Remarcă.

Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil .

Fie H_1, H_2, H_3, H_4 ortocentrele triunghiurilor BCD, CDA, DAB, ABC .

Demonstrați că perimetrul patrulaterului $ABCD$ este egal cu $H_1H_2 + H_2H_3 + H_3H_4 + H_4H_1$.

Marin Chirciu

Soluție.

Se folosesc afixele punctelor $A, B, C, D, H_1, H_2, H_3, H_4$.

Fie $A(a), B(b), C(c), D(d), H_1(h_1), H_2(h_2), H_3(h_3), H_4(h_4)$.

Folosind teorema lui Sylvester pentru $H_1(h_1)$ ortocentrul $\Delta BCD \Rightarrow h_1 = b + c + d$.

Analog obținem: $h_2 = c + d + a$, $h_3 = d + a + b$, $h_4 = a + b + c$.

Avem $H_1H_2 = |b + c + d - c - d - a| = |b - a| = AB$.

Analog $H_2H_3 = |c + d + a - d - a - b| = |c - b| = BC$.

$H_3H_4 = |d + a + b - a - b - c| = |d - c| = CD$.

$H_4H_1 = |a + b + c - b - c - d| = |a - d| = DA$.

Adunând cele patru egalități de mai sus obținem concluzia.

Problema804.

In ΔABC

$$\sum \frac{b+c}{2a}(b-c)^2 \geq \sum a(a-b).$$

Codeci Elena, Curtea de Argeș,OL2016,Argeș

Soluție.

$$\sum \frac{b+c}{2a}(b-c)^2 \geq \sum a(a-b) \Leftrightarrow \sum \frac{b+c}{2a}(b-c)^2 \geq \frac{1}{2}\sum (b-c)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum \frac{1}{2}(b-c)^2\left(\frac{b+c}{a} - 1\right) \geq 0.$$

Remarcă.

Let be $0 < \lambda \leq 2$ fixed. In ΔABC

$$\sum \frac{b+c}{\lambda a}(b-c)^2 \geq \sum a(a-b).$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$\sum \frac{b+c}{\lambda a}(b-c)^2 \geq \sum a(a-b) \Leftrightarrow \sum \frac{b+c}{\lambda a}(b-c)^2 \geq \frac{1}{2}\sum (b-c)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum (b-c)^2\left(\frac{b+c}{\lambda a}-\frac{1}{2}\right) \geq 0, \text{ vezi } \frac{b+c}{\lambda a}-\frac{1}{2} \overset{\lambda\leq 2}{\geq} \frac{b+c}{2a}-\frac{1}{2}=\frac{b+c-a}{2a}>0.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema805.

Solve for reals

$$[x]=\sqrt{x}+2.$$

Popescu Ionela, Câmpulung Muscel, OL2016,Argeș

Soluție.

$[x]=\sqrt{x}+2 \Leftrightarrow \sqrt{x}=[x]-2 \in \mathbf{N} \Rightarrow x \in \mathbf{N} \Rightarrow x=n^2, n>0$.

Ecuația se scrie $n^2=n+2 \Leftrightarrow n^2-n-2=0 \Leftrightarrow (n-2)(n+1)=0 \Leftrightarrow n=2 \Leftrightarrow x=4$

Remarcă.

Let be $\lambda \in \mathbf{N}$ fixed. Solve for reals

$$[x]=\sqrt{x}+\lambda(\lambda+1).$$

Marin Chirciu

Soluție.

Pentru $\lambda=0$ avem $[x]=\sqrt{x}$, cu soluții $x \in \{0,1\}$.

În continuare fie $\lambda \in \mathbf{N}^*$.

$[x]=\sqrt{x}+\lambda(\lambda+1) \Leftrightarrow \sqrt{x}=[x]-\lambda(\lambda+1) \in \mathbf{N} \Rightarrow x \in \mathbf{N} \Rightarrow x=n^2, n>0$.

Ecuația se scrie: $n^2=n+\lambda(\lambda+1) \Leftrightarrow n^2-n-\lambda(\lambda+1)=0 \Leftrightarrow (n-\lambda-1)(n+\lambda)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n=\lambda+1 \Leftrightarrow x=(\lambda+1)^2$.

Problema806.

Fie $a,b>1$ și funcția $f:(0,1)\cup(1,\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=a^{\log_x b^2}-\frac{a^2}{b}x$.

Să se calculeze distanța dintre punctele de intersecțieale graficului funcției f cu axa Ox.

Marin Chirciu, OL2016,Argeș

Soluție.

Rezolvăm ecuația $f(x)=0 \Leftrightarrow a^{\log_x b^2}-\frac{a^2}{b}x=0 \Leftrightarrow a^{\log_x b^2}=\frac{a^2}{b}x \Leftrightarrow \log_x b^2=\log_a \frac{a^2x}{b} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2\log_x b=\log_a a^2x-\log_a b \Leftrightarrow 2\log_x b=2+\log_a x-\log_a b \Leftrightarrow 2\frac{\lg b}{\lg x}=2+\frac{\lg x}{\lg a}-\frac{\lg b}{\lg a} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\lg a\lg b=2\lg x\lg a+\lg x\lg x-\lg a\lg b \Leftrightarrow (\lg x+2\lg a)(2\lg x-\lg b)=0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x_1=\frac{1}{a^2}, x_2=b$. Distanța cerută este $|x_1-x_2|=\left|\frac{1}{a^2}-b\right|=b-\frac{1}{a^2}$.

Problema807.

Solve for reals

$$\sqrt{\log_2 x(\log_x 2+\log_2 x-2)}+\sqrt{\log_2 x(\log_x 2+\log_2 x+2)}=2.$$

Matei Alina, OL2016,Argeș

Soluție.

Condiții de existență $x\in(0,\infty)$, $x\neq 1$. Cu substituția $\log_2 x=t$ ecuația se scrie:

$$\sqrt{t\left(\frac{1}{t}+t-2\right)}+\sqrt{t\left(\frac{1}{t}+t+2\right)}=2 \Leftrightarrow \sqrt{1+t^2-2t}+\sqrt{1+t^2+2t}=2 \Leftrightarrow \sqrt{(t-1)^2}+\sqrt{(t+1)^2}=2$$

$$\Leftrightarrow |t-1|+|t+1|=2 \Leftrightarrow t\in[-1,1] \Leftrightarrow \log_2 x\in[-1,1] \Leftrightarrow x\in\left[2^{-1},2\right] \Leftrightarrow x\in\left[\frac{1}{2},2\right].$$

Remarcă.

Let be $a>1$ fixed. Solve for reals

$$\sqrt{\log_a x(\log_x a+\log_a x-2)}+\sqrt{\log_a x(\log_x a+\log_a x+2)}=2.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Condiții de existență $x\in(0,\infty)$, $x\neq 1$. Cu substituția $\log_a x = t$ ecuația se scrie:

$$\sqrt{t\left(\frac{1}{t}+t-2\right)}+\sqrt{t\left(\frac{1}{t}+t+2\right)}=2 \Leftrightarrow \sqrt{1+t^2-2t}+\sqrt{1+t^2+2t}=2 \Leftrightarrow \sqrt{(t-1)^2}+\sqrt{(t+1)^2}=2$$

$$\Leftrightarrow |t-1|+|t+1|=2 \Leftrightarrow t\in[-1,1] \Leftrightarrow \log_a x\in[-1,1] \Leftrightarrow x\in\left[a^{-1},a\right] \Leftrightarrow x\in\left[\frac{1}{a},a\right].$$

Problema808.

Evaluate

$$\int \frac{1}{x\left(x^{2016}+1\right)}dx,\ x\in(0,\infty)$$

OL Argeș 2016

Soluție.

$$\int \frac{1}{x\left(x^{2016}+1\right)}dx=\int \frac{x^{2015}}{x^{2016}\left(x^{2016}+1\right)}dx \overset{x^{2016}=t}{=} \frac{1}{2016}\int \frac{1}{t(t+1)}dt=\frac{1}{2016}\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2016}\left(\int \frac{1}{t}dt-\int\frac{1}{t+1}dt\right)=\frac{1}{2016}\left(\ln t-\ln(t+1)\right)+C=\frac{1}{2016}\ln\frac{t}{t+1}+C.$$

Remarcă.

Evaluate

$$\int \frac{1}{x\left(x^{n}+1\right)}dx,\ x\in(0,\infty),\ n\in\mathbf{N}^*.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$\int \frac{1}{x\left(x^{n}+1\right)}dx=\int \frac{x^{n-1}}{x^{n}\left(x^{n}+1\right)}dx \overset{x^{n}=t}{=} \frac{1}{n}\int \frac{1}{t(t+1)}dt=\frac{1}{n}\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{n}\left(\int \frac{1}{t}dt-\int\frac{1}{t+1}dt\right)=\frac{1}{n}\left(\ln t-\ln(t+1)\right)+C=\frac{1}{n}\ln\frac{t}{t+1}+C.$$

Problema809.

Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil și M un punct pe cercul circumscris acestuia, diferit de vârfurile patrulaterului.

Fie H_1,H_2,H_3,H_4 ortocentrele triunghiurilor MAB, MBC, MCD, MDA.

Fie E, F mijloacele segmentelor AB ,respectiv CD.

a)Demonstrați că $H_1H_2H_3H_4$ este paralelogram.

b).Arătați că $H_1H_3 = 2EF$.

OL Argeș 2016

Soluție.

a) Fie $A(a), B(b), C(c), D(d), M(m), H_1(h_1), H_2(h_2), H_3(h_3), H_4(h_4), E(e), F(f)$.
Folosind teorema lui Sylvester pentru $H_1(h_1)$ ortocentrul $\Delta MAB \Rightarrow h_1 = m + a + b$.

Analog obținem: $h_2 = m + b + c$, $h_3 = m + c + d$, $h_4 = m + d + a$.

Avem $H_1H_2H_3H_4$ este paralelogram $\Leftrightarrow h_1 + h_3 = h_2 + h_4$.

b). E este mijlocul lui $AB \Leftrightarrow e = \frac{a+b}{2}$; F este mijlocul lui $CD \Leftrightarrow f = \frac{c+d}{2}$.

Obținem $H_1H_2 = |h_1 - h_3| = |m + a + b - m - c - d| = |a + b - c - d| = 2\left|\frac{a+b}{2} - \frac{c+d}{2}\right| =$

$= 2|e - f| = 2EF$.

Remarcă.

Fie ABC un triunghi și M un punct pe cercul circumscris acestuia, diferit de vârfurile triunghiului.

Fie H_1, H_2, H_3 ortocentrele triunghiurilor MBC, MCA, MAB.

Arătați că $\Delta H_1H_2H_3 \equiv \Delta ABC$.

Marin Chirciu

Soluție.

Se folosesc afixele punctelor $A, B, C, M, H_1, H_2, H_3$.

Fie $A(a), B(b), C(c), M(m), H_1(h_1), H_2(h_2), H_3(h_3)$.

Folosind teorema lui Sylvester pentru $H_1(h_1)$ ortocentrul $\Delta MBC \Rightarrow h_1 = m + b + c$.

Analog obținem: $h_2 = m + c + a$, $h_3 = m + a + b$.

Obținem $H_1H_2 = |h_1 - h_2| = |m + b + c - m - c - a| = |b - a| = AB$.

Analog $H_2H_3 = BC$ și $H_3H_1 = CA$.

Din $H_1H_2 = AB$, $H_2H_3 = BC$ și $H_3H_1 = CA \Rightarrow \Delta H_1H_2H_3 \equiv \Delta ABC$ (LLL).

Problema 810.

Solve for reals

$$\sqrt[3]{5-2x}+\sqrt[3]{x^2+x+2}+\sqrt[3]{-x^2+x-1}=\sqrt[3]{6}.$$

OL Argeș 2016

Soluție.

$$\sqrt[3]{5-2x}+\sqrt[3]{x^2+x+2}+\sqrt[3]{-x^2+x-1}=\sqrt[3]{6} \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{5-2x}+\sqrt[3]{x^2+x+2}+\sqrt[3]{-x^2+x-1}\right)^3=6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(5-2x+x^2+x+2-x^2+x-1\right)+$$

$$+3\left(\sqrt[3]{5-2x}+\sqrt[3]{x^2+x+2}\right)\left(\sqrt[3]{x^2+x+2}+\sqrt[3]{-x^2+x-1}\right)\left(\sqrt[3]{-x^2+x-1}+\sqrt[3]{5-2x}\right)=6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6+3\left(\sqrt[3]{5-2x}+\sqrt[3]{x^2+x+2}\right)\left(\sqrt[3]{x^2+x+2}+\sqrt[3]{-x^2+x-1}\right)\left(\sqrt[3]{-x^2+x-1}+\sqrt[3]{5-2x}\right)=6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{5-2x}+\sqrt[3]{x^2+x+2}\right)\left(\sqrt[3]{x^2+x+2}+\sqrt[3]{-x^2+x-1}\right)\left(\sqrt[3]{-x^2+x-1}+\sqrt[3]{5-2x}\right)=0.$$

1). $\left(\sqrt[3]{5-2x}+\sqrt[3]{x^2+x+2}\right)=0 \Leftrightarrow x^2+x+2=2x-5 \Leftrightarrow x^2-x+7=0, \Delta<0$.

2). $\left(\sqrt[3]{x^2+x+2}+\sqrt[3]{-x^2+x-1}\right)=0 \Leftrightarrow x^2+x+2=x^2-x+1 \Leftrightarrow 2x=-1 \Leftrightarrow x=\frac{-1}{2}$.

3). $\left(\sqrt[3]{-x^2+x-1}+\sqrt[3]{5-2x}\right)=0 \Leftrightarrow x^2-x+1=5-2x \Leftrightarrow x^2+x-4=0 \Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$.

Remarcă.

Let be $\lambda \ge 1$ fixed. Solve for reals

$$\sqrt[3]{5\lambda-2x}+\sqrt[3]{x^2+x+2\lambda}+\sqrt[3]{-x^2+x-\lambda}=\sqrt[3]{6\lambda}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Mulțimea soluțiilor ecuației este $S=\left\{\frac{-\lambda}{2},\frac{-1\pm\sqrt{1+16\lambda}}{2}\right\}$.

Problema 811.

Solve

$$x^{\log_5 3}+x=2+16\log_5 x.$$

OL Argeș 2016

Soluție.

Condiții de existență $x\in(0,\infty)$.

Folosind $x^{\log_5 3}=3^{\log_5 x}$ avem $3^{\log_5 x}+x=2+16\log_5 x \Leftrightarrow 5^t+3^t=2+16t$, unde $t=\log_5 x$.

Ecuația este de forma $f(t)=g(t)$, unde f este funcție strict convexă(sumă de două funcții exonențiale, deci strict convexe), iar g este funcție de gradul întâi.

O astfel de ecuație are cel mult două soluții.

Se observă că $t=0$ și $t=2$ sunt soluții, deci $x=1$ și $x=25$ sunt singurele soluții ale ecuației.

Remarcă.

Let be $a>1, b>1, a^2+b^2=2(\lambda+1)$ fixed. Solve for reals

$$x^{\log_a b}+x=2+\lambda\log_a x.$$

Soluție.

Mulțimea soluțiilor ecuației este $S=\{1,a^2\}$.

Let be $a>1, b>1, a+b=2+\lambda$ fixed. Solve for reals

Solve

$$x^{\log_a b}+x=2+\lambda\log_a x.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Mulțimea soluțiilor ecuației este $S=\{1,a\}$.

Problema812.

Solve for reals

$$\begin{cases}\sqrt[100]{x}+\sqrt[100]{x+2}=\sqrt[100]{y}+\sqrt[100]{y-2}\\ x+y+x^2+y^2=14\end{cases}.$$

OL Argeș 2023

Soluție.

Funcția $f(x)=\sqrt[100]{x}+\sqrt[100]{x+2}$, $x\geq 0$ este strict crescătoare, deci injectivă.

Din prima ecuație avem $f(x)=f(y-2)\Rightarrow x=y-2$.

Din $\begin{cases} x=y-2 \\ x+y+x^2+y^2=14 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y=x+2 \\ x+(x+2)+x^2+(x+2)^2=14 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y=x+2 \\ x^2+3x-4=0 \end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases} y=x+2 \\ x=1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y=3 \\ x=1 \end{cases}$.

Soluția sistemului este $(x,y)=(1,3)$.

Remarcă.

Let be $\lambda\geq 0$ and $n\in\mathbf{N}^*$ fixed. Solve for reals

$$\begin{cases} \sqrt[2n]{x}+\sqrt[2n]{x+\lambda}=\sqrt[2n]{y}+\sqrt[2n]{y-\lambda} \\ x+y+x^2+y^2=\lambda^2+3\lambda+4 \end{cases}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Soluția sistemului este $(x,y)=(1,\lambda+1)$.

Problema813.

Solve for reals

$$x^4+2=8xy-16y^4.$$

OL Argeș 2016

Soluție.

$x^4+2=8xy-16y^4\Leftrightarrow(x^4+1)+(16y^4+1)=8xy\Leftrightarrow$

Avem $8xy=(x^4+1)+(16y^4+1)\overset{AG}{\geq}2\sqrt{x^4\cdot 1}+2\sqrt{16y^4\cdot 1}=2x^2+8y^2\Rightarrow 8xy\geq 2x^2+8y^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(x-2y)^2\leq 0$.

Egalitatea are loc pentru $x^4 = 1$, $16y^4 = 1$ și $x = 2y \Leftrightarrow (x,y) = \left(1, \frac{1}{2}\right), \left(-1, \frac{-1}{2}\right)$.

Remarcă.

Let be $\lambda > 0$ fixed. Solve for reals

$$x^4 + 2\lambda^4 = 8\lambda^2 xy - 16y^4.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Mulțimea soluțiilor ecuației este $S = \left\{\left(\lambda, \frac{\lambda}{2}\right), \left(-\lambda, \frac{-\lambda}{2}\right)\right\}$.

Problema814.

If $x, y, z > 0$, $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$ then

$$\frac{y+z}{\sqrt{2}} \le \sqrt{1-x}.$$

T.Bernabid Nail, Mathematical Inequalities 11/2025

Soluție.

Cu substituția $(x,y,z) = (\cos A, \cos B, \cos C)$,acute ΔABC, inegalitatea se scrie:

$$\frac{\cos B + \cos C}{\sqrt{2}} \le \sqrt{1-\cos A} \Leftrightarrow \frac{2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{\sqrt{2}} \le \sqrt{2\sin^2\frac{A}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} \le 2\sin\frac{A}{2} \Leftrightarrow \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2} \le \sin\frac{A}{2} \Leftrightarrow \cos\frac{B-C}{2} \le 1,$$

vezi $\cos x \le 1, \forall x \in \mathbf{R}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = \frac{1}{2}$.

Remarcă.

If $x, y, z > 0$, $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$ then

$$\sqrt{2}\sum x \le \sum\sqrt{1-x}.$$

Marin Chirciu

Lema.

If $x, y, z > 0$, $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$ then

$$\frac{y+z}{\sqrt{2}} \le \sqrt{1-x}.$$

Soluție.

Cu substituția $(x, y, z) = (\cos A, \cos B, \cos C)$, acute ΔABC, inegalitatea se scrie:

$$\frac{\cos B + \cos C}{\sqrt{2}} \le \sqrt{1-\cos A} \Leftrightarrow \frac{2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{\sqrt{2}} \le \sqrt{2\sin^2\frac{A}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} \le 2\sin\frac{A}{2} \Leftrightarrow \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2} \le \sin\frac{A}{2} \Leftrightarrow \cos\frac{B-C}{2} \le 1,$$

vezi $\cos x \le 1, \forall x \in \mathbf{R}$.

Folosind **Lema** și sumând obținem concluzia.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = \frac{1}{2}$.

Problema815.

If $x, y, z > 0$, $x + y + z = 1$ then

$$7\sum xy \le 2 + 9xyz.$$

Kunihiko Chikaya, Japan, Mathematical Inequalities9/2025

Soluție.

Folosim pqr -Method. Notăm $p = \sum x = 1, q = \sum xy \le \frac{1}{3}, r = xyz$.

Inegalitatea se scrie:

$7q \le 2 + 9r$, vezi inegalitatea lui Schur $p^3 - 4pq + 9r \ge 0$, $p = 1 \Leftrightarrow 9r \ge 4q - 1$.

Rămâne să arătăm că:

$7q \le 2 + 4q - 1 \Leftrightarrow 3q \le 1$, vezi $1 = (x+y+z)^2 \ge 3(xy + yz + zx) = 3q \Rightarrow 3q \le 1$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Remarcă.

In ΔABC holds

$$1).\ 7\sum \frac{r^2}{r_a r_b} \le 2 + \frac{9r^2}{p^2}.$$

Soluție.

Lema.

If $x, y, z > 0$, $x + y + z = 1$ then

$$7\sum xy \le 2 + 9xyz.$$

Folosind **Lema** pentru $(x, y, z) = \left(\frac{r}{r_a}, \frac{r}{r_b}, \frac{r}{r_c}\right)$ obținem: $7\sum \frac{r^2}{r_a r_b} \le 2 + \frac{9r^2}{p^2}$.

$$2).\ 7\sum \frac{r^2}{h_a h_b} \le 2 + \frac{9Rr}{2p^2}.$$

3). If $x, y, z > 0$, $x + y + z = 1$ and $\lambda \ge \frac{1}{3}$ then

$$\sum xy \le \lambda + 9(1 - 3\lambda)xyz.$$

Soluție.

Folosim pqr -Method. Notăm $p = \sum x = 1, q = \sum xy \le \frac{1}{3}, r = xyz$.

Inegalitatea se scrie:

$q \le \lambda + 9(1 - 3\lambda)xyz$, care rezultă din inegalitatea lui Schur $p^3 - 4pq + 9r \ge 0$, $p = 1 \Leftrightarrow$ $1 - 4q + 9r \ge 0 \Leftrightarrow 9r \ge 4q - 1$.

Rămâne să arătăm că:

$q \le \lambda + (1 - 3\lambda)(4q - 1) \Leftrightarrow 3q(4\lambda - 1) \le (4\lambda - 1)$, $\lambda \ge \frac{1}{3} > \frac{1}{4} \Leftrightarrow 3q \le 1$, vezi $1 = (x + y + z)^2 \ge 3(xy + yz + zx) = 3q \Rightarrow 3q \le 1$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = \frac{1}{3}$.

4). If $x, y, z > 0$, $x + y + z = 1$ then

$$4\sum xy \le 1+9xyz.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Luăm $\lambda = \frac{1}{4}$ în inegalitatea din față.

Problema816.

In ΔABC, $a+b+c=3$ then

$$\sum \frac{a}{\sqrt{a+b+1}} \ge \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Konstantinos Geronikolas, Greece, Mathematical Inequalities9/2025

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{a}{\sqrt{a+b+1}} = \sum \frac{a^2}{a\sqrt{a+b+1}} = \sum \frac{a^2}{\sqrt{a}\sqrt{a^2+ab+a}} \overset{CS}{\ge} \frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum \sqrt{a}\sqrt{a^2+ab+a}} \overset{CBS}{\ge}$$

$$\overset{CBS}{\ge} \frac{\left(\sum a\right)^2}{\sqrt{\sum a \sum\left(a^2+ab+a\right)}} = \frac{3^2}{\sqrt{3\sum\left(a^2+ab+a\right)}} = \frac{9}{\sqrt{3\left(\sum a^2+\sum ab+\sum a\right)}} \overset{SOS}{\ge}$$

$$\overset{SOS}{\ge} \frac{9}{\sqrt{3\left(\sum a^2+\sum a^2+3\right)}} = \frac{9}{\sqrt{3\left(2\sum a^2+3\right)}} \overset{\sum a^2 \le \frac{9}{2}}{\ge} \frac{9}{\sqrt{3\left(2\cdot\frac{9}{2}+3\right)}} = \frac{9}{\sqrt{3\cdot 12}} = \frac{3}{2} = RHS.$$

Am folosit mai sus $\sum a^2 \le \frac{9}{2}$, vezi $a < b+c = 3-a \Rightarrow 2a < 3 \Leftrightarrow a < \frac{3}{2} \Leftrightarrow a^2 < \frac{3a}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum a^2 \le \sum \frac{3a}{2} = \frac{3}{2}\sum a = \frac{3}{2}\cdot 3 = \frac{9}{2}.$$

Inegalitatea este strictă.

Remarcă.

In ΔABC, $a+b+c=3$ and $\lambda \ge 0$ then

$$\sum \frac{a}{\sqrt{a+b+\lambda}} \ge \frac{3}{\sqrt{\lambda+3}}.$$

Marin Chirciu

Problema817.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=\frac{\pi}{2}$ then

$$\sum\frac{\cos(y-z)}{\sin x}\geq 6.$$

Mathematical Inequalities9/2025

Soluție.

Lema.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=\frac{\pi}{2}$ then

$$\frac{\cos(y-z)}{\sin x}=1+\frac{2\tan y\tan z}{\tan x(\tan y+\tan z)}.$$

Demonstrație.

$$\frac{\cos(y-z)}{\sin x}=\frac{\cos(y-z)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-y-z\right)}=\frac{\cos(y-z)}{\cos(y+z)}=\frac{\cos y\cos z+\sin y\sin z}{\cos y\cos z-\sin y\sin z}=\frac{1+\tan y\tan z}{1-\tan y\tan z}=.$$

$$=1+\frac{2\tan y\tan z}{\tan x(\tan y+\tan z)}.$$

Am folosit mai sus $\sum\tan x\tan y=1$.

$$LHS=\sum\frac{\cos(y-z)}{\sin z}\overset{Lema}{=}\sum\left(1+\frac{2\tan y\tan z}{\tan x(\tan y+\tan z)}\right)=3+2\sum\frac{a}{b+c}\overset{Nesbitt}{\geq}3+2\cdot\frac{3}{2}=6=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c\Leftrightarrow x=y=z=\frac{\pi}{6}$.

Remarcă.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=\frac{\pi}{2}$ then

$$\sum\frac{\cos y\cos z}{\sin x}\geq\frac{9}{2}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$\sum\frac{\cos y\cos z}{\sin x}\geq\frac{9}{2}\Leftrightarrow\sum\frac{\cos(y-z)+\cos(y+z)}{\sin x}\geq 9\Leftrightarrow\sum\frac{\cos(y-z)+\sin x}{\sin x}\geq 9\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sum\frac{\cos(y-z)}{\sin x}\geq 6.$$

Problema818.

If $M\in Int(\Delta ABC)$ and A',B',C' the projections of A,B,C on sides BC,CA,AB then

$$\sum\frac{MA^2}{MB'+MC'}\geq\sum MA.$$

Crăciun Gheorghe, Mathematics Inequalities9/2025

Soluție.

Lema.

If $M\in Int(\Delta ABC)$ and A',B',C' the projections of A,B,C on sides BC,CA,AB then

$$\sum MA\geq 2\sum MA'.$$

Erdos-Mordell

$$LHS=\sum\frac{MA^2}{MB'+MC'}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum MA\right)^2}{\sum(MB'+MC')}=\frac{\left(\sum MA\right)^2}{2\sum MA'}\overset{Lema}{\geq}\sum MA=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral și $M\equiv O$.

Remarcă.

If $M\in Int(\Delta ABC)$ and A',B',C' the projections of A,B,C on sides BC,CA,AB then

$$\sum\frac{MA^{n+1}}{MB'+MC'}\geq 3\left(\sum\frac{MA}{3}\right)^n, n\in\mathbf{N}^*.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema.

If $M\in Int(\Delta ABC)$ and A',B',C' the projections of A,B,C on sides BC,CA,AB then

$$\sum MA\geq 2\sum MA'.$$

Erdos-Mordell

$$LHS=\sum\frac{MA^{n+1}}{MB'+MC'}\overset{Holder}{\geq}\frac{\left(\sum MA\right)^{n+1}}{3^{n-1}\sum\left(MB'+MC'\right)}=\frac{\left(\sum MA\right)^{n+1}}{3^{n-1}\cdot 2\sum MA'}\overset{Lema}{\geq}3\left(\sum\frac{MA}{3}\right)^{n}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral și $M\equiv O$.

<u>Problema819.</u>

In ΔABC holds

$$1).\ 36r\leq\sum\frac{r_a}{\sin^2\frac{A}{2}}\leq\frac{9R^2}{r}.$$

Marin Chirciu, Mathematical Inequalities, 9/2025

<u>Soluție.</u>

Folosim $\sum\frac{r_a}{\sin^2\frac{A}{2}}=\frac{p^2+r^2+4Rr}{r}$ și $16Rr-5r^2\leq p^2\leq 4R^2+4Rr+3r^2$,(Gerretsen).

$$2).\ \frac{72r^2}{R}\leq\sum\frac{h_a}{\sin^2\frac{A}{2}}\leq\frac{8\left(R^4-7r^4\right)}{Rr^2}.$$

Marin Chirciu

<u>Soluție.</u>

Vezi $\sum\frac{h_a}{\sin^2\frac{A}{2}}=\frac{p^2\left(p^2+2r^2-12Rr\right)+r^3\left(4R+r\right)}{2Rr^2}$ și $16Rr-5r^2\leq p^2\leq 4R^2+4Rr+3r^2$.

$$3).\ \sum\frac{h_a}{\sin^2\frac{A}{2}}\geq\sum\frac{r_a}{\sin^2\frac{A}{2}}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

<u>Soluție.</u>

Folosim $\sum\frac{r_a}{\sin^2\frac{A}{2}}=\frac{p^2+r^2+4Rr}{r}$ și $\sum\frac{h_a}{\sin^2\frac{A}{2}}=\frac{p^2\left(p^2+2r^2-12Rr\right)+r^3\left(4R+r\right)}{2Rr^2}$.

Problema820.

In ΔABC holds

$$\sum \frac{r_a}{\cos^2 \frac{A}{2}} \geq 6R.$$

Adil Abdullayev, Azerbaijan, Mathematical Inequalities9/2025

Soluție.

Lema.

In ΔABC holds

$$\sum \frac{r_a}{\cos^2 \frac{A}{2}} = \frac{p^2(r-8R)+(4R+r)^3}{p^2}.$$

$$LHS = \sum \frac{r_a}{\cos^2 \frac{A}{2}} = \frac{p^2(r-8R)+(4R+r)^3}{p^2} = (r-8R)+\frac{(4R+r)^3}{p^2} \overset{Gerretsen}{\geq} (r-8R)+\frac{(4R+r)^3}{\frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}} =$$

$$= \frac{R(r-8R)+2(2R-r)(4R+r)}{R} = \frac{8R^2-3Rr-2r^2}{R} \overset{Euler}{\geq} \frac{6R^2}{R} = 6R = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

In ΔABC holds

1). $6R \leq \sum \frac{r_a}{\cos^2 \frac{A}{2}} \leq \frac{3R^3}{2r^2}$.

Soluție.

Folosim $\sum \frac{r_a}{\cos^2 \frac{A}{2}} = \frac{p^2(r-8R)+(4R+r)^3}{p^2}$.

2). $12r \leq \sum \frac{h_a}{\cos^2 \frac{A}{2}} \leq 6R$.

Soluție.

Folosim $\sum \frac{r_a}{\cos^2 \frac{A}{2}} = \frac{p^2(r-8R)+(4R+r)^3}{p^2}$.

$$3).\ \sum \frac{r_a}{\cos^2 \frac{A}{2}} \geq 6R \geq \sum \frac{h_a}{\cos^2 \frac{A}{2}}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Folosim $\sum \frac{r_a}{\cos^2 \frac{A}{2}} = \frac{p^2(r-8R)+(4R+r)^3}{p^2}$ și $\sum \frac{h_a}{\cos^2 \frac{A}{2}} = \frac{p^2\left(p^2+2r^2-4Rr\right)+r(4R+r)^3}{2Rp^2}$.

Problema821.

If $a,b,c>0$ then

$$\frac{a^5+b^5}{a^2b^2\left(a^3+b^3\right)}+\frac{b^5+c^5}{b^2c^2\left(b^3+c^3\right)}+\frac{c^5+a^5}{c^2a^2\left(c^3+a^3\right)} \geq \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

Zaza Mzhavanadze

Soluție

Lema

If $a,b,c>0$ then

$$\frac{a^5+b^5}{a^3+b^3} \geq \frac{a^2+b^2}{2}.$$

Demonstrație

Avem $\frac{a^5+b^5}{a^3+b^3} \geq \frac{a^2+b^2}{2} \Leftrightarrow 2\left(a^5+b^5\right) \geq \left(a^2+b^2\right)\left(a^3+b^3\right) \Leftrightarrow \left(a^2-b^2\right)\left(a^3-b^3\right) \geq 0$.

$$LHS = \sum \frac{a^5+b^5}{a^2b^2\left(a^3+b^3\right)} \overset{Lema}{\geq} \frac{1}{2}\sum \frac{a^2+b^2}{a^2b^2} = \frac{1}{2}\sum\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right) = \frac{1}{2}\cdot 2\sum \frac{1}{a^2} = \sum \frac{1}{a^2} = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

Remarca.

If $a,b,c>0$ and $n\in\mathbf{N}$ then

$$\frac{a^{2n+3}+b^{2n+3}}{a^2b^2\left(a^{2n+1}+b^{2n+1}\right)}+\frac{b^{2n+3}+c^{2n+3}}{b^2c^2\left(b^{2n+1}+c^{2n+1}\right)}+\frac{c^{2n+3}+a^{2n+3}}{c^2a^2\left(c^{2n+1}+a^{2n+1}\right)}\ge\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Lema

If $a,b,c>0$ and $n\in\mathbf{N}$ then

$$\frac{a^{2n+3}+b^{2n+3}}{a^{2n+1}+b^{2n+1}}\ge\frac{a^2+b^2}{2}.$$

Demonstrație

Avem $\frac{a^{2n+3}+b^{2n+3}}{a^{2n+1}+b^{2n+1}}\ge\frac{a^2+b^2}{2}\Leftrightarrow 2\left(a^{2n+3}+b^{2n+3}\right)\ge\left(a^2+b^2\right)\left(a^{2n+1}+b^{2n+1}\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^{2n+3}-a^{2n+1}b^2-a^2b^{2n+1}+b^{2n+3}\ge 0\Leftrightarrow\left(a^2-b^2\right)\left(a^{2n+1}-b^{2n+1}\right)\ge 0$.

$$LHS=\frac{a^{2n+3}+b^{2n+3}}{a^{2n+1}+b^{2n+1}}\overset{Lema}{\ge}\frac{1}{2}\sum\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}=\frac{1}{2}\sum\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)=\frac{1}{2}\cdot 2\sum\frac{1}{a^2}=\sum\frac{1}{a^2}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

Problema822.

If $a,b,c>0$ then

$$2\sum\frac{a}{b^2+c^2}\ge\sum\frac{b+c}{a^2+bc}.$$

Nguyen Viet Hung, Vietnam, Mathematics Teacher 6/2025

Soluție.

Lema.

If $a,b,c>0$ then

$$\frac{b}{a^2+c^2}+\frac{c}{a^2+b^2}\ge\frac{b+c}{a^2+bc}.$$

Demonstrație.

$$\frac{b}{a^2+c^2}+\frac{c}{a^2+b^2}=\frac{b^2}{b\left(a^2+c^2\right)}+\frac{c^2}{c\left(a^2+b^2\right)}\overset{CS}{\geq}\frac{(b+c)^2}{b\left(a^2+c^2\right)+c\left(a^2+b^2\right)}=$$

$=\dfrac{(b+c)^2}{(b+c)\left(a^2+bc\right)}=\dfrac{b+c}{a^2+bc}$, cu egal pentru $b=c$.

Folosind **Lema** și sumând obținem concluzia.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

Remarcă.

1). If $a,b>0$ and $\lambda\geq 0$ then

$$\frac{a}{\lambda^2+b^2}+\frac{b}{\lambda^2+a^2}\geq\frac{a+b}{\lambda^2+ab}.$$

Soluție.

$$\frac{a}{\lambda^2+b^2}+\frac{b}{\lambda^2+a^2}=\frac{a^2}{a\left(\lambda^2+b^2\right)}+\frac{b^2}{b\left(\lambda^2+a^2\right)}\overset{CS}{\geq}\frac{(a+b)^2}{a\left(\lambda^2+b^2\right)+b\left(\lambda^2+a^2\right)}=$$

$=\dfrac{(a+b)^2}{(a+b)\left(\lambda^2+ab\right)}=\dfrac{a+b}{\lambda^2+ab}$, cu egal pentru $a=b$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b$.

2). If $a,b,c>0$ and $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1$ then

$$\sum\frac{b+c}{a^2}\geq 2.$$

Soluție.

Folosim $\dfrac{a}{b^2}+\dfrac{b}{a^2}\geq\dfrac{a+b}{ab}\Leftrightarrow(a+b)(a-b)^2\geq 0$, cu egal pentru $a=b$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=3$.

3). If $a,b,c>0$ then

$$\sum\frac{b+c}{a^2}\geq 2\sum\frac{1}{a}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema823.

If $x, y, z > 0$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$ then

$$\sum\sqrt{x+yz} \ge \sqrt{xyz}+\sum\sqrt{x}.$$

University of California, Berkeley-USA

Soluție.

Cu substituția $(a,b,c)=\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y},\frac{1}{z}\right)$ problema se reformulează:

If $a,b,c>0$, $a+b+c=1$ then

$$\sum\sqrt{a+bc} \ge 1+\sum\sqrt{bc}.$$

$$LHS=\sum\sqrt{a+bc}=\sum\sqrt{a(a+b+c)+bc}=\sum\sqrt{a^2+ab+bc+ca}=\sum\sqrt{(a+b)(a+c)} \overset{CBS}{\ge}$$

$$\overset{CBS}{\ge}\sum\sqrt{\left(a+\sqrt{bc}\right)^2}=\sum\left(a+\sqrt{bc}\right)=\sum a+\sum\sqrt{bc}=1+\sum\sqrt{bc}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Remarcă.

In ΔABC holds

$$1).\ \sum\sqrt{\frac{r}{r_a}+\frac{r^2}{r_b r_c}} \ge 1+\sum\sqrt{\frac{r^2}{r_b r_c}}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema.

If $x, y, z > 0$, $x+y+z=1$ then

$$\sum\sqrt{x+yz} \ge 1+\sum\sqrt{yz}.$$

Folosind **Lema** pentru $(x,y,z)=\left(\frac{r}{r_a},\frac{r}{r_b},\frac{r}{r_c}\right)$ obținem: $\sum\sqrt{\frac{r}{r_a}+\frac{r^2}{r_b r_c}} \ge 1+\sum\sqrt{\frac{r^2}{r_b r_c}}$.

$$2).\ \sum\sqrt{\frac{r}{h_a}+\frac{r^2}{h_bh_c}}\geq 1+\sum\sqrt{\frac{r^2}{h_bh_c}}.$$

Marin Chirciu

Problema824.

In acute ΔABC holds

$$\sum\left(\cos^2 A+\frac{1}{\cos A}\right)\geq\frac{27}{4}.$$

Marin Chirciu, IneMath9/2025

Soluție.

Folosim $\sum\cos^2 A\geq\frac{3}{4}$, vezi $\sum\cos^2 A=\frac{6R^2+4Rr+r^2-p^2}{2R^2}\geq\frac{3}{4}$ și $\sum\frac{1}{\cos A}\geq 6$.

Remarcă.

In acute ΔABC holds

$$\sum\left(\cos^2 A+\frac{1}{\cos A}\right)\geq 7-\frac{r^2}{R^2}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosim $\sum\cos^2 A=\frac{6R^2+4Rr+r^2-p^2}{2R^2}$ și $\sum\frac{1}{\cos A}=\frac{p^2+r^2-4R^2}{p^2-(2R+r)^2}$.

Remarcă.

In ΔABC holds

$$\sum\left(\sin^2 A+\cos^2\frac{A}{2}\right)\leq\frac{9}{2}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosim $\sum\sin^2 A=\frac{p^2-r^2-4Rr}{2R^2}\leq\frac{9}{4}$ și $\sum\cos^2\frac{A}{2}=2+\frac{r}{2R}\leq\frac{9}{4}$.

Remarcă.

In ΔABC holds

$$\sum\left(\sin^2 A+\cos^2\frac{A}{2}\right)\le\frac{17}{4}+\frac{r^2}{R^2}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosim $\sum\sin^2 A=\frac{p^2-r^2-4Rr}{2R^2}$ și $\sum\cos^2\frac{A}{2}=2+\frac{r}{2R}$.

Problema825.

Let be $\lambda\ge 0$ fixed. Solve for reals

$$(x-2y)^2+20\lambda^2=12x(\lambda-x)+6y(4\lambda-y).$$

Math9/2025

Soluție.

$(x-2y)^2+20\lambda^2=12x(\lambda-x)+6y(4\lambda-x)\Leftrightarrow 13x^2-4xy+10y^2-12\lambda x-24\lambda y+20\lambda^2=0$

$\Leftrightarrow(3x-2\lambda)^2+(3y-4\lambda)^2+(2x-y)^2=0$,

cu egal pentru $3x-2\lambda=0$, $3y-4\lambda=0$ și $2x-y=0\Leftrightarrow(x,y)=\left(\frac{2\lambda}{3},\frac{4\lambda}{3}\right)$.

Remarcă.

Let be $\lambda\in\mathbf{R}$ fixed. Solve for reals

$$(x-2y)^2+5\lambda^2=6x(\lambda-2x)+6y(2\lambda-y).$$

Marin Chirciu

Soluție.

Deducem că $(x,y)=\left(\frac{\lambda}{3},\frac{2\lambda}{3}\right)$ este soluția unică a ecuației.

Problema826.

In $a,b,c>0$, $abc=1$ then

$$\sum\left(a+\frac{1}{b}\right)^2\geq 3\left(a+b+c+1\right).$$

Mathematical Inequalities9/2025

Soluție.

Lema.

In $a,b>0$ then

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)^2\geq 4\left(a+\frac{1}{b}-1\right).$$

Demonstrație.

$\left(a+\frac{1}{b}\right)^2\geq 4\left(a+\frac{1}{b}-1\right)\Leftrightarrow\left(a+\frac{1}{b}-2\right)^2\geq 0$.

$\sum\left(a+\frac{1}{b}\right)^2\overset{Lema}{\geq}\sum 4\left(a+\frac{1}{b}-1\right)=4\sum a+4\sum\frac{1}{a}-12\overset{(1)}{\geq}3\sum a+3=RHS$,

unde $4\sum a+4\sum\frac{1}{a}-12\overset{(1)}{\geq}3\sum a+3\Leftrightarrow\sum a+4\sum\frac{1}{a}\geq 15$,vezAM-AG și $abc=1$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$

Remarcă.

In $a,b,c>0$, $abc=1$ and $0\leq\lambda\leq\frac{5}{3}$ then

$$\sum\left(a+\frac{\lambda}{b}\right)^2\geq\frac{3}{4}(\lambda+1)^2\left(a+b+c+1\right).$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema.

In $a,b>0$ and $\lambda\geq 0$ then

$$\left(a+\frac{\lambda}{b}\right)^2\geq(\lambda+1)\left(2a+\frac{2\lambda}{b}-\lambda-1\right).$$

Demonstrație.

$$\left(a+\frac{\lambda}{b}\right)^2 \geq (\lambda+1)\left(2a+\frac{2\lambda}{b}-\lambda-1\right) \Leftrightarrow \left(a+\frac{\lambda}{b}-\lambda-1\right)^2 \geq 0 .$$

Folosind **Lema** obținem:

$$\sum\left(a+\frac{\lambda}{b}\right)^2 \overset{Lema}{\geq} \sum(\lambda+1)\left(2a+\frac{2\lambda}{b}-\lambda-1\right) = 2(\lambda+1)\sum a + 2\lambda(\lambda+1)\sum\frac{1}{a} - 3(\lambda+1)^2 \overset{(1)}{\geq}$$
$$\overset{(1)}{\geq} \frac{3}{4}(\lambda+1)^2\left(\sum a+1\right) = RHS ,$$

unde $2(\lambda+1)\sum a + 2\lambda(\lambda+1)\sum\frac{1}{a} - 3(\lambda+1)^2 \overset{(1)}{\geq} \frac{3}{4}(\lambda+1)^2\left(\sum a+1\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{5-3\lambda}{4}\sum a + 2\lambda\sum\frac{1}{a} \geq \frac{15}{4}(\lambda+1)$, care rezultă din $0 \leq \lambda \leq \frac{5}{3}$, inegalitatea mediilor și $abc = 1$.

Obținem $\frac{5-3\lambda}{4}\sum a + 2\lambda\sum\frac{1}{a} \overset{AG}{\geq} \frac{5-3\lambda}{4}\cdot 3\sqrt[3]{abc} + 2\lambda\cdot 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}} = \frac{5-3\lambda}{4}\cdot 3 + 2\lambda\cdot 3 = \frac{15}{4}(\lambda+1)$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = 1$.

Problema827.

Solve for naturals

$$\sqrt[3]{x^3+4x^2+3} + \sqrt{x^2+x+3} = x+4 .$$

Sakthivel Thirunavukkarasu, Math9/2025

Soluție.

$$LHS = \sqrt[3]{x^3+4x^2+3} + \sqrt{x^2+x+3} \overset{(1)}{\geq} (x+1)+3 = x+4 = RHS ,$$

cu egal pentru $\sqrt[3]{x^3+4x^2+3} = x+1$ și $\sqrt{x^2+x+3} = 3 \Leftrightarrow x = 2$.

Să arătăm(1):

i). $\sqrt[3]{x^3+4x^2+3} \geq x+1 \Leftrightarrow x^2-3x+2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) \geq 0, x \in \mathbf{N}$.

i). $\sqrt{x^2+x+3} \geq 3 \Leftrightarrow x^2+x-6 \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+3) \geq 0, x \geq 2, x \in \mathbf{N}$.

Deducem că $x = 2$ este soluția unică a ecuației.

Remarcă.

Solve for naturals

$$\sqrt[3]{x^3-2x^2+2}+\sqrt{x^2+x+2}=x+1.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS=\sqrt[3]{x^3-2x^2+1}+\sqrt{x^2+x+2}\overset{(1)}{\geq}(x-1)+2=x+1=RHS,$$

cu egal pentru $\sqrt[3]{x^3-2x^2+1}=x-1$ și $\sqrt{x^2+x+2}=2\Leftrightarrow x=1$.

Să arătăm inegalitatea (1):

i). $\sqrt[3]{x^3-2x^2+1}\geq x-1 \Leftrightarrow x^2-3x+2\geq 0\Leftrightarrow (x-1)(x-2)\geq 0, x\in\mathbf{N}$.

ii). $\sqrt{x^2+x+2}\geq 2 \Leftrightarrow x^2+x-2\geq 0\Leftrightarrow (x-1)(x+2)\geq 0, x\geq 1, x\in\mathbf{N}$.

Deducem că $x=1$ este soluția unică a ecuației.

Problema828.

J719. If $a,b,c>0$ holds

$$\sqrt{2\prod\left(a^2+b^2\right)}+4abc\geq\prod(a+b).$$

Ioachim U.Pinari, Italy, Mathematical Reflections, Nr.6/2025, J719.

Solution .

With substitution $(x,y,z)=\left(\frac{b}{a},\frac{c}{b},\frac{a}{c}\right), xyz=1\Rightarrow$

$$\Rightarrow\sqrt{2\prod\left(a^2+b^2\right)}+4abc\geq\prod(a+b)\Leftrightarrow\sqrt{2\prod\left(x^2+1\right)}+4\geq\prod(x+1).$$

Using pqr -Method: $p=\sum x, q=\sum xy, r=xyz=1$ we have:

$\prod\left(x^2+1\right)=1+p^2+q^2+r^2-2pr-2q$ and $\prod(x+1)=1+p+q+r$.

$$\sqrt{2\prod\left(x^2+1\right)}+4\geq\prod(x+1)\Leftrightarrow\sqrt{2\left(1+p^2+q^2+r^2-2pr-2q\right)}+4\geq 1+p+q+r\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{2\left(1+p^2+q^2+r^2-2pr-2q\right)}\geq p+q+r-3, r=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{2\left(p^2+q^2+2-2p-2q\right)}\geq p+q-2\Leftrightarrow 2\left(p^2+q^2+2-2p-2q\right)\geq(p+q-2)^2\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 2\left(p^2+q^2+2-2p-2q\right)\geq\left(p+q-2\right)^2 \Leftrightarrow p^2+q^2\geq 2pq \Leftrightarrow \left(p-q\right)^2\geq 0$.

Equality occurs if and only if $x=y=z=1 \Leftrightarrow a=b=c$.

Problema829.

Solve for reals

$$x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{3}}=4.$$

Mathematical Inequalities9/2025

Soluție.

Pentru $x\geq 0$, notăm $x^{\frac{1}{6}}=t$, $t>0$ și ecuația se scrie: $t^3-t^2=4 \Leftrightarrow t^3-t^2-4=0 \Leftrightarrow$ $\left(t-2\right)\left(t^2+t+2\right)=0 \Leftrightarrow x^{\frac{1}{6}}=2 \Leftrightarrow x=2^6 \Leftrightarrow x=64$.

Deducem că $x=64$ este soluția unică a ecuației.

Remarcă.

Let be $n\in\mathbf{N}^*$ fixed. Solve for reals

$$x^{\frac{1}{n}}-x^{\frac{1}{n+1}}=2^n.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Pentru $x\geq 0$, notăm $x^{\frac{1}{n(n+1)}}=t$, $t>0$ și ecuația se scrie: $t^{n+1}-t^n=2^n \Leftrightarrow t^{n+1}-t^n-2^n=0 \Leftrightarrow$ $\left(t-2\right)\left(t^n+t^{n-1}+2t^{n-2}+4t^{n-3}+...+2^{n-2}t+2^{n-1}\right)=0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow t=2 \Leftrightarrow x^{\frac{1}{n(n+1)}}=2 \Leftrightarrow x=2^{n(n+1)}$.

Deducem că $x=2^{n(n+1)}$ este soluția unică a ecuației.

Problema830.

In ΔABC

$$1).12r\leq\sum\frac{a^2}{r_a}\leq 6R.$$

Soluție.

Folosim $\sum\frac{a^2}{r_a}=4\left(R+r\right)$.

$$2).\ 12r \le \sum \frac{a^2}{h_a} \le 6R\left(\frac{R}{2r}\right)^2.$$

Soluție.

Folosim $\sum \frac{a^2}{h_a} = \frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{r}$.

$$3).\ \sum \frac{a^2}{h_a} \ge \sum \frac{a^2}{r_a}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema831.

Solve the equation

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} + \left(\frac{1}{6}\right)^{x} - \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^{x} = 1.$$

Adomniței Constantin,OL2012,Vaslui

Soluție

Cu substituția $x+1=-2t$ ecuația se scrie:

$$4^t + 6\cdot 36^t - 6\cdot 18^t = 1 \Leftrightarrow \left(2^t-1\right)\left(2^t+1\right) + 6\cdot 18^t\left(2^t-1\right) = 0 \Leftrightarrow \left(2^t-1\right)\left(2^t+6\cdot 18^t+1\right) = 0 \Leftrightarrow$$
$$2^t = 1 \Leftrightarrow t = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

Deducem că $x=-1$ este soluția unică a ecuației.

Remarcă.

Let be $a>1$ fixed.Solve the equation

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{x+1} + \left(\frac{1}{a(a+1)}\right)^{x} - \sqrt{a}\left(\frac{\sqrt{a}}{a(a+1)}\right)^{x} = 1.$$

Marin Chirciu

Soluție

Cu substituția $x+1=-2t$ ecuația se scrie:

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{-2t}+\left(\frac{1}{a(a+1)}\right)^{-2t-1}-\sqrt{a}\left(\frac{\sqrt{a}}{a(a+1)}\right)^{-2t-1}=1 \Leftrightarrow a^{2t}+a^{2t+1}(a+1)^{2t+1}-a(a+1)^{2t+1}-1=0$$

$$\Leftrightarrow a^{2t}-1+a(a+1)^{2t+1}\left(a^{2t}-1\right)=0 \Leftrightarrow \left(a^{2t}-1\right)\left(1+a(a+1)^{2t+1}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^{2t}=1 \Leftrightarrow t=0 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1.$$

Deducem că $x=-1$ este soluția unică a ecuației.

Problema832.

In ΔABC

$$\sum\frac{m_a}{h_a}\geq\frac{\sum a^2}{\sum ab}+2.$$

Adil Abdullayev, Azerbaijan, RMM 8/2025

Soluție

Folosind $\frac{\sum a^2}{\sum ab}+2=\frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum ab}=\frac{4p^2}{p^2+r^2+4Rr}$ inegalitatea se scrie: $\sum\frac{m_a}{h_a}\geq\frac{4p^2}{p^2+r^2+4Rr}$,

$$\sum\frac{m_a}{h_a}\overset{Tereshin}{\geq}\sum\frac{\frac{b^2+c^2}{4R}}{\frac{bc}{2R}}=\sum\frac{b^2+c^2}{2bc}=\frac{p^2+r^2-2Rr}{4Rr}\overset{(1)}{\geq}\frac{4p^2}{p^2+r^2+4Rr}.$$

Remarcă.

In ΔABC

$$\sum\frac{m_a}{h_a}\geq\frac{7}{2}-\frac{r}{R}.$$

Marin Chirciu

Soluție

$$\sum\frac{m_a}{h_a}\overset{Tereshin}{\geq}\sum\frac{\frac{b^2+c^2}{4R}}{\frac{bc}{2R}}=\sum\frac{b^2+c^2}{2bc}=\frac{p^2+r^2-2Rr}{4Rr}\overset{Gerretsen}{\geq}\frac{7}{2}-\frac{r}{R}$$

Problema833.

If $a,b,c>0$, $a+b+c=1$ then

$$\sum \frac{a}{b+c}+\frac{27abc}{2\left(\sum a\right)^2}\geq 2\,.$$

Imad Zak, Lebanon, Mathematical Inequalities9/2025

Soluție.

Folosim pqr -Method. Notăm $p=\sum a=1, q=\sum ab\leq \frac{1}{3}, r=abc\leq \frac{1}{27}$.

Avem $\sum \frac{a}{b+c}=\frac{p^3-2pq}{pq-r}$.

$$LHS=\sum \frac{a}{b+c}+\frac{27abc}{2\left(\sum a\right)^2}=\frac{p^3-2pq+3r}{pq-r}+\frac{27r}{2p^2}\overset{p=1}{=}\frac{1-2q+3r}{q-r}+\frac{27r}{2}\overset{(1)}{\geq}2=RHS\,,$$

unde $\frac{1-2q+3r}{q-r}+\frac{27r}{2}\overset{(1)}{\geq}2 \Leftrightarrow 2\left(1-2q+3r\right)+27r\left(q-r\right)\geq 4\left(q-r\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 27r^2-10r+8q-27qr\leq 2 \Leftrightarrow q\left(8-27r\right)\leq 2+10r-27r^2, \left(8-27r\right)>0$, vezi $r\leq \frac{1}{27}$

$\Leftrightarrow q\leq \frac{2+4r-27r^2}{8-27r}$, care rezultă din $q\leq \frac{1}{3}$, vezi $p^2\geq 3q, p=1\Rightarrow 1\geq 3q \Leftrightarrow q\leq \frac{1}{3}$.

Este suficient să arătăm că:

$\frac{1}{3}\leq \frac{2+10r-27r^2}{8-27r}\Leftrightarrow 81r^2-57r+2\leq 0\Leftrightarrow \left(27r-1\right)\left(3r-2\right)\leq 0$, vezi $r\leq \frac{1}{27}<\frac{2}{3}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Remarcă.

If $a,b,c>0$, $a+b+c=1$ and $0\leq \lambda\leq 1$ then

$$\sum \frac{a}{b+c}+\frac{\lambda abc}{\left(\sum a\right)^2}\geq \frac{2\lambda+81}{54}\,.$$

Marin Chirciu

Problema834.

Solve the system

$$\begin{cases} \log_5(x+1) = \log_3(7-y) \\ \log_5(y+1) = \log_3(7-z) \\ \log_5(z+1) = \log_3(7-x) \end{cases}.$$

Vlad Petru, Sibiu, Concursul”Gheorghe Lazăr”, Sibiu, 23-25 noiembrie 2012

Soluție

Domeniul de definiție $x, y, z \in (-1,7)$. Soluția sistemului este $(x, y, z) = (4,4,4)$.

Dacă $x > 4 \Rightarrow \log_3(7-y) = \log_5(x+1) \overset{x>4}{>} \log_5(4+1) = 1 \Rightarrow \log_3(7-y) > 1 \Rightarrow 7-y > 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow y < 4 \Rightarrow \log_3(7-z) = \log_5(y+1) \overset{y<4}{<} \log_5(4+1) = 1 \Rightarrow \log_3(7-z) < 1 \Rightarrow 7-z < 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow z > 4 \Rightarrow \log_3(7-x) = \log_5(z+1) \overset{z>4}{>} \log_5(4+1) = 1 \Rightarrow \log_3(7-x) > 1 \Rightarrow 7-x > 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow x < 4$, contradicție cu $x > 4$.

Analog dacă presupunem că $x < 4 \Rightarrow x > 4$.

Deci $x = 4$, de unde $y = z = 4$.

Remarcă.

Let be $a > 1$ fixed.Solve the system

$$\begin{cases} \log_{2a+1}(x+1) = \log_{2a-1}(4a-1-y) \\ \log_{2a+1}(y+1) = \log_{2a-1}(4a-1-z) \\ \log_{2a+1}(z+1) = \log_{2a-1}(4a-1-x) \end{cases}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Deducem că $(x, y, z) = (2a, 2a, 2a)$ este soluția unică a sistemului.

Problema835.

In ΔABC

$$\sum r_a \sec\frac{A}{2} \geq 6\sqrt{3}r.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam, RMM 8/2025

Soluție

$$LHS=\sum r_a\sec\frac{A}{2}\overset{Chebyshev}{\geq}\frac{1}{3}\sum r_a\sum\sec\frac{A}{2}\overset{Jensen}{\geq}\frac{1}{3}(4R+r)\cdot 2\sqrt{3}\overset{Jensen}{\geq}\frac{1}{3}\cdot 9r\cdot 2\sqrt{3}=6\sqrt{3}r=RHS.$$

Remarcă.

In ΔABC

$$\sum(r_b+r_c)\sec\frac{A}{2}\leq\frac{2Rp}{3r}.$$

Marin Chirciu

Soluție

$$LHS=\sum(r_b+r_c)\sec\frac{A}{2}\overset{Chebyshev}{\leq}\frac{1}{3}\sum(r_b+r_c)\sum\sec\frac{A}{2}=\frac{1}{3}\cdot 2\sum r_a\sum\sec\frac{A}{2}\leq\frac{2}{3}(4R+r)\cdot\frac{2p}{3r}\overset{Euler}{\leq}$$

$$\overset{Euler}{\leq}\frac{2}{3}\cdot\frac{9R}{2}\cdot\frac{2p}{3r}=\frac{2Rp}{3r}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema836.

If $4n+1$ is a prime number,then n is the sum of two squares

Fermat`Theorem=4n+1=prime

Exemple.

n=1,4n+1=5=1^2+2^2.

n=3,4n+1=13=2^2+3^2.

n=4,4n+1=17=1^2+4^2.

n=7,4n+1=29=2^2+5^2.

n=9,4n+1=37=1^2+6^2.

n=10,4n+1=41=4^2+5^2.

n=13,4n+1=53=2^2+7^2.

....

Nota.

Problema a fost demonstrata de Leonard Euler in 1740.

Problema837.

Every even natural number $n \geq 2$ then n is the sum of two prime numbers.

Godbach`Conjecture

Exemple.

4=2+2

6=3+3

8=3+5

10=3+7=5+5

12=5+7

14=3+7=7+7.

....

Problema838.

Solve for integers

$$169x^2 - 13xy + 12y = 119 .$$

Marin Chirciu, SGM 10/2014, S:E14.263, OL2016 Argeș

Soluție.

$$169x^2 - 13xy + 12y = 119 \Leftrightarrow y = \frac{169x^2 - 119}{13x - 12} .$$

$$y = \frac{169x^2 - 119}{13x - 12} \in \mathbf{Z} \Rightarrow \begin{cases} 13x - 12 \mid 169x^2 - 119 \\ 13x - 12 \mid 13x - 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 13x - 12 \mid 169x^2 - 119 \\ 13x - 12 \mid 13(13x - 12) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 13x - 12 \mid 169x^2 - 119 \\ 13x - 12 \mid 169x^2 - 156x \end{cases} \Rightarrow 13x - 12 \mid 169x^2 - 119 - \left(169x^2 - 156x\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 13x - 12 \mid 156x - 119 \Rightarrow \begin{cases} 13x - 12 \mid 156x - 119 \\ 13x - 12 \mid 12(13x - 12) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 13x - 12 \mid 156x - 119 \\ 13x - 12 \mid 156x - 144 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 13x - 12 \mid 156x - 119 - (156x - 144) \Rightarrow 13x - 12 \mid 25 \Rightarrow x \in \{-1, 1\} .$$

Mulțimea soluțiilor ecuației este $(x, y) \in \{(-1, -2), (1, 50)\}$.

Problema839.

If $x, y, z \in \mathbf{Z}$, $x+y+z=0$, $x^2+y^2+z^2=2t$, $t \in \mathbf{N}^*$ then $2\sum x^4$ is a perfect square.

Laura Molea, Gheorghe Molea, OL2016 Argeș

Soluție.

Lema.

If $x, y, z \in \mathbf{Z}$, $x+y+z=0$, $x^2+y^2+z^2=2t$, $t \in \mathbf{N}^*$ then

$$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=t^2.$$

Demonstrație.

$$0=(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)=2t+2(xy+yz+zx) \Rightarrow xy+yz+zx=-t.$$

$$t^2=(xy+yz+zx)^2=x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2xyz(x+y+z)=x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2xyz\cdot 0=$$

$$=x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 \Rightarrow x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=t^2.$$

$$LHS=2\sum x^4=2\left[\left(\sum x^2\right)^2-2\sum x^2y^2\right]\overset{Lema}{=}2\left[(2t)^2-2t^2\right]=2\cdot 2t^2=4t^2=pp.$$

Remarcă.

If $x, y, z \in \mathbf{Z}$, $x+y+z=0$, $x^2+y^2+z^2=2\lambda$, $\lambda \in \mathbf{N}^*$ then $\sum x^4-\sum x^2y^2$ is a perfect square.

Marin Chirciu

Soluție.

Lema.

If $x, y, z \in \mathbf{Z}$, $x+y+z=0$, $x^2+y^2+z^2=2\lambda$, $\lambda \in \mathbf{N}^*$ then

$$\sum x^2y^2=\lambda^2.$$

Demonstrație.

$$0=(x+y+z)^2=\sum x^2+2\sum xy=2\lambda+2\sum xy \Rightarrow \sum xy=-\lambda.$$

$$\lambda^2=\left(\sum xy\right)^2=\sum x^2y^2+2xyz(x+y+z)=\sum x^2y^2+2xyz\cdot 0=\sum x^2y^2$$

$$\Rightarrow \sum x^2y^2=\lambda^2.$$

$$LHS=\sum x^4-\sum x^2y^2=\left(\sum x^2\right)^2-2\sum x^2y^2-\sum x^2y^2\overset{Lema}{=}(2\lambda)^2-2\lambda^2-\lambda^2=\lambda^2=pp.$$

Problema840.

If $x,y,z>0$, $xyz=1$ then

$$\sum\frac{x+y}{x^2+y^2}\le\sum\sqrt{x}\ .$$

OL2016 Argeș

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{x+y}{x^2+y^2}\overset{SOS}{\le}\sum\frac{2}{x+y}\overset{AG}{\le}\sum\frac{2}{2\sqrt{xy}}=\sum\frac{1}{\sqrt{xy}}\overset{xyz=1}{=}\sum\sqrt{x}=RHS\ .$$

Egalitatea are loc dacă și nmai dacă $x=y=z=1$.

Remarcă.

If $x,y,z>0$, $xyz=1$ then

1). $$\sum\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}\le\sum\sqrt{x}\ .$$

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}\overset{SOS}{\le}\sum\frac{2}{x+y}\overset{AG}{\le}\sum\frac{2}{2\sqrt{xy}}=\sum\frac{1}{\sqrt{xy}}\overset{xyz=1}{=}\sum\sqrt{x}=RHS$$

Egalitatea are loc dacă și nmai dacă $x=y=z=1$.

Remarcă.

If $x,y,z>0$, $xyz=1$ then

2). $$\sum\frac{x^n+y^n}{x^{n+1}+y^{n+1}}\le\sum\sqrt{x}\ ,\ n\in\mathbf{N}\ .$$

Dezvoltări,Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{x^n+y^n}{x^{n+1}+y^{n+1}}\overset{SOS}{\le}\sum\frac{2}{x+y}\overset{AG}{\le}\sum\frac{2}{2\sqrt{xy}}=\sum\frac{1}{\sqrt{xy}}\overset{xyz=1}{=}\sum\sqrt{x}=RHS\ .$$

Am folosit mai sus $\frac{x^n+y^n}{x^{n+1}+y^{n+1}}\le\frac{2}{x+y}\Leftrightarrow 2\left(x^{n+1}+y^{n+1}\right)\ge(x+y)\left(x^n+y^n\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-y)(x^n - y^n) \geq 0$, vezi factorii au același semn.

Egalitatea are loc dacă și nmai dacă $x = y = z = 1$.

Problema841.

Solve for reals

$$x + \sqrt{3^x \log_2(x+4)} = \sqrt{\log_2(x+4)}.$$

Marin Ionescu, OL2016 Argeș

Soluție.

Domeniul de definiție este $D = [-3, \infty)$.

$x + \sqrt{3^x \log_2(x+4)} = \sqrt{\log_2(x+4)} \Leftrightarrow x = \sqrt{\log_2(x+4)}\left(1 - \sqrt{3^x}\right)$.

Cazul1) $x > 0 \Rightarrow \sqrt{3^x} > 1 \Rightarrow \sqrt{\log_2(x+4)}\left(1 - \sqrt{3^x}\right) < 0$, fals.

Cazul2) $x < 0 \Rightarrow \sqrt{3^x} < 1 \Rightarrow \sqrt{\log_2(x+4)}\left(1 - \sqrt{3^x}\right) > 0$, fals.

$x = 0$ verifică ecuația.

Deducem că $x = 0$ este soluția unică a ecuației.

Remarcă.

Let be $a > 1$, $\lambda > 1$ fixed. Solve for reals

$$x + \sqrt{\lambda^x \log_a(x+2a)} = \sqrt{\log_a(x+2a)}.$$

Soluție.

Domeniul de definiție este $D = [1-2a, \infty)$.

$x + \sqrt{\lambda^x \log_a(x+4)} = \sqrt{\log_a(x+4)} \Leftrightarrow x = \sqrt{\log_a(x+2a)}\left(1 - \sqrt{\lambda^x}\right)$.

Cazul1) $x > 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda^x} > 1 \Rightarrow \sqrt{\log_a(x+2a)}\left(1 - \sqrt{\lambda^x}\right) < 0$, fals.

Cazul2) $x < 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda^x} < 1 \Rightarrow \sqrt{\log_a(x+2a)}\left(1 - \sqrt{\lambda^x}\right) > 0$, fals.

$x = 0$ verifică ecuația.

Remarcă.

Let be $a>1$, $b>1$, $\lambda>1$ fixed. Solve for reals

$$x+\sqrt{\lambda^x\log_a(x+b)}=\sqrt{\log_a(x+b)}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Deducem că $x=0$ este soluția unică a ecuației.

Problema842.

Solve for reals

$$\sqrt{9-8\sqrt{33-8x}}=x-3.$$

Marin Chirciu, OL2016 Argeș

Soluție.

Domeniul de definiție este $D=\left[3,\frac{33}{8}\right]$.

$\sqrt{9-8\sqrt{33-8x}}=x-3 \Leftrightarrow x^4-12x^3+36x^2+512x-2112=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-4)(x+6)(x^2-14x+88)=0$.

Soluția ecuației este $x=4$.

Problema843.

If $x,y>0$, $xy=1$ then

$$\frac{1}{x^5+y^3}+\frac{1}{x^3+y^5}\leq\frac{x+y}{2}.$$

Dinu Teodorescu, Târgoviște, Concursul „Discipolii lui Lazăr„Ploiești, 24 martie 2012

Soluție

Avem $x^5+y^3\overset{AG}{\geq}2\sqrt{x^5y^3}\overset{xy=1}{=}2x$ și analog $x^3+y^5\geq 2y$.

Obținem $LHS=\frac{1}{x^5+y^3}+\frac{1}{x^3+y^5}\leq\frac{1}{2x}+\frac{1}{2y}\overset{xy=1}{=}\frac{x+y}{2}=RHS$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=1$.

Remarcă.

If $x, y > 0$, $xy = 1$ and $n \in \mathbf{N}$ then

$$\frac{1}{x^{n+2} + y^n} + \frac{1}{x^n + y^{n+2}} \le \frac{x+y}{2}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Avem $x^{n+2} + y^n \overset{AG}{\ge} 2\sqrt{x^{n+2}y^n} \overset{xy=1}{=} 2x$ și analog $x^n + y^{n+2} \ge 2y$.

Obținem $LHS = \frac{1}{x^{n+2} + y^n} + \frac{1}{x^n + y^{n+2}} \le \frac{1}{2x} + \frac{1}{2y} \overset{xy=1}{=} \frac{x+y}{2} = RHS$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = 1$.

Problema844.

If $a, b, c > 0$, $abc = 1$ then

$$\left(\sum \frac{a}{b}\right)^2 \ge 3\sum a^2.$$

Nguyen Ngoc Phuc, Vietnam, Mathematical Inequalities 8/2025

Soluție

Avem $\frac{a^2}{b^2} + \frac{a}{c} + \frac{a}{c} \overset{AG}{\ge} 3\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{a}{c}} = 3\sqrt[3]{\frac{a^4}{b^2c^2}} = 3a^2$ și analoagele.

$$\sum\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{a}{c} + \frac{a}{c}\right) \ge \sum 3a^2 \Leftrightarrow \sum \frac{a^2}{b^2} + 2\sum \frac{b}{a} \ge \sum 3a^2 \Leftrightarrow \left(\sum \frac{a}{b}\right)^2 \ge 3\sum a^2.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = 1$.

Remarcă.

1). If $a, b, c > 0$, $abc = 1$ then

$$\left(\sum \frac{a}{b}\right)^2 \ge 3\sum ab.$$

2). If $a, b, c > 0$, $abc = 1$ then

$$\sum \frac{a}{b} \geq \sum a.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema845.

Solve for reals

$$\sqrt{9-8\sqrt{33-8x}} = x-3.$$

Marin Chirciu, OL2016 Argeș

Soluție.

$$f(x) = e^x + \lambda \cos x \Rightarrow f'(x) = e^x - \lambda \sin x \Rightarrow f(x) - f'(x) = \lambda(\sin x + \cos x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x + \cos x = \frac{f(x) - f'(x)}{\lambda}.$$

$$\int \frac{\sin x + \cos x}{e^x + \lambda \cos x} dx = \frac{1}{\lambda} \int \frac{f(x) - f'(x)}{f(x)} dx = \frac{1}{\lambda} \int \left(1 - \frac{f'(x)}{f(x)}\right) dx = \frac{1}{\lambda}\left(\int dx - \int \frac{f'(x)}{f(x)}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left(x - \ln\left(e^x + \lambda \cos x\right)\right) + C.$$

Problema846.

Solve for reals

$$\sqrt{x-3} - \sqrt{2x-7} = 2x-8.$$

Soluție.

Domeniul de definiție este $D = \left[\frac{7}{2}, \infty\right)$. Notăm $\begin{cases} a = \sqrt{x-3} \\ b = \sqrt{2x-7} \end{cases} \Rightarrow 2x-8 = 2\left(b^2 - a^2\right)$.

Ecuația se scrie:

$$a - b = 2\left(b^2 - a^2\right) \Leftrightarrow a - b + 2\left(a^2 - b^2\right) = 0 \Leftrightarrow a - b + 2(a-b)(a+b) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(2a+2b+1) = 0 \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow \sqrt{x-3} = \sqrt{2x-7} \Leftrightarrow x-3 = 2x-7 \Leftrightarrow x = 4.$$

Deducem că $x = 4$ este soluția unică a ecuației.

Remarcă.

Let be $\lambda \geq 0$ Solve for reals

$$\sqrt{x-\lambda}-\sqrt{2x-2\lambda-1}=2x-2\lambda-2.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Deducem că $x=\lambda+1$ este soluția unică a ecuației.

Problema847.

If $x, y, z > 0$, $xy+yz+zx=3$ then

$$\sum \frac{1}{(x+1)^2} \geq \frac{3}{4}.$$

Marin Chirciu

Lema

If $x, y > 0$ then

$$\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(y+1)^2} \geq \frac{1}{1+xy}.$$

Demonstrație.

$$\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(y+1)^2} \geq \frac{1}{1+xy} \Leftrightarrow 1+xy\left(x^2+y^2\right) \geq x^2y^2+2xy \Leftrightarrow xy(x-y)^2+(1-xy)^2 \geq 0.$$

$$\sum \frac{1}{(x+1)^2} \overset{Lema}{\geq} \frac{1}{2}\sum \frac{1}{1+xy} \overset{CS}{\geq} \frac{1}{2}\frac{9}{\sum(1+xy)}=\frac{9}{2\left(3+\sum xy\right)}=\frac{9}{2(3+3)}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1$.

Problema848.

Solve in real numbers

$$\sqrt{x-8}+\sqrt{x+1}=\frac{6}{\sqrt[3]{x}}.$$

CS Cheong, Math9/2025

Soluție.

Domeniul de definiție este $D=[8,\infty)$.

Ecuația este de forma $f(x)=g(x)$, cu f funcție strict crescătoare și g strict descrescătoare.

O astfel de ecuație are cel mult o soluție. Cum $f(8)=g(8)$, rezultă că $x=8$ e soluția unică .

Remarcă.

1). Solve in real numbers

$$\sqrt{x-8}+\sqrt{x+8}=\frac{8}{\sqrt[3]{x}}.$$

Soluție.

Deducem că $x=8$ este soluția unică a ecuației.

2). Let be $\lambda \ge 0$ fixed. Solve in real numbers

$$\sqrt{x-8}+\sqrt{x+\lambda^2-8}=\frac{2\lambda}{\sqrt[3]{x}}.$$

Soluție.

Deducem că $x=8$ este soluția unică a ecuației.

3). Let be $n>0$, $\lambda \ge 0$ fixed. Solve in real numbers

$$\sqrt{x-n^3}+\sqrt{x+\lambda^2-n^3}=\frac{\lambda n}{\sqrt[3]{x}}.$$

Dezvoltări,Marin Chirciu

Soluție.

Deducem că $x=n^3$ este soluția unică a ecuației.

Problema849.

Solve in real numbers

$$\left(\sqrt{x+3}+4\right)\left(\sqrt{x}-3\right)=x-13.$$

CS Cheong,Math9/2025

Remarcă.

Solve in real numbers

$$\left(\sqrt{x+3}+4\right)\left(\sqrt{x}-3\right)=\frac{x^2+18x-115}{8}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS=\left(\sqrt{x+3}+4\right)\left(\sqrt{x}-3\right)=\left(\frac{1}{2}\sqrt{4(x+3)}+4\right)\left(\sqrt{x}-3\right)\overset{AG}{\leq}\left(\frac{1}{2}\frac{4+(x+3)}{2}+4\right)\left(\frac{x+1}{2}-3\right)=$$

$=\frac{x+23}{4}\cdot\frac{x-5}{2}=\frac{x^2+18x-115}{8}=RHS$, cu egal pentru $x+3=4$ și $x=1 \Leftrightarrow x=1$.

Remarcă.

Let be $a\geq 0, b\geq 0$ Solve in real numbers

$$\left(\sqrt{x+3}+a\right)\left(\sqrt{x}+b\right)=\frac{x^2+2(2a+b+4)x+4a+14b+8ab+7}{8}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS=\left(\sqrt{x+3}+a\right)\left(\sqrt{x}+b\right)=\left(\frac{1}{2}\sqrt{4(x+3)}+a\right)\left(\sqrt{x}+b\right)\overset{AG}{\leq}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{4+(x+3)}{2}+a\right)\left(\frac{x+1}{2}+b\right)=$$

$=\frac{x+7+4a}{4}\cdot\frac{x+1+2b}{2}=\frac{x^2+2(2a+b+4)x+4a+14b+8ab+7}{8}=RHS$, cu egal pentru $x+3=4$ și $x=1 \Leftrightarrow x=1$.

Problema850.

O.VIII. 580. Determinați $a,b,c\in\mathbf{R}^*$ știind că

$$a+\frac{1}{bc}=2b,\ b+\frac{1}{ca}=2c \text{ și } c+\frac{1}{ab}=2a.$$

Romeo Ilie, Brașov, RMT 3/2025

Soluție.

Adun ecuațiile $\Rightarrow a+b+c=\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab} \Leftrightarrow a+b+c=\frac{a+b+c}{abc} \Leftrightarrow (a+b+c)(abc-1)=0$.

Cazul1). Dacă $a+b+c=0 \Leftrightarrow c=-a-b$, $a+\frac{1}{bc}=2b$, $c+\frac{1}{ab}=2a \Leftrightarrow a^2+ab+b^2=0$, fals.

Cazul2). Dacă $abc=1$, $a+\frac{1}{bc}=2b$, $b+\frac{1}{ca}=2c$ și $c+\frac{1}{ab}=2a \Leftrightarrow$

$a+a=2b$, $b+b=2c$ și $c+c=2a \Leftrightarrow a=b=c$, $a+\frac{1}{bc}=2b \Leftrightarrow a+\frac{1}{a^2}=2a \Leftrightarrow a^3=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a=1$.

Deducem că $(a,b,c)=(1,1,1)$.

Remarcă.

Fie $\lambda>1$ fixat. Determinați $a,b,c\in\mathbf{R}^*$ știind că

$$a+\frac{1}{bc}=\lambda b,\ b+\frac{1}{ca}=\lambda c \text{ și } c+\frac{1}{ab}=\lambda a.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Deducem că $(a,b,c)=(1,1,1)$, dacă și numai dacă $\lambda=2$.

Problema851.

If $a,b,c\geq 0$, $a+b+c=3$ then

$$\sum\sqrt{1+24a^2}\geq 15.$$

Nguyen Van Hoa, Vietnam, Mathematical Inequalities9/2025

Soluție.

Lema.

If $a\geq 0$ then

$$\sqrt{1+24a^2}\geq\frac{1+24a}{5}.$$

Demonstrație.

$\sqrt{1+24a^2}\geq\frac{1+24a}{5} \Leftrightarrow 24(a-1)^2\geq 0$,, cu egal pentru $a=1$.

$$LHS=\sum\sqrt{1+24a^2}\overset{Lema}{\geq}\sum\frac{1+24a}{5}=\frac{3+24\sum a}{5}=\frac{3+24\cdot 3}{5}=15=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarcă.

1). If $a,b,c \geq 0$, $a+b+c=3$ and $\lambda \geq 0$ then

$$\sum \sqrt{1+\lambda a^2} \geq 3\sqrt{\lambda+1}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema.

If $a \geq 0$ and $\lambda \geq 0$ then

$$\sqrt{1+\lambda a^2} \geq \frac{1+\lambda a}{\sqrt{\lambda+1}}.$$

Demonstrație.

$\sqrt{1+\lambda a^2} \geq \dfrac{1+\lambda a}{\sqrt{\lambda+1}} \Leftrightarrow \lambda(a-1)^2 \geq 0$, cu egal pentru $a=1$ sau $\lambda=0$.

$$LHS = \sum \sqrt{1+\lambda a^2} \overset{Lema}{\geq} \sum \frac{1+\lambda a}{\sqrt{1+\lambda}} = \frac{3+\lambda \sum a}{\sqrt{1+\lambda}} = \frac{3+\lambda \cdot 3}{\sqrt{1+\lambda}} = 3(\lambda+1) = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

2).In ΔABC

$$\sum \sqrt{1+\frac{27r^2}{r_a^2}} \geq 6.$$

Lema.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=3$ then

$$\sum \sqrt{1+3x^2} \geq 6.$$

Soluție.

If $x>0$ then

$$\sqrt{1+3x^2} \geq \frac{1+3x}{2}.$$

Folosind **Lema** pentru $(x,y,z)=\left(\dfrac{3r}{r_a},\dfrac{3r}{r_b},\dfrac{3r}{r_c}\right)$ obținem: $\sum \sqrt{1+\dfrac{27r^2}{r_a^2}} \geq 6$

3). In ΔABC

$$\sum \sqrt{1+\frac{27r^2}{h_a^2}} \geq 6.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema852.

If $a,b,c \in \mathbf{R}$ then

$$\sum a^{10} + \sum a^9 + \sum a^5 + \sum a^4 \geq 0.$$

Sanong Huayrerai, Mathematical Inequalities9/2025

Soluție.

Lema.

If $x \in \mathbf{R}$ then

$$x^{10} + x^9 + x^5 + x^4 \geq 0.$$

Demonstrație.

$x^{10} + x^9 + x^5 + x^4 \geq 0 \Leftrightarrow x^9(x+1) + x^4(x+1) \geq 0 \Leftrightarrow x^4(x+1)(x^5+1) \geq 0$, vezi factorii au același semn, cu egal pentru $x=0$ sau $x=-1$.

Folosind **Lema** și sumând obținem concluzia.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=0$ sau $x=-1$.

Remarcă.

If $a,b,c \in \mathbf{R}$ and $n \in \mathbf{N}$ then

$$\sum a^{2n+6} + \sum a^{2n+5} + \sum a^{2n+1} + \sum a^{2n} \geq 0.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema.

If $x \in \mathbf{R}$ then

$$x^{2n+6} + x^{2n+5} + x^{2n+1} + x^{2n} \geq 0.$$

Demonstrație.

$x^{2n+6}+x^{2n+5}+x^{2n+1}+x^{2n}\geq 0 \Leftrightarrow x^{2n+5}(x+1)+x^{2n}(x+1)\geq 0 \Leftrightarrow x^{2n}(x+1)(x^5+1)\geq 0$, vezi factorii au același semn, cu egal pentru $x=0$ sau $x=-1$.

Folosind **Lema** și sumând obținem concluzia.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=0$ sau $x=-1$.

Problema833.

a).If $x>0$ then

$$(1+x)(1+x^3)\geq 6x-2.$$

b). If $a,b,c>0$, $ab+bc+ca=3$ then

$$\sum a(b^3+b^2+3)\geq 15.$$

Cătălin Cristea, Craiova, RMT 3/2025

Soluție.

a). $(1+x)(1+x^3)\geq 6x-2 \Leftrightarrow x^3+x^2-5x+3\geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x+3)\geq 0$.

b). $LHS=\sum a(b^3+b^2+3)\geq \sum a\cdot 5b=5\sum ab=5\cdot 3=15=RHS$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarcă.

If $a,b,c>0$, $ab+bc+ca=3$ and $n\in\mathbf{N}$ then

$$\sum a(b^{n+1}+b^n+2n-1)\geq 3(2n+1).$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema.

If $x>0$ and $n\in\mathbf{N}$ then

$$x^{n+1}+x^n+2n-1\geq (2n+1)x.$$

Demonstrație.

$x^{n+1}+x^n+2n-1\geq (2n+1)x \Leftrightarrow (x-1)^2\left(x^{n-1}+3x^{n-2}+5x^{n-3}+\ldots+(2n-3)x+2n-1\right)\geq 0$.

$$LHS=\sum a\left(b^{n+1}+b^{n}+2n-1\right)\overset{Lema}{\geq}\sum a\cdot(2n+1)b=(2n+1)\sum ab=(2n+1)\cdot 3=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Problema854.

IX. 612 .Determinați numerele de patru cifre $\overline{abcd}$ care verifică

$$\left(\overline{ab}+\overline{cd}\right)^2=\overline{abcd}.$$

Romeo Ilie, Brașov, RMT 3/2025

Soluție.

În mod necesar $\overline{abcd}$ trebuie să fie pătrat perfect.

Obținem $\overline{ab}=20,\overline{cd}=25\Rightarrow\left(\overline{ab}+\overline{cd}\right)^2=(20+25)^2=45^2=2025=\overline{abcd}$.

Deducem că $\overline{abcd}=2025$.

Problema855.

Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația:

VIII. 613.If $x,y,z\geq 0$, $x+y+z=1$ then

$$81\sum x^7+\sum x^3\geq 18\sum x^5.$$

Aurel Dobroșan, Lugoj, RMT 3/2025

Soluție.

Lema.

If $x,y,z\geq 0$, $x+y+z=1$ then

$$81x^7+x^3\geq 18x^5.$$

Demonstrație.

$81x^7+x^3\geq 18x^5\Leftrightarrow x^3(3x-1)^2(3x+1)^2\geq 0$, cu egal pentru $x=0$ sau $x=\frac{1}{3}$.

Folosind **Lema** și sumând obținem concluzia.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Remarcă.

If $x, y, z \geq 0$ and $\lambda > 0$ then

$$\lambda^2 \sum x^7 + \sum x^3 \geq 2\lambda \sum x^5 .$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema.

If $x, y, z \geq 0$ and $\lambda > 0$ then

$$\lambda^2 x^7 + x^3 \geq 2\lambda x^5 .$$

Demonstrație.

$\lambda^2 x^7 + x^3 \geq 2\lambda x^5 \Leftrightarrow x^3 (\lambda x - 1)^2 (\lambda x + 1)^2 \geq 0$, cu egal pentru $x = 0$ sau $x = \frac{1}{3}$.

Folosind **Lema** și sumând obținem concluzia.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = \frac{1}{\lambda}$.

Problema856.

VIII. 612Determinați $n \in \mathbf{N}$ astfel încât

$$\sqrt{n^2 - 89n + 2019} \in \mathbf{N} .$$

Gheorghe Iacob și Mihaela Bșoc, Pașcani, RMT 3/2025

Soluție.

Pentru $n = 6$ obținem $\sqrt{n(n-89)+2019} = \sqrt{6(6-89)+2019} = \sqrt{1521} = 39 \in \mathbf{N}$

Problema857.

S717. In ΔABC holds

$$\sum am_a \geq p\left(\sum h_a - 3r\right).$$

Ștefana N. Drăminescu, România, Mathematical Reflections 6/2025

Solution.

Lemma.

In ΔABC

$$\sum am_a \geq 6F + 2\left(p^2 - 3r^2 - 12Rr\right).$$

Proof.

Using $am_a \geq 2pr + \frac{1}{2}(b-c)^2$ we get:

$$\sum am_a \overset{Lema}{\geq} \sum\left(2pr + \frac{1}{2}(b-c)^2\right) = 6pr + \frac{1}{2}\sum(b-c)^2 =$$
$$= 6pr + 2\left(p^2 - 3r^2 - 12Rr\right) = 6F + 2\left(p^2 - 3r^2 - 12Rr\right).$$

Using $\sum h_a = \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{2R}$, it is enough to show that:

$$6pr + 2\left(p^2 - 3r^2 - 12Rr\right) \geq p\left(\frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{2R} - 3r\right) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 4R\left(p^2 - 3r^2 - 12Rr\right) \geq p\left(p^2 + r^2 - 14Rr\right)$, which results from $p \leq \frac{3R\sqrt{3}}{2}$ (Mitrinovic).

$$4R\left(p^2 - 3r^2 - 12Rr\right) \geq \frac{3R\sqrt{3}}{2}\left(p^2 + r^2 - 14Rr\right) \Leftrightarrow 8\left(p^2 - 3r^2 - 12Rr\right) \geq 3\sqrt{3}\left(p^2 + r^2 - 14Rr\right)$$

$\Leftrightarrow p^2\left(8 - 3\sqrt{3}\right) \geq Rr\left(96 - 42\sqrt{3}\right) + r^2\left(24 + 3\sqrt{3}\right)$, see $p^2 \geq 16Rr - 5r^2$ (Gerretsen).

$$\left(16Rr - 5r^2\right)\left(8 - 3\sqrt{3}\right) \geq Rr\left(96 - 42\sqrt{3}\right) + r^2\left(24 + 3\sqrt{3}\right) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow R\left(16 - 3\sqrt{3}\right) \geq 2r\left(16 - 3\sqrt{3}\right)$, see $R \geq 2r$,(Euler`inequality).

Equality occurs if and only the triangle is equilateral.

Problema858.

1). In ΔABC

$$\sum a^2 m_a \geq 2F\left(R - 2r + 2p\right)$$

Soluție.

Lema.

In ΔABC

$$am_a \geq 2pr + \frac{1}{2}(b-c)^2 .$$

2).In ΔABC

$$\sum am_a \geq 6F + 2\left(p^2 - 3r^2 - 12Rr\right).$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema859.

O719. If $x, y, z > 0$, $x^2 + y^2 + z^2 + xyz = 4$ then

$$x + y + z \geq 2 + \frac{\left(9 + 3\sqrt{3}\right)xyz}{4 + \left(5 + 3\sqrt{3}\right)xyz} .$$

Tănase Rumișan, România, Mathematical Reflections, Nr.6/2025

Solution .

$x^2 + y^2 + z^2 + xyz = 4 \Leftrightarrow (x, y, z) = (2\cos A, 2\cos B, 2\cos C)$, ΔABC -acute.

Using $\sum \cos A = 1 + \frac{r}{R}$ and $\prod \cos A = \frac{p^2 - (2R+r)^2}{4R^2}$ we have:

$$x + y + z \geq 2 + \frac{\left(9 + 3\sqrt{3}\right)xyz}{4 + \left(5 + 3\sqrt{3}\right)xyz} \Leftrightarrow 2\left(1 + \frac{r}{R}\right) \geq 2 + \frac{\left(9 + 3\sqrt{3}\right) \cdot 8\frac{p^2 - (2R+r)^2}{4R^2}}{4 + \left(5 + 3\sqrt{3}\right) \cdot 8\frac{p^2 - (2R+r)^2}{4R^2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\frac{r}{R} \geq \frac{\left(9 + 3\sqrt{3}\right) \cdot 8\frac{p^2 - (2R+r)^2}{4R^2}}{4 + \left(5 + 3\sqrt{3}\right) \cdot 8\frac{p^2 - (2R+r)^2}{4R^2}} \Leftrightarrow \frac{r}{R} \geq \frac{\left(9 + 3\sqrt{3}\right) \cdot \frac{p^2 - (2R+r)^2}{R^2}}{4 + \left(5 + 3\sqrt{3}\right) \cdot 2\frac{p^2 - (2R+r)^2}{R^2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2r}{R} \geq \frac{\left(9 + 3\sqrt{3}\right) \cdot \frac{p^2 - (2R+r)^2}{R^2}}{2 + \left(5 + 3\sqrt{3}\right) \cdot \frac{p^2 - (2R+r)^2}{R^2}} \Leftrightarrow \frac{2r}{R} \geq \frac{\left(9 + 3\sqrt{3}\right) \cdot \left(p^2 - (2R+r)^2\right)}{2R^2 + \left(5 + 3\sqrt{3}\right) \cdot \left(p^2 - (2R+r)^2\right)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p^2\left[\left(9 + 3\sqrt{3}\right)R - \left(5 + 3\sqrt{3}\right)r\right] \leq R(2R+r)^2\left(9 + 3\sqrt{3}\right) - 2r(2R+r)^2\left(5 + 3\sqrt{3}\right) + 4R^2 r,$$

which result from Gerretsen`inequality $p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$.

It remains to show that:

$$\left(4R^2+4Rr+3r^2\right)\left[R\left(9+3\sqrt{3}\right)-2r\left(5+3\sqrt{3}\right)\right]\le$$

$$\le R(2R+r)^2\left(9+3\sqrt{3}\right)-2r(2R+r)^2\left(5+3\sqrt{3}\right)+4R^2r \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2R^2-\left(9+3\sqrt{3}\right)Rr+2r^2\left(5+3\sqrt{3}\right)\ge 0 \Leftrightarrow (R-2r)\left(2R-\left(5+3\sqrt{3}\right)r\right),$$

Equality occurs if and only if the triangle is equilateral.

Problema860.

J718. If $a,b,c>0$, $ab+bc+ca+2abc=1$ then

$$a+b+c\ge\frac{3}{2}.$$

Beau I. McEachren, Canada, Mathematical Reflections, Nr.6/2025

Solution .

$$ab+bc+ca+2abc=1 \Leftrightarrow (a,b,c)=\left(\frac{x}{y+z},\frac{y}{z+x},\frac{z}{x+y}\right).$$

$$LHS=a+b+c=\sum\frac{x}{y+z}\overset{Nesbitt}{\ge}\frac{3}{2}=RHS$$

Equality occurs if and only if $x=y=z \Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{2}$.

Problema861.

If $a,b,c>0$, $a+b+c+2=abc$ then

$$\sum\sqrt{a}\le\frac{3}{2}\sqrt{abc}.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam, RMM 8/2025

Soluție

$$\sum\sqrt{a}\le\frac{3}{2}\sqrt{abc} \Leftrightarrow \sum\frac{2}{\sqrt{bc}}\le 3.$$

Cu substituția $(a,b,c)=\left(\frac{y+z}{x},\frac{z+x}{y},\frac{x+y}{z}\right)$ obținem:

$$\frac{2}{\sqrt{bc}}=2\sqrt{\frac{y}{z+x}\frac{z}{x+y}}=2\sqrt{\frac{z}{z+x}\frac{y}{x+y}}\overset{AG}{\le}\frac{z}{z+x}+\frac{y}{x+y}.$$

Rezultă $\sum\frac{2}{\sqrt{bc}}\le\sum\left(\frac{z}{z+x}+\frac{y}{x+y}\right)=3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z \Leftrightarrow a=b=c=2$.

Remarcă.

1). If $a,b,c>0$, $a+b+c+2=abc$ then

$$\sum\frac{1}{a}\ge\frac{3}{2}.$$

Soluție

Cu substituția $(a,b,c)=\left(\frac{y+z}{x},\frac{z+x}{y},\frac{x+y}{z}\right)$ obținem:

$$LHS=\sum\frac{1}{a}=\sum\frac{x}{y+z}\overset{Nesbitt}{\ge}\frac{3}{2}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z \Leftrightarrow a=b=c=2$.

2). If $a,b,c>0$, $a+b+c+2=abc$ and $n\in\mathbf{N}$ then

$$\sum\frac{1}{a^n}\ge\frac{3}{2^n}.$$

Soluție

Pentru $n=0$ se obține egalitatea3=3.

Pentru $n=1$ avem $\sum\frac{1}{a}\ge\frac{3}{2}$, vezi mai jos.

În continuare fie $n\ge 2$.

Cu substituția $(a,b,c)=\left(\frac{y+z}{x},\frac{z+x}{y},\frac{x+y}{z}\right)$ obținem:

$$LHS=\sum\frac{1}{a^n}\overset{Holder}{\ge}\frac{\left(\sum\frac{1}{a}\right)^n}{3^{n-1}}=\frac{\left(\sum\frac{x}{y+z}\right)^n}{3^{n-1}}\overset{Nesbitt}{\ge}\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n}{3^{n-1}}=\frac{3}{2^n}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z \Leftrightarrow a=b=c=2$.

3). If $a,b,c>0$, $a+b+c+2=abc$ then

$$\sum a \geq 6.$$

Soluție

Cu substituția $(a,b,c)=\left(\frac{y+z}{x},\frac{z+x}{y},\frac{x+y}{z}\right)$ obținem:

$$LHS=\sum a=\sum \frac{y+z}{x} \overset{AG}{\geq} 6=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z \Leftrightarrow a=b=c=2$.

4). If $a,b,c>0$, $a+b+c+2=abc$ and $n\in \mathbf{N}$ then

$$\sum a^n \geq 3\cdot 2^n.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție

Pentru $n=0$ se obține egalitatea 3=3.

Pentru $n=1$ avem $\sum a \geq 6$, vezi mai jos.

În continuare fie $n\geq 2$.

Cu substituția $(a,b,c)=\left(\frac{y+z}{x},\frac{z+x}{y},\frac{x+y}{z}\right)$ obținem:

$$LHS=\sum a^n \overset{Holder}{\geq} \frac{\left(\sum a\right)^n}{3^{n-1}}=\frac{\left(\sum \frac{y+z}{x}\right)^n}{3^{n-1}} \overset{AG}{\geq} \frac{6^n}{3^{n-1}}=3\cdot 2^n=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z \Leftrightarrow a=b=c=2$.

Problema862.

If $M\in Int(\Delta ABC)$ and d_a,d_b,d_c -distances of point M to the sides BC,CA,AB then:

$$1).\ \sum \frac{h_a d_b d_c}{d_a h_b h_c} \geq 1;$$

$$2).\ \prod\left(1+\frac{d_a h_b h_c}{h_a d_b d_c}\right) \geq 64\sqrt{\frac{d_a d_b d_c}{h_a h_b h_c}}.$$

Petru Vlad, Sibiu, Concursul”Gheorghe Lazăr”, Sibiu, 23-25 noiembrie 2012

Soluție

1). Fie $x=\frac{d_a}{h_a}=\frac{ad_a}{ah_a}=\frac{S_{MBC}}{S}$ și analoagele, $x+y+z=1$.

Avem $LHS=\sum\frac{h_ad_bd_c}{d_ah_bh_c}=\sum\frac{yz}{x}\overset{(1)}{\geq}1=RHS$,

unde $\sum\frac{yz}{x}\overset{(1)}{\geq}1\Leftrightarrow\sum y^2z^2\geq\sum xyz$,vezi $\sum y^2z^2\overset{SOS}{\geq}xyz\sum x\overset{\sum x=1}{=}xyz$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=\frac{1}{3}\Leftrightarrow M\equiv G$.

2). $\prod\left(1+\frac{d_ah_bh_c}{h_ad_bd_c}\right)=\prod\left(1+\frac{x}{yz}\right)=\prod\left(x+y+z+\frac{x}{yz}\right)\overset{AG}{\geq}\prod 4\sqrt[4]{x\cdot y\cdot z\cdot\frac{x}{yz}}=64\sqrt[4]{x^2y^2z^2}=$

$=64\sqrt{xyz}=64\sqrt{\frac{d_ad_bd_c}{h_ah_bh_c}}=RHS$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=\frac{1}{3}\Leftrightarrow M\equiv G$.

Remarcă.

If $M\in Int\left(\Delta ABC\right)$ and d_a,d_b,d_c -distances of point M to the sides BC,CA,AB then:

$$1).\ \sum\frac{d_ah_bh_c}{h_ad_bd_c}\geq 1;$$

$$2).\ \prod\left(1+\frac{h_ad_bd_c}{d_ah_bh_c}\right)\geq 64\frac{d_ad_bd_c}{h_ah_bh_c}.$$

Marin Chirciu

Problema863.

If $x,y>0$, $x+y=1$ and $n\in\mathbf{N}$ then

$$\left(1+\frac{1}{x^n}\right)\left(1+\frac{1}{y^n}\right)\geq\left(1+2^n\right)^2.$$

Elton Papanikolla, Greece,Math Olymp 10/2025.

Soluție

$$1 = x + y \ge 2\sqrt{xy} \Rightarrow \sqrt{xy} \le \frac{1}{2}.$$

$$(1+a)(1+b) \overset{CBS}{\ge} \left(1+\sqrt{ab}\right)^2, (a,b) = \left(\frac{1}{x^n}, \frac{1}{y^n}\right) \Rightarrow$$

$$LHS = \left(1+\frac{1}{x^n}\right)\left(1+\frac{1}{y^n}\right) \ge \left(1+\sqrt{\frac{1}{x^n}\cdot\frac{1}{y^n}}\right)^2 = \left(1+\frac{1}{\left(\sqrt{xy}\right)^n}\right)^2 \overset{\sqrt{xy}\le\frac{1}{2}}{\ge} \left(1+\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n}\right)^2 = \left(1+2^n\right)^2 =$$

$$= RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = \frac{1}{2}$.

Remarcă.

If $x, y > 0$, $x + y = 1$ and $n \in \mathbf{N}$, $\lambda \ge 0$ then

$$\left(\lambda+\frac{1}{x^n}\right)\left(\lambda+\frac{1}{y^n}\right) \ge \left(\lambda+2^n\right)^2.$$

Marin Chirciu

Problema864.

In acute ΔABC

$$\sum bc\sqrt{\cos A} \ge \frac{4}{3}R^2.$$

Vasile Mirccea Popa,RMM 10/2025

Remarcă.

In ΔABC

1). $$36r^2 \le \sum bc\left(\cos B + \cos C\right) \le 18Rr.$$

Soluție

Folosim : $$\sum bc\left(\cos B + \cos C\right) = \frac{r\left(p^2 + r^2 + 6Rr + 8R^2\right)}{R}.$$

2). $12pr \le \sum bc(\sin B + \sin C) \le 6Rp$.

Soluție

Folosim $\sum bc(\sin B + \sin C) = \dfrac{p(p^2 + r^2 - 2Rr)}{R}$

3) $\sum bc(\sin B + \sin C) \le \dfrac{R\sqrt{3}}{2r} \cdot \sum bc(\cos B + \cos C)$.

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema865.

In ΔABC

$$\sum \frac{r_a^2}{h_a^2 m_a^2} \ge \frac{4}{3R^2}.$$

Shirvan Tahirov, Mathematical Inequalities 10/2025

Soluție

$$LHS = \sum \frac{r_a^2}{h_a^2 m_a^2} \overset{CS}{\ge} \frac{\left(\sum \frac{r_a}{h_a m_a}\right)^2}{3} \overset{Panaitopol}{\ge} \frac{\left(\sum \frac{\frac{F}{p-a}}{\frac{2F}{a} \frac{Rp}{a}}\right)^2}{3} = \frac{\left(\frac{1}{2Rp}\sum \frac{a^2}{p-a}\right)^2}{3} \overset{(1)}{\ge} \frac{\left(\frac{1}{2Rp} \cdot 4p\right)^2}{3} =$$

$$= \frac{\left(\frac{2}{R}\right)^2}{3} = \frac{4}{3R^2} = RHS,$$

Remarcă.

In ΔABC

1). $\sum \dfrac{r_a^n}{h_a^n m_a^n} \ge 3\left(\dfrac{2}{3R}\right)^n, n \in \mathbf{N}$.

2). $\sum \dfrac{r_a^n}{h_a^n m_a^n} \ge 3\left(\dfrac{2}{3R}\right)^n, n \in \mathbf{N}$.

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema866.

If $a,b,c>0$ then

$$3\sum\frac{a^2}{b^2}\geq\sum a^2\sum\frac{1}{b^2}.$$

A.W.Walker, The Mathematics Magazine, vol43,nr4/1970

Soluție

$$3\sum\frac{a^2}{b^2}\geq\sum a^2\sum\frac{1}{b^2}\Leftrightarrow 3\sum\frac{a^2}{b^2}\geq\sum\frac{a^2}{b^2}+\sum\frac{b^2}{a^2}+3\Leftrightarrow 2\sum\frac{a^2}{b^2}\geq\sum\frac{b^2}{a^2}+3.$$

Cu substituția $(x,y,z)=\left(\frac{a^2}{b^2},\frac{b^2}{c^2},\frac{c^2}{a^2}\right),xyz=1$ inegalitatea $2\sum\frac{a^2}{b^2}\geq\sum\frac{b^2}{a^2}+3$ se scrie:

$2\sum x\geq\sum\frac{1}{x}+3$, $xyz=1$, vezi pqr -Method. Notăm $p=\sum x,q=\sum xy,r=xyz=1$.

Inegalitatea $2\sum x\geq\sum\frac{1}{x}+3$ se scrie $2p\geq 3+q$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

.**Problema867.**

In ΔABC

$$\sum\frac{1}{1+\cos^2 B+\cos^2 C}\leq 2.$$

Tapas Das, RMM 10/2025.

Soluție

Lema.

In ΔABC

$$\cos^2 B+\cos^2 C\geq\frac{a^2}{b^2+c^2}.$$

Demonstrație.

$$\cos^2 B+\cos^2 C=\frac{c^2\cos^2 B}{c^2}+\frac{b^2\cos^2 C}{b^2}\overset{CS}{\geq}\frac{(b\cos C+c\cos B)^2}{b^2+c^2}=\frac{a^2}{b^2+c^2}.$$

$$LHS=\sum\frac{1}{1+\cos^2 B+\cos^2 C}\overset{Lema}{\leq}\sum\frac{1}{1+\frac{a^2}{b^2+c^2}}=\sum\frac{b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2}=2=RHS.$$

Remarca.

Let be $\lambda\geq 0$. In non-obtuse ΔABC

$$\sum\frac{1}{\lambda+\cos^2 B+\cos^2 C}\leq\frac{6}{\lambda+1}\cdot\left(\frac{R}{2r}\right)^4.$$

Marin Chirciu

Soluție

Lema.

In ΔABC

$$\cos^2 B+\cos^2 C\geq\frac{a^2}{b^2+c^2}.$$

$$LHS=\sum\frac{1}{\lambda+\cos^2 B+\cos^2 C}\overset{Lema}{\leq}\sum\frac{1}{\lambda+\frac{a^2}{b^2+c^2}}=\sum\frac{b^2+c^2}{a^2+\lambda\left(b^2+c^2\right)}\overset{non-obtuse}{\leq}$$

$$\overset{non-obtuse}{\leq}\sum\frac{b^2+c^2}{a^2+\lambda\cdot a^2}=\frac{1}{\lambda+1}\sum\frac{b^2+c^2}{a^2}\overset{Bandila}{\leq}\frac{1}{\lambda+1}\sum\frac{\frac{R}{r}bc}{a^2}=\frac{1}{\lambda+1}\cdot\frac{R}{r}\sum\frac{bc}{a^2}\overset{(1)}{\leq}$$

$$\overset{(1)}{\leq}\frac{1}{\lambda+1}\cdot\frac{R}{r}\cdot 3\left(\frac{R}{2r}\right)^3=\frac{2}{\lambda+1}\cdot\frac{R}{2r}\cdot 3\left(\frac{R}{2r}\right)^3=\frac{6}{\lambda+1}\cdot\left(\frac{R}{2r}\right)^4=RHS.$$

Problema868.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=3$ then

$$\sum\frac{\left(1+y^2\right)\left(1+z^2\right)}{1+x}\geq 6xyz.$$

Sanonk Huai Rae Rai, Mathematical Inequalities10/2025

Soluție

$$LHS=\sum\frac{\left(1+y^2\right)\left(z^2+1\right)}{1+x}\overset{CBS}{\geq}\sum\frac{(z+y)^2}{1+x}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum(z+y)\right)^2}{\sum(1+x)}=\frac{\left(2\sum x\right)^2}{3+\sum x}=\frac{(2\cdot 3)^2}{3+3}=$$

$$=6\overset{(1)}{\geq}6xyz=RHS,$$

unde $6 \overset{(1)}{\geq} 6xyz \Leftrightarrow xyz \leq 1$, vezi $3 = x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} \Rightarrow 3 \geq 3\sqrt[3]{xyz} \Leftrightarrow xyz \leq 1$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = 1$.

Remarca.

If $x, y, z, \lambda > 0$, $x + y + z = 3\lambda$ then

$$\sum \frac{\left(\lambda^2 + y^2\right)\left(\lambda^2 + z^2\right)}{\lambda + x} \geq 6xyz.$$

Marin Chirciu

Soluție

$$LHS = \sum \frac{\left(\lambda^2 + y^2\right)\left(z^2 + \lambda^2\right)}{\lambda + x} \overset{CBS}{\geq} \sum \frac{\lambda^2 (z + y)^2}{\lambda + x} \overset{CS}{\geq} \frac{\lambda^2 \left(\sum (z + y)\right)^2}{\sum (\lambda + x)} = \frac{\lambda^2 \left(2\sum x\right)^2}{3\lambda + \sum x} = \frac{\lambda^2 (2 \cdot 3\lambda)^2}{3\lambda + 3\lambda} =$$

$$= 6\lambda^3 \overset{(1)}{\geq} 6xyz = RHS,$$

unde $6\lambda^3 \overset{(1)}{\geq} 6\lambda^3 xyz \Leftrightarrow xyz \leq 1$, vezi $3\lambda = x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} \Rightarrow 3\lambda \geq 3\sqrt[3]{xyz} \Leftrightarrow xyz \leq \lambda^3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = 1$.

Problema869.

If $x, y > 0$, $x^2 + y^2 = 1$ then

$$\left(x^4 + 1\right)\left(y^4 + 1\right) \geq \frac{3}{2}.$$

Halit Shehu, Mathematical Inequalities10/2025.

Soluție

Lema.

If $x, y > 0$, $x^2 + y^2 = 1$ then

$$xy \leq \frac{1}{2}.$$

Soluție

$$1 = x^2 + y^2 \geq 2xy \Rightarrow 1 \geq 2xy \Leftrightarrow xy \leq \frac{1}{2}.$$

$$LHS=\left(x^4+1\right)\left(y^4+1\right)=\left(x^2+y^2\right)^2+\left(1-x^2y^2\right)^2\overset{Lema}{\geq}1^2+\left(1-\frac{1}{4}\right)^2=1+\frac{9}{16}=\frac{25}{16}>\frac{3}{2}=LHS.$$

Inegalitatea este strictă.

Remarca.

If $x,y>0$, $x^2+y^2=\lambda^2$ and $\lambda>0$ then

$$\left(x^4+\lambda\right)\left(y^4+\lambda\right)\geq\left(\frac{5\lambda}{4}\right)^2.$$

Marin Chirciu

Soluție

Lema.

If $x,y>0$, $x^2+y^2=\lambda^2$ then

$$xy\leq\frac{\lambda}{2}.$$

Soluție

$$\lambda^2=x^2+y^2\geq 2xy\Rightarrow\lambda^2\geq 2xy\Leftrightarrow xy\leq\frac{\lambda^2}{2}.$$

$$LHS=\left(x^4+\lambda\right)\left(y^4+\lambda\right)=\left(x^2+y^2\right)^2+\left(\lambda^2-x^2y^2\right)^2\overset{Lema}{\geq}\lambda^2+\left(\lambda^2-\frac{\lambda^2}{4}\right)^2=\lambda^2+\frac{9\lambda^2}{16}=$$

$$=\frac{25\lambda^2}{16}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=\frac{\lambda}{\sqrt{2}}$.

Problema870.

În jurul unui punct se construiesc n unghiuri ale căror măsuri , în grade sexagesimale, sunt exprimate prin numere naturale astfel: măsura celui de-al doilea unghi este dublul măsurii primului, : măsura celui de-al treilea unghi este triplul măsurii primului,etc, măsura ultimului unghi este de n ori măsura primului unghi. Precizați câte astfelde unghiuri se pot construi și determinați măsura primului unghi.

Delia Marinca, Timișoara, RMT3/2025

Soluție

Avem $u_1+u_2+...+u_n=360^\circ$, $u_2=2u_1, u_3=3u_1,...,u_n=n\cdot u_1$, $n\geq 3$.

Din $u_1+2u_1+...+n\cdot u_1=360^\circ \Leftrightarrow u_1(1+2+...+n)=360^\circ \Leftrightarrow u_1\dfrac{n(n+1)}{2}=360^\circ$, $u_1\in\mathbf{N}$.

Obținem $n\in\{3,4,5,8,9,15\}$ și corespunzător $u_1\in\{60^\circ,36^\circ,24^\circ,10^\circ,8^\circ,3^\circ\}$.

Problema871.

If $a,b,c>0$ then

$$\sum\frac{bc}{(a+b)(a+c)}\geq\frac{1}{4}\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

Dorin Marghidanu, Corabia, Olt, Mathematical Inequalities10/2025

Soluție

$$\sum\frac{bc}{(a+b)(a+c)}\geq\frac{1}{4}\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}\Leftrightarrow\frac{\sum bc(b+c)}{\prod(b+c)}\geq\frac{1}{4}\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

Folosind $a^2+b^2+c^2\overset{CS}{\geq}\dfrac{(a+b+c)^2}{3}$ este suficient să arătăm că:

$$\frac{\sum bc(b+c)}{\prod(b+c)}\geq\frac{1}{4}\frac{(a+b+c)^2}{\frac{(a+b+c)^2}{3}}\Leftrightarrow\frac{\sum bc(b+c)}{\prod(b+c)}\geq\frac{3}{4}.$$

Folosim pqr -Method. Notăm $p=\sum a, q=\sum ab, r=abc$.

Avem $\sum bc(b+c)=pq-3r$, $\prod(b+c)=pq-r$.

Inegalitatea se scrie:

$$\frac{pq-3r}{pq-r}\geq\frac{3}{4}\Leftrightarrow pq\geq 9r\text{, vezi } pq\overset{AG}{\geq}3\sqrt[3]{abc}\cdot 3\sqrt[3]{(abc)^2}=9r.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

Remarca.

1). If $a,b,c>0$ then

$$\sum\frac{bc}{(a+b)(a+c)}\geq\frac{3}{4}.$$

Soluție

$$\sum\frac{bc}{(a+b)(a+c)}\geq\frac{1}{4}\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}\Leftrightarrow\frac{\sum bc(b+c)}{\prod(b+c)}\geq\frac{3}{4}.$$

Folosim pqr -Method. Notăm $p=\sum a, q=\sum ab, r=abc$.

Avem $\sum bc(b+c)=pq-3r$, $\prod(b+c)=pq-r$.

Inegalitatea se scrie:

$$\frac{pq-3r}{pq-r}\geq\frac{3}{4}\Leftrightarrow pq\geq 9r\text{, vezi } pq\overset{AG}{\geq}3\sqrt[3]{abc}\cdot 3\sqrt[3]{(abc)^2}=9r.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

2). If $a,b,c>0$ and $n\in\mathbf{N}$ then

$$\sum\frac{bc}{(a+b)(a+c)}\geq\frac{9}{4}\cdot\frac{(a+b+c)^n}{3^n(a^n+b^n+c^n)}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție

$$\sum\frac{bc}{(a+b)(a+c)}\geq\frac{9}{4}\cdot\frac{(a+b+c)^n}{3^n(a^n+b^n+c^n)}\Leftrightarrow\frac{\sum bc(b+c)}{\prod(b+c)}\geq\frac{9}{4}\cdot\frac{(a+b+c)^n}{3^n(a^n+b^n+c^n)}.$$

Folosind $a^n+b^n+c^n\overset{CS}{\geq}\frac{(a+b+c)^n}{3^{n-1}}$ este suficient să arătăm că:

$$\frac{\sum bc(b+c)}{\prod(b+c)}\geq\frac{9}{4}\cdot\frac{(a+b+c)^n}{3^n\frac{(a+b+c)^n}{3^{n-1}}}\Leftrightarrow\frac{\sum bc(b+c)}{\prod(b+c)}\geq\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{3}\Leftrightarrow\frac{\sum bc(b+c)}{\prod(b+c)}\geq\frac{3}{4}.$$

Folosim pqr -Method. Notăm $p=\sum a, q=\sum ab, r=abc$.

Avem $\sum bc(b+c)=pq-3r$, $\prod(b+c)=pq-r$.

Inegalitatea se scrie:

$$\frac{pq-3r}{pq-r}\geq\frac{3}{4}\Leftrightarrow pq\geq 9r\text{, vezi } pq\overset{AG}{\geq}3\sqrt[3]{abc}\cdot 3\sqrt[3]{(abc)^2}=9r.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

Problema872.

Se cosideră șirul $(a_n)_{n\ge1}$, definit prin $a_1=1$ și $a_{n+1}=1+\frac{n}{a_n}$, $\forall n\ge1$.

a). Să se arate $\frac{1+\sqrt{4n-3}}{2}\le a_n\le\frac{1+\sqrt{4n+1}}{2}$, $\forall n\ge1$.

b). Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}$.

Gabriela Sabău, OL-Cluj-1994

Soluție

a) Demonstrație prin inducție.

b) Obținem $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n}}=1$, deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{4n-3}}{2}\le\lim\limits_{n\to\infty}a_n\le\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{4n+1}}{2}\Rightarrow$

$\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n-\sqrt{n}\right)=\frac{1}{2}$,vezi

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\sqrt{4n-3}}{2}-\sqrt{n}\right)\le\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\sqrt{n}\right)\le\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\sqrt{4n+1}}{2}-\sqrt{n}\right).$$

Rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{a_n-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n-\sqrt{n}\right)}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$.

Problema873.

If $x,y,z\in\mathbf{R}^*$, $(x+y+z)(xy+yz+zx)=xyz$ then

$$\sum\frac{(x+y)^2}{xy}=4.$$

Mihai Vijdeluc, Baia Mare, Recreații Matematice, Nr.2/2025

Soluție

$(x+y+z)(xy+yz+zx)=xyz\Leftrightarrow\sum xy(x+y)+xyz=0$, (1).

$\sum\frac{(x+y)^2}{xy}=4\Leftrightarrow\sum xy(x+y)+xyz=0$, (2).

Din (1) și (2) deducem concluzia.

Problema874.

Simplify

$$\frac{\tan^2 50^\circ\left(1+\tan^4 25^\circ\right)}{\tan^2 25^\circ\left(2+\tan^2 50^\circ\right)}.$$

CS Cheong 8/2025

Soluție

Notând $t=\tan 25^\circ \Rightarrow \tan 50^\circ=\frac{2t}{1-t^2}$.

Avem $E=\frac{\tan^2 50^\circ\left(1+\tan^4 25^\circ\right)}{\tan^2 25^\circ\left(2+\tan^2 50^\circ\right)}=\frac{\left(\frac{2t}{1-t^2}\right)^2\left(1+t^4\right)}{t^2\left(2+\left(\frac{2t}{1-t^2}\right)^2\right)}=\frac{4t^2\left(t^4+1\right)}{4t^4+2t^2\left(1-t^2\right)^2}=\frac{4\left(t^4+1\right)}{2\left(t^4+1\right)}=2$.

Remarca.

Let be $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ fixed.

Simplify

$$\frac{\tan^2 2x\left(1+\tan^4 x\right)}{\tan^2 x\left(2+\tan^2 2x\right)}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Deducem că $\frac{\tan^2 2x\left(1+\tan^4 x\right)}{\tan^2 x\left(2+\tan^2 2x\right)}=2$.

Remarca.

Solve for $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$

$$\frac{\tan^2 2x\left(1+\tan^4 x\right)}{\tan^2 x\left(2+\tan^2 2x\right)}=2\sqrt{3}\tan x.$$

Marin Chirciu

Soluție

Deducem că $\frac{\tan^2 2x\left(1+\tan^4 x\right)}{\tan^2 x\left(2+\tan^2 2x\right)}=2$.

Ecuația se scrie $2\sqrt{3}\tan x=2 \Leftrightarrow \tan x=\frac{1}{\sqrt{3}}, x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}$.

Problema875.

If M isa matrix with long diagonal cosisting of natural numbers $1,2,...,n$ while all off diagonal elements are 1

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ . & . & . & . & . & . \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & n \end{pmatrix}.$$

Find $\det(M)$.

Math10/2025

Soluție

$\det(M)=(n-1)!$.

Problema876.

If $x,y,z>0, xy+yz+zx\geq 1$ then in ΔABC holds:

$$\sum xa^2\geq 4F.$$

Laurențiu Panaitopol, București, Mathematical Inequalities6/2016

Soluție

Lema.

In ΔABC

$$\sum xa^2\geq 4F\sqrt{xy+yz+zx}.$$

Oppenheim

Folosind **Lema** Oppenheim obținem: $\sum xa^2\geq 4F\sqrt{xy+yz+zx}\overset{\sum xy\geq 1}{\geq} 4F$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral și $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Remarcă.

In ΔABC

$$\sum a^2 \tan\frac{A}{2} \geq 4F .$$

Marin Chirciu

Soluție

$\sum a^2 \tan\frac{A}{2} = 4p(R-r) \overset{Euler}{\geq} 4pr = 4F$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral .

Problema877.

4212. In ΔABC

$$\sum \frac{a}{b+c} + \frac{r}{R} \leq 2 .$$

Florin Stănescu, Găești, Crux Math 10/2019

$\sum \frac{a}{b+c} + \frac{r}{R} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{2(p^2-r^2-Rr)}{p^2+r^2+2Rr} + \frac{r}{R} \leq 2 \Leftrightarrow p^2 \leq 6R^2 + 2Rr - r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$.

Remarcă.

In ΔABC holds:

$$\sum \frac{a}{b+c} + \frac{p^2}{27Rr} \geq 2 .$$

Marin Chirciu

$\sum \frac{a}{b+c} + \frac{p^2}{27Rr} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{2(p^2-r^2-Rr)}{p^2+r^2+2Rr} + \frac{p^2}{27Rr} \geq 2 \Leftrightarrow p^2(p^2+r^2+2Rr) \geq 54Rr^2(3R+2r)$

care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \geq 16Rr - 5r^2$.

Problema878.

In ΔABC

$$\sum r_a\sqrt{r_a} \ge 3\left(\frac{3R}{2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Dang Ngoc Minh, Vietnam,RMM 10/2025

Remarcă.

In ΔABC

1) $$\sum r_a\sqrt{r_a} \ge 3(3r)^{\frac{3}{2}}.$$

Soluție

$$LHS = \sum r_a\sqrt{r_a} \overset{AG}{\ge} 3\sqrt[3]{(r_a r_b r_c)^{\frac{3}{2}}} = 3(r_a r_b r_c)^{\frac{1}{2}} = 3(rp^2)^{\frac{1}{2}} \overset{Mitrinovic}{\ge} 3(r\cdot 27r^2)^{\frac{1}{2}} = 3\left((3r)^3\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 3(3r)^{\frac{3}{2}} = 3(3r)^{\frac{3}{2}} = RHS.$$

2). $$\sum h_a\sqrt{h_a} \ge 3(3r)^{\frac{3}{2}}.$$

3). $$\sum m_a\sqrt{m_a} \ge 3(3r)^{\frac{3}{2}}.$$

4). $$\sum s_a\sqrt{s_a} \ge 3(3r)^{\frac{3}{2}}.$$

5). $$\sum w_a\sqrt{w_a} \ge 3(3r)^{\frac{3}{2}}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema879.

In ΔABC

$$\sum \frac{r_a}{r_b}\left(1-\frac{r}{r_c}\right) \ge 2.$$

Nica Nicolae,RMM 9/2016

Soluție

$$LHS=\sum\frac{r_a}{r_b}\left(1-\frac{r}{r_c}\right)=\sum\frac{r_a}{r_b}-r\sum\frac{r_a}{r_br_c}=\sum\frac{r_a^2}{r_ar_b}-\frac{r(4R+r)^2}{p^2}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum r_a\right)^2}{\sum r_ar_b}-\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2+2=$$

$$=\frac{(4R+r)^2}{p^2}-\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2+2=2=RHS.$$

Remarcă.

In ΔABC

$$\sum\frac{h_a}{h_b}\left(1-\frac{r}{h_c}\right)\geq 2.$$

Marin Chirciu

Soluție

$$LHS=\sum\frac{h_a}{h_b}\left(1-\frac{r}{h_c}\right)=\sum\frac{h_a}{h_b}-\sum\frac{rh_a}{h_bh_c}=\sum\frac{h_a^2}{h_ah_b}-\sum\frac{rh_a}{h_bh_c}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum h_a\right)^2}{\sum h_ah_b}-\sum\frac{rh_a}{h_bh_c}=$$

$$=\frac{\left(\frac{p^2+r^2+4Rr}{2R}\right)^2}{\frac{2rp^2}{R}}-\frac{p^2\left(p^2+2r^2-8Rr\right)+r^2(4R+r)^2}{8p^2Rr}=\frac{\left(p^2+r^2+4Rr\right)^2}{8Rrp^2}-$$

$$-\frac{p^2\left(p^2+2r^2-8Rr\right)+r^2(4R+r)^2}{8p^2Rr}=2=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema880.

Solve the equation

$$\left[\frac{x-5}{4}\right]=\frac{x-10}{3}.$$

Cdp-IX

Soluție

Folosim:

1). $x-1<[x]\leq x,\ \forall\ x\in\mathbf{R}$, pentru $x\to\frac{x-5}{4}$.

Obținem $\frac{x-5}{4}-1<\left[\frac{x-5}{4}\right]\le\frac{x-5}{4}$, $\left[\frac{x-5}{4}\right]=\frac{x-10}{3}\Leftrightarrow\frac{x-5}{4}-1<\frac{x-10}{3}\le\frac{x-5}{4}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in(13,25]$,(1).

2). $[x]\in\mathbf{Z}$, $\forall\ x\in\mathbf{R}$, pentru $x\to\frac{x-5}{4}$.

Obținem $\left[\frac{x-5}{4}\right]=\frac{x-10}{3}\in\mathbf{Z}\Rightarrow\frac{x-10}{3}=k$, $k\in\mathbf{Z}\Leftrightarrow x=3k+10$, $k\in\mathbf{Z}$, (2).

Din (1) și (2) $\Rightarrow 3k+10\in(13,25]\Rightarrow k\in(1,5]$, $k\in\mathbf{Z}\Leftrightarrow k\in\{2,3,4,5\}$.

Din $x=3k+10$, $k\in\{2,3,4,5\}$ $\Leftrightarrow x\in\{16,19,22,25\}$.

Reciproc $x\in\{16,19,22,25\}$ verifică ecuația $\left[\frac{x-5}{4}\right]=\frac{x-10}{3}$.

Deducem că mulțimea soluțiilor ecuației este $S=\{16,19,22,25\}$.

<u>Remarca.</u>

Let be $n\in\mathbf{N}^*$ fixed. Solve the equation

$$\left[\frac{x-n-2}{n+1}\right]=\frac{x-2n-4}{n}.$$

Marin Chirciu

<u>Soluție</u>

Folosim:

1). $x-1<[x]\le x$, $\forall\ x\in\mathbf{R}$, pentru $x\to\frac{x-n-2}{n+1}$.

Obținem $\frac{x-n-2}{n+1}-1<\left[\frac{x-n-2}{n+1}\right]\le\frac{x-n-2}{n+1}$, $\left[\frac{x-n-2}{n+1}\right]=\frac{x-2n-4}{n}\Leftrightarrow$

$\frac{x-n-2}{n+1}-1<\frac{x-2n-4}{n}\le\frac{x-n-2}{n+1}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in(3n+4,n^2+4n+4]$,(1).

2). $[x]\in\mathbf{Z},\forall\ x\in\mathbf{R}$, pentru $x\to\dfrac{x-n-2}{n+1}$.

Obținem $\left[\dfrac{x-n-2}{n+1}\right]=\dfrac{x-2n-4}{n}\in\mathbf{Z}\Rightarrow\dfrac{x-2n-4}{n}=k$, $k\in\mathbf{Z}\Leftrightarrow x=nk+2n+4$, $k\in\mathbf{Z}$, (2).

Din (1) și (2) $\Rightarrow nk+2n+4\in\left(3n+4,n^2+4n+4\right]\Rightarrow k\in\left(1,n+2\right],k\in\mathbf{Z}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k\in\left\{2,3,...,n+1,n+2\right\}$, $n\in\mathbf{N}^*$.

Din $x=nk+2n+4$, $k\in\left\{2,3,...,n+1,n+2\right\}$, $n\in\mathbf{N}^*\Leftrightarrow$
$x\in\left\{4n+4,5n+4,...,n^2+3n+4,n^2+4n+4\right\}$.

Reciproc $x\in\left\{4n+4,5n+4,...,n^2+3n+4,n^2+4n+4\right\}$ verifică ecuația $\left[\dfrac{x-n-2}{n+1}\right]=\dfrac{x-2n-4}{n}$.

Deducem că mulțimea soluțiilor ecuației este $S=\left\{4n+4,5n+4,...,n^2+3n+4,n^2+4n+4\right\}$.

Problema881.

Solve in $\mathbf{R}$

$$\frac{(x+3)^2-20}{2(x+1)}=\sqrt{(x+1)(x-3)}.$$

George Florin Șerban, Brăila,RMM 10/2025

Soluție

Domeniul de definiție este $D=(-\infty,-1)\cup[3,\infty)$.

Cu substituția $x-1=t$ ecuația se scrie:

$$\frac{(t+4)^2-20}{2(t+2)}=\sqrt{(t+2)(t-2)}\Leftrightarrow(t+4)^2-20=2(t+2)\sqrt{(t+2)(t-2)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[(t+4)^2-20\right]^2=4(t+2)^3(t-2)\Leftrightarrow\left(t^2+8t-4\right)^2=4\left(t^2+4t+4\right)\left(t^2-4\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3t^4-56t^2-80=0\Leftrightarrow\left(t^2-20\right)\left(3t^2+4\right)=0\Leftrightarrow t^2=20\Leftrightarrow t=\pm2\sqrt{5}\Leftrightarrow x=1\pm2\sqrt{5}.$$

Remarca.

Solve in $\mathbf{R}$

$$x(x+4)=16+2x\sqrt{x(x-4)}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Domeniul de definiție este $D=(-\infty,0)\cup[4,\infty)$.

Cu substituția $x=t+2$ ecuația se scrie:

$$(t+2)(t+2+4)=16+2(t+2)\sqrt{(t+2)(t+2-4)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(t+2)(t+6)=16+2(t+2)\sqrt{(t+2)(t-2)}\Leftrightarrow t^2+8t-4=2(t+2)\sqrt{(t^2-4)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(t^2+8t-4\right)^2=4\left(t^2+4t+4\right)\left(t^2-4\right)\Leftrightarrow 3t^4-56t^2-80=0\Leftrightarrow\left(t^2-20\right)\left(3t^2+4\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t^2=20\Leftrightarrow t=\pm2\sqrt{5}\Leftrightarrow x-2=\pm2\sqrt{5}\;\; x=2\pm2\sqrt{5}.$$

Problema883

In ΔABC

$$\sum\frac{h_a}{r_a}\geq 4-\frac{2r}{R}.$$

Adil Abdullayev, Azerbaijan,RMM 10/2016

Soluție

$$LHS=\sum\frac{h_a}{r_a}=\frac{p^2+r^2-8Rr}{2Rr}\overset{Gerretsen}{\geq}\frac{16Rr-5r^2+r^2-8Rr}{2Rr}=\frac{8Rr-4r^2}{2Rr}=4-\frac{2r}{R}=RHS$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarca.

In ΔABC

1). $$4-\frac{2r}{R}\leq\sum\frac{h_a}{r_a}\leq 3\left(\frac{R}{2r}\right)^2.$$

Soluție

Folosim $\sum \frac{h_a}{r_a} = \frac{p^2 + r^2 - 8Rr}{2Rr}$

2). $$3 \le \sum \frac{r_a}{h_a} \le \frac{2R}{r} - 1.$$

Soluție

Folosim $\sum \frac{r_a}{h_a} = \frac{2R - r}{r}$

3). $$\sum \frac{h_a}{r_a} \le \sum \frac{r_a}{h_a}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție

Folosim $\sum \frac{h_a}{r_a} = \frac{p^2 + r^2 - 8Rr}{2Rr}$, $\sum \frac{r_a}{h_a} = \frac{2R - r}{r}$ și $p^2 \le 4R^2 + 4Rr + 3r^2$ (Gerretsen).

Problema884.

In ΔABC

$$\sum \frac{\cos B \cos C}{\cos A} \ge \sum \frac{a^2}{b^2 + c^2}.$$

Rahim Shahbazov, Azerbaijan,RMM 10/2025

Soluție

$$LHS = \sum \frac{\cos B \cos C}{\cos A} = \sum \frac{\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}}{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}} = \sum \frac{\left(a^2 + c^2 - b^2\right)\left(a^2 + b^2 - c^2\right)}{2a^2\left(b^2 + c^2 - a^2\right)} \overset{(1)}{\ge}$$

$\overset{(1)}{\ge} \sum \frac{a^2}{b^2 + c^2} = RHS$, unde (1) rezultă din substituția

$$(x, y, z) = \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}, \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2}, \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}\right) \Leftrightarrow \left(a^2, b^2, c^2\right) = \left(y + z, z + x, x + y\right).$$

Inegalitatea (1) se scrie:

$$\sum\frac{\left(a^2+c^2-b^2\right)\left(a^2+b^2-c^2\right)}{2a^2\left(b^2+c^2-a^2\right)}\geq\sum\frac{a^2}{b^2+c^2}\Leftrightarrow\sum\frac{yz}{x\left(y+z\right)}\geq\sum\frac{y+z}{2x+y+z}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sum x^2\left(y-z\right)^2\left(x^2+2x\left(y+z\right)+yz\right)\geq 0.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z\Leftrightarrow a=b=c\Leftrightarrow A=B=C$.

Problema885.

If $a,b,c>0$, $\frac{1}{a^5}+\frac{1}{b^5}+\frac{1}{c^5}=3$ then

$$\sum\sqrt[5]{a^5+5}\leq\sum\sqrt[5]{5a^5+1}.$$

Denos Maradiaga, Mathematical Inequalities 10/2025

Soluție

Cu substituția $\left(\frac{1}{a^5},\frac{1}{b^5},\frac{1}{c^5}\right)=\left(x,y,z\right)$, $x+y+z=3$ problema se reformulează:

If $x,y,z>0$, $x+y+z=3$ then

$$\sum\sqrt[5]{\frac{5}{x}+1}\geq\sum\sqrt[5]{\frac{1}{x}+5}.$$

Considerăm funcția $f\left(x\right)=\sqrt[5]{\frac{5}{x}+1}-\sqrt[5]{\frac{1}{x}+5}$, $x>0$, $f''\left(x\right)\geq 0\Rightarrow f$ este convexă.

Folosind inegalitatea lui Jensen obținem:

$$\sum f\left(x\right)\geq 3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)=3f\left(\frac{3}{3}\right)=3f\left(1\right)=3\cdot 0=0.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Remarcă.

1). If $a,b,c>0$, $\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}+\frac{1}{c^n}=3$ and $n\in\mathbf{N}^*$ then

$$\sum\sqrt[n]{a^n+n}\leq\sum\sqrt[n]{na^n+1}.$$

Soluție

Pentru $n=1$ se obține egalitatea $\sum(a+1)=\sum(a+1)$.

În continuare fie $n\geq 2$.

Cu substituția $\left(\frac{1}{a^n},\frac{1}{b^n},\frac{1}{c^n}\right)=(x,y,z), x+y+z=3$ problema se reformulează:

2). If $x,y,z>0$, $x+y+z=3$ then

$$\sum\sqrt[n]{\frac{n}{x}+1}\geq\sum\sqrt[n]{\frac{1}{x}+n}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Considerăm funcția $f(x)=\sqrt[n]{\frac{n}{x}+1}-\sqrt[n]{\frac{1}{x}+n}$, $x>0$, $f''(x)\geq 0\Rightarrow f$ este convexă.

Folosind inegalitatea lui Jensen obținem:

$$\sum f(x)\geq 3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)=3f\left(\frac{3}{3}\right)=3f(1)=3\cdot 0=0.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Problema886.

In ΔABC

$$\sum\frac{x}{y+z}w_a^2\geq 27r^2-\frac{p^2}{2}.$$

Mehmet Șahin,Turkey,RMM 9/2025

Soluție

$$LHS=\sum\frac{x}{y+z}w_a^2=\sum\left(\frac{x}{y+z}+1-1\right)w_a^2=\sum\left(\frac{x}{y+z}+1\right)w_a^2-\sum w_a^2=\frac{x+y+z}{y+z}w_a^2-\sum w_a^2\overset{CS}{\geq}$$

$$\overset{CS}{\geq}\sum x\frac{\left(\sum w_a\right)^2}{\sum(y+z)}-\sum w_a^2=\sum x\frac{\left(\sum w_a\right)^2}{2\sum x}-\sum w_a^2=\frac{\left(\sum w_a\right)^2}{2}-\sum w_a^2=$$

$$=\frac{\sum w_a^2+2\sum w_aw_b}{2}-\sum w_a^2=\frac{2\sum w_aw_b-\sum w_a^2}{2}=\sum w_aw_b-\frac{1}{2}\sum w_a^2\overset{AG}{\geq}3\sqrt[3]{\left(w_aw_bw_c\right)^2}-$$

$$-\frac{1}{2}\sum p(p-a)\geq 3\sqrt[3]{\left(27r^3\right)^2}-\frac{p^2}{2}\geq 27r^2-\frac{p^2}{2}=RHS.$$

Am folosit mai sus $w_a w_b w_c \geq 27r^3$, vezi $w_a w_b w_c \geq h_a h_b h_c = \frac{2r^2 p^2}{R} \overset{Cosnita\&Turtoiu}{\geq} 27r^3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral și $x = y = z$.

Remarcă.

In ΔABC

$$\sum \frac{x}{y+z} h_a^2 \geq 27r^2 - \frac{1}{6}(4R+r)^2.$$

Marin Chirciu

Problema887.

If $a,b,c > 0$ then

$$\sum \sqrt{\frac{a}{a+8b}} \geq 3\sum \frac{a}{5a+4b}.$$

Nguyen Minh Tho, Vietnam, Mathematical Inequalities9/2025

Remarcă.

1). If $a,b,c > 0$, $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = 3$ then

$$\sum \sqrt{\frac{a}{a+8b}} \leq 1.$$

Soluție

Cu substituția $\left(\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}\right) = (x,y,z)$, $x+y+z=3$ obținem:

$$\sum \sqrt{\frac{a}{a+8b}} = \sum \sqrt{\frac{\frac{a}{b}}{\frac{a}{b}+8}} \overset{\frac{a}{b}=x}{=} \sum \sqrt{\frac{x}{x+8}} = 3\sum \sqrt{\frac{x}{x+8} \cdot \frac{1}{9}} \leq 3\sum \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+8} + \frac{1}{9}\right) = \frac{3}{2}\left(\sum \frac{x}{x+8} + \frac{1}{3}\right) \leq$$

$$\leq \frac{3}{2}\left(\sum \frac{x}{x+8} + \frac{1}{3}\right) \leq \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = 1 = RHS$$,care rezultă din:

$\sum \frac{x}{x+8} \leq \frac{1}{3}$,vezi $\sum \frac{x}{x+8} \leq \frac{1}{3} \overset{reverse}{\Leftrightarrow} \sum \frac{1}{x+8} \geq \frac{1}{3}$, adevărată din:

$$\sum \frac{1}{x+8} \overset{CS}{\geq} \frac{9}{\sum (x+8)} = \frac{9}{\sum x+24} = \frac{9}{3+24} = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1 \Leftrightarrow a=b=c$.

2). If $a,b,c>0$, $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=3$, and $\lambda \geq 0$ then

$$\sum \sqrt{\frac{a}{a+\lambda b}} \leq \frac{3}{\sqrt{\lambda+1}}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema888.

In ΔABC

$$\sum \sin 2A \leq \sum \sin A.$$

Nguyen Viet Hung, Vietnam, Mathematical Inequalities9/2025

Soluție

Folosind identitățile în triunghi $\sum \sin 2A = \frac{2pr}{R^2}$ și $\sum \sin A = \frac{p}{R}$ inegalitatea se scrie:

$\frac{2pr}{R^2} \leq \frac{p}{R} \Leftrightarrow 2r \leq R$,(Euler).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

In ΔABC

1). $$\sum \cos 2A \geq -\sum \cos A.$$

Soluție

Folosind identitățile în triunghi $\sum \cos 2A = \frac{3R^2+4Rr+r^2-p^2}{R^2}$ și $\sum \cos A = 1+\frac{r}{R}$ avem:

$\frac{3R^2+4Rr+r^2-p^2}{R^2} \geq -1-\frac{r}{R} \Leftrightarrow p^2 \leq 4R^2+5Rr+r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \leq 4R^2+4Rr+3r^2$.

2). $\left(\sum \sin 2A + \cos A\right) \le \sum\left(\sin A - \cos 2A\right)$.

Marin Chirciu

Soluție

Folosind identitățile în triunghi $\sum \cos 2A = \frac{3R^2+4Rr+r^2-p^2}{R^2}$, $\sum \cos A = 1+\frac{r}{R}$,

$\sum \sin 2A = \frac{2pr}{R^2}$ și $\sum \sin A = \frac{p}{R}$ inegalitatea se scrie:

$$\frac{2pr}{R^2}+1+\frac{r}{R} \le \frac{p}{R}-\frac{3R^2+4Rr+r^2-p^2}{R^2} \Leftrightarrow \frac{3R^2+4Rr+r^2-p^2}{R^2}+1+\frac{r}{R}+\frac{2pr}{R^2}-\frac{p}{R} \ge 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \frac{4R^2+5Rr+r^2-p^2}{R^2}+\frac{p}{R}\left(\frac{2r}{R}-1\right) \le 0$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen

$p^2 \le 4R^2+4Rr+3r^2$ și inegalitatea lui Euler $2r \le R$.

Problema889.

If $a,b,c,d>0$, $abcd \le 1$ then

$$\sum \frac{1}{(a+1)^4} \ge \frac{1}{4}.$$

Nguyen Minh Tho, Vietnam, Mathematical Inequalities9/2025

Soluție

Avem $LHS = \sum \frac{1}{(a+1)^4} \overset{CS}{\ge} \frac{1}{4}\left(\sum \frac{1}{(a+1)^2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(b+1)^2}+\frac{1}{(c+1)^2}+\frac{1}{(d+1)^2}\right)^2 \overset{(1)}{\ge}$

$\overset{(1)}{\ge} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+cd}\right)^2 \overset{(2)}{\ge} \frac{1}{4}\cdot 1^2 = \frac{1}{4} = RHS$,unde:

(1) $\Leftrightarrow \frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(b+1)^2} \ge \frac{1}{1+ab} \Leftrightarrow ab(a-b)^2+(1-ab)^2 \ge 0$;

(2) $\Leftrightarrow \frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+cd} \ge 1 \Leftrightarrow 1+ab+1+cd \ge (1+ab)(1+cd) \Leftrightarrow abcd \le 1$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=d=1$.

Remarcă.

If $a_1, a_2, ..., a_8 > 0$, $a_1 a_2 ... a_8 \le 1$ then

$$\sum \frac{1}{(a_1+1)^4} \ge \frac{1}{2}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Avem $LHS = \sum \frac{1}{(a_1+1)^4} \overset{CS}{\ge} \frac{1}{8}\left(\sum \frac{1}{(a_1+1)^2}\right)^2 = \frac{1}{8}\left(\sum \left(\underbrace{\frac{1}{(a_1+1)^2} + \frac{1}{(a_2+1)^2}}_{4}\right)\right)^4 \overset{(1)}{\ge}$

$$\overset{(1)}{\ge} \frac{1}{8}\left(\underbrace{\frac{1}{1+a_1a_2} + \frac{1}{1+a_3a_4}}_{\ge 1} + \underbrace{\frac{1}{1+a_5a_6} + \frac{1}{1+a_7a_8}}_{\ge 1}\right)^2 \overset{(2)}{\ge} \frac{1}{8} \cdot (1+1)^2 = \frac{1}{2} = RHS$$,unde:

(1) $\Leftrightarrow \frac{1}{(a_1+1)^2} + \frac{1}{(a_2+1)^2} \ge \frac{1}{1+a_1a_2} \Leftrightarrow a_1a_2(a_1-a_2)^2 + (1-a_1a_2)^2 \ge 0$;

(2) $\Leftrightarrow \frac{1}{1+a_1a_2} + \frac{1}{1+a_3a_4} \ge 1 \Leftrightarrow 1+a_1a_2+1+a_3a_4 \ge (1+a_1a_2)(1+a_3a_4) \Leftrightarrow a_1a_2a_3a_4 \le 1.$

Apoi $a_1 a_2 ... a_8 = xy \overset{AG}{\le} \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \overset{x\le 1, y\le 1}{\le} \left(\frac{1+1}{2}\right)^2 = 1$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a_1 = a_2 = ... = a_8 = 1$.

Problema890.

Arătați că ecuația $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$ admite o infinitate de soluții întregi.

Math 9/2025

Soluție

$(x, y, z, t) = (k, k+1, k^2+k, k^2+k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$ verifică ecuația.

Remarcă.

1). Fie $\lambda \in \mathbf{Z}$ fixat. Arătați că ecuația $x^2 + y^2 + z^2 = (\lambda^2 - \lambda + 1)^2$ admite o infinitate de soluții întregi.

Soluție

$(x,y,z)=(\lambda,\lambda-1,\lambda^2-\lambda)$, $\lambda\in\mathbf{Z}$ verifică ecuația.

2). Fie $\lambda\in\mathbf{Z}$ fixat. Arătați că ecuația $x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+v^2=2(\lambda^4+3\lambda^2+1)$ admite o infinitate de soluții întregi.

Soluție

$(x,y,z,t,u,v)=(\lambda,\lambda+1,\lambda^2+\lambda,\lambda,\lambda-1,\lambda^2-\lambda)$, $\lambda\in\mathbf{Z}$ verifică ecuația.

3). Fie $\lambda\in\mathbf{Z}$ fixat. Arătați că ecuația $x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+v^2=(\lambda^2+\lambda+1)^2+(\lambda^2-\lambda+1)^2$ admite o infinitate de soluții întregi.

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție

$(x,y,z,t,u,v)=(\lambda,\lambda+1,\lambda^2+\lambda,\lambda,\lambda-1,\lambda^2-\lambda)$, $\lambda\in\mathbf{Z}$ verifică ecuația.

Cum $\mathbf{Z}$ este o mulțime infinită concluzia se impune.

Problema891.

If $x,y,z\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, $\sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2 z=2$ then

$$\tan^2 x+\tan^2 y+\tan^2 z\geq 6.$$

Panagiotis Danousis, Greece,MathAtelier 9/2025

Soluție

Avem $LHS=\sum\tan^2 x=\sum\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\sum\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}=\sum\frac{1}{\cos^2 x}-3\overset{CS}{\geq}\frac{9}{\sum\cos^2 x}-3=$

$$=\frac{9}{\sum(1-\sin^2 x)}-3=\frac{9}{3-\sum\sin^2 x}-3=\frac{9}{3-2}-3=9-3=6=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $\sin x=\sin y=\sin z=\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Remarcă.

If $x,y,z\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, $\cos^2 x+\cos^2 y+\cos^2 z=2$ then

$$\cot^2 x+\cot^2 y+\cot^2 z\geq 6.$$

Marin Chirciu

Soluție

Avem $LHS=\sum\cot^2 x=\sum\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}=\sum\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}=\sum\frac{1}{\sin^2 x}-3\overset{CS}{\geq}\frac{9}{\sum\sin^2 x}-3=$

$$=\frac{9}{\sum\left(1-\cos^2 x\right)}-3=\frac{9}{3-\sum\cos^2 x}-3=\frac{9}{3-2}-3=9-3=6=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $\cos x=\cos y=\cos z=\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Problema892.

If $0\leq x\leq 6, 0\leq y\leq 4$ then

$$\sqrt{6-x}+\sqrt{xy}+2\sqrt{4-y}\leq 5\sqrt{2}.$$

Imad Zak, Lebanon, Mathematical Inequalities9/2025

Soluție

Avem $\sqrt{6-x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2(6-x)}\overset{AG}{\leq}\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2+(6-x)}{2}=\frac{8-x}{2\sqrt{2}}$, cu egal pentru $2=6-x\Leftrightarrow x=4$.

Analog $\sqrt{4-y}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2(4-y)}\overset{AG}{\leq}\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2+(4-y)}{2}=\frac{6-y}{2\sqrt{2}}$,cu egal pentru $2=4-y\Leftrightarrow y=2$.

Apoi $\sqrt{xy}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2xy}\overset{AG}{\leq}\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{x+2y}{2}=\frac{x+2y}{2\sqrt{2}}$, cu egal pentru $x=2y$.

$$LHS=\sqrt{6-x}+\sqrt{xy}+2\sqrt{4-y}\leq\frac{8-x}{2\sqrt{2}}+\frac{x+2y}{2\sqrt{2}}+2\cdot\frac{6-y}{2\sqrt{2}}=\frac{20}{2\sqrt{2}}=5\sqrt{2}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $(x,y)=(4,2)$.

Remarcă.

1). Let be $\lambda\geq 0$ fixed. If $0\leq x\leq 2\lambda+2, 0\leq y\leq\lambda+2$ then

$$\sqrt{2\lambda+2-x}+\sqrt{xy}+2\sqrt{\lambda+2-y}\leq(\lambda+3)\sqrt{2}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Avem $\sqrt{2\lambda+2-x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2(2\lambda+2-x)}\overset{AG}{\leq}\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2+(2\lambda+2-x)}{2}=\frac{2\lambda+4-x}{2\sqrt{2}}$,

cu egal pentru $2=2\lambda+2-x\Leftrightarrow x=2\lambda$.

Analog $\sqrt{\lambda+2-y}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2(\lambda+2-y)}\overset{AG}{\leq}\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2+(\lambda+2-y)}{2}=\frac{\lambda+4-y}{2\sqrt{2}}$,

cu egal pentru $2=\lambda+2-y\Leftrightarrow y=\lambda$.

Apoi $\sqrt{xy}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2xy}\overset{AG}{\leq}\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{x+2y}{2}=\frac{x+2y}{2\sqrt{2}}$, cu egal pentru $x=2y$.

$$LHS=\sqrt{2\lambda+2-x}+\sqrt{xy}+2\sqrt{\lambda+2-y}\leq\frac{2\lambda+4-x}{2\sqrt{2}}+\frac{x+2y}{2\sqrt{2}}+2\cdot\frac{\lambda+4-y}{2\sqrt{2}}=\frac{4\lambda+12}{2\sqrt{2}}=$$

$$=(\lambda+3)\sqrt{2}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $(x,y)=(2\lambda,\lambda)$.

2). $\sqrt{6-x}+\sqrt{xy}+2\sqrt{4-y}=5\sqrt{2}$.

Soluție

Deducem că $(x,y)=(4,2)$ este soluția unică a ecuației.

3). Let be $\lambda\geq 0$ fixed. Solve in real numbers

$$\sqrt{2\lambda+2-x}+\sqrt{xy}+2\sqrt{\lambda+2-y}=(\lambda+3)\sqrt{2}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Deducem că $(x,y)=(2\lambda,\lambda)$ este soluția unică a ecuației.

Problema893.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=1$ then

$$\sum\sqrt{3x^2+4xy+y^2}\leq 2\sqrt{2}.$$

Ovidiu Bobb, Copalnic Mănăștur, Maramureș

Soluție

Lema.

If $x, y, z > 0$, $x+y+z=1$ then

$$\sqrt{3x^2+4xy+y^2} \le \frac{5x+3y}{2\sqrt{2}}.$$

Demonstrație

$$\sqrt{3x^2+4xy+y^2} \le \frac{5x+3y}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow (x-y)^2 \ge 0.$$

$$LHS = \sum \sqrt{3x^2+4xy+y^2} \overset{Lema}{\le} \sum \frac{5x+3y}{2\sqrt{2}} = \frac{8\sum x}{2\sqrt{2}} = \frac{8\cdot 1}{2\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Remarcă.

1), If $x, y, z > 0$, $x+y+z=1$ and $\lambda \ge 0$ then

$$\sum \sqrt{\lambda x^2+(\lambda+1)xy+y^2} \le \sqrt{2(\lambda+1)}.$$

Soluție

Lema.

If $x, y, z > 0$, $x+y+z=1$ then

$$\sqrt{\lambda x^2+(\lambda+1)xy+y^2} \le \frac{\sqrt{2}\left((3\lambda+1)x+(\lambda+3)y\right)}{4\sqrt{\lambda+1}}.$$

Demonstrație

$$\sqrt{\lambda x^2+(\lambda+1)xy+y^2} \le \frac{\sqrt{2}\left((3\lambda+1)x+(\lambda+3)y\right)}{4\sqrt{\lambda+1}} \Leftrightarrow (\lambda-1)^2(x-y)^2 \ge 0.$$

$$LHS = \sum \sqrt{\lambda x^2+(\lambda+1)xy+y^2} \overset{Lema}{\le} \sum \frac{\sqrt{2}\left((3\lambda+1)x+(\lambda+3)y\right)}{4\sqrt{\lambda+1}} = \frac{4\sqrt{2}(\lambda+1)\sum x}{4\sqrt{\lambda+1}} =$$

$$= \frac{4\sqrt{2}(\lambda+1)\cdot 1}{4\sqrt{\lambda+1}} = \sqrt{2(\lambda+1)} = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=\frac{1}{3}$ sau $\lambda=1$.

2), In ΔABC holds:

$$\sum\sqrt{\frac{3}{r_a^2}+\frac{4}{r_ar_b}+\frac{1}{r_b^2}}\leq\frac{2\sqrt{2}}{r}.$$

Soluție

Lema.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=1$ then

$$\sum\sqrt{3x^2+4xy+y^2}\leq 2\sqrt{2}.$$

Folosind **Lema** pentru $(x,y,z)=\left(\frac{r}{r_a},\frac{r}{r_b},\frac{r}{r_c}\right)$ obținem: $\sum\sqrt{\frac{3}{r_a^2}+\frac{4}{r_ar_b}+\frac{1}{r_b^2}}\leq\frac{2\sqrt{2}}{r}$

3). In ΔABC holds:

$$\sum\sqrt{\frac{3}{h_a^2}+\frac{4}{h_ah_b}+\frac{1}{h_b^2}}\leq\frac{2\sqrt{2}}{r}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție

Lema.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=1$ then

$$\sum\sqrt{3x^2+4xy+y^2}\leq 2\sqrt{2}.$$

Folosind **Lema** pentru $(x,y,z)=\left(\frac{r}{h_a},\frac{r}{h_b},\frac{r}{h_c}\right)$ obținem: $\sum\sqrt{\frac{3}{h_a^2}+\frac{4}{h_ah_b}+\frac{1}{h_b^2}}\leq\frac{2\sqrt{2}}{r}$

Problema894.

320. If $M\in Int(\Delta ABC)$, d_a,d_b,d_c distances of point M to the sides BC,CA,AB then

$$\sum\frac{a^3}{d_a}\geq 24F.$$

D.M.Bătinețu-Giurgiu, Daniel Sitaru,RMM 9/2025

Soluție

$$LHS=\sum\frac{a^3}{d_a}=\sum\frac{a^4}{ad_a}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum a^2\right)^2}{\sum ad_a}\overset{I-W}{\geq}\frac{\left(4F\sqrt{3}\right)^2}{2F}=24F=RHS$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral și $M\equiv I$.

Remarcă.

If $n\in\mathbf{N}$, $M\in Int\left(\Delta ABC\right)$, d_a,d_b,d_c distances of point M to the sides BC,CA,AB then

$$\sum\frac{a^{2n+1}}{d_a}\geq 2^{2n+1}\left(\sqrt{3}\right)^{3-n}F^n.$$

Marin Chirciu

Soluție

Pentru $n=0$ se obține $\sum\frac{a}{d_a}\geq 6\sqrt{3}$, vezi:

$$\sum\frac{a}{d_a}=\sum\frac{a^2}{ad_a}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum ad_a}=\frac{(2p)^2}{2F}=\frac{4p^2}{2F}\overset{Hadwiger}{\geq}\frac{2\cdot 3F\sqrt{3}}{F}=6\sqrt{3}.$$

Pentru $n\in\mathbf{N}^*$ se folosește inegalitatea lui Holder.

$$LHS=\sum\frac{a^{2n+1}}{d_a}=\sum\frac{a^{2n+2}}{ad_a}\overset{Holder}{\geq}\frac{\left(\sum a^2\right)^{n+1}}{3^{n-1}\sum ad_a}\overset{I-W}{\geq}\frac{\left(4F\sqrt{3}\right)^{n+1}}{3^{n-1}\cdot 2F}=2^{2n+1}\left(\sqrt{3}\right)^{3-n}F^n=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral și $M\equiv I$.

Problema895

In ΔABC then

$$3\leq\sum\sqrt{\frac{r_a}{h_a}}\leq\sqrt{1+\frac{4R}{r}}.$$

Nguyen Viet Hung, Vietnam, Mathematical Inequalities9/2025

Soluție

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum\sqrt{\frac{r_a}{h_a}}\overset{CBS}{\leq}\sqrt{\sum r_a\sum\frac{1}{h_a}}=\sqrt{(4R+r)\frac{1}{r}}=\sqrt{1+\frac{4R}{r}}.$$

Inegalitatea din stânga.

$$\sum\sqrt{\frac{r_a}{h_a}} \overset{AG}{\geq} 3\sqrt[3]{\prod\sqrt{\frac{r_a}{h_a}}} = 3\sqrt[6]{\frac{r_a r_b r_c}{h_a h_b h_c}} = 3\sqrt[6]{\frac{R}{2r}} \overset{Euler}{\geq} 3.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

In ΔABC then

$$3\sqrt{2} \leq \sum\sqrt{\frac{r_b+r_c}{h_a}} \leq \sqrt{2\left(1+\frac{4R}{r}\right)}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum\sqrt{\frac{r_b+r_c}{h_a}} \overset{CBS}{\leq} \sqrt{\sum(r_b+r_c)\sum\frac{1}{h_a}} = \sqrt{2(4R+r)\frac{1}{r}} = \sqrt{2\left(1+\frac{4R}{r}\right)}.$$

Inegalitatea din stânga.

$$\sum\sqrt{\frac{r_b+r_c}{h_a}} \overset{AG}{\geq} 3\sqrt[3]{\prod\sqrt{\frac{r_b+r_c}{h_a}}} = 3\sqrt[6]{\frac{\prod(r_b+r_c)}{h_a h_b h_c}} = 3\sqrt[6]{\frac{4Rp^2}{\frac{2r^2p^2}{R}}} = 3\sqrt[6]{\frac{2R^2}{r^2}} \overset{Euler}{\geq} 3\sqrt{2}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema896.

If $x, y > 0$, $x+y=1$ then

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right) \geq 9.$$

Ted Szylowiec, Mathematical Inequalities9/2025

Soluție

$$LHS = \left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right) = 1+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{xy} \overset{CS}{\geq} 1+\frac{(1+1)^2}{x+y}+\frac{1}{xy} = 1+\frac{4}{1}+\frac{1}{xy} = 5+\frac{1}{xy} \overset{xy\leq\frac{1}{4}}{\geq} 5+\frac{1}{\frac{1}{4}} =$$

$$= 5+4 = 9 = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = \frac{1}{2}$.

Remarcă.

1). If $x, y, z > 0$, $x + y + z = 1$ then

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right) \geq 64.$$

Soluție

$$LHS = \left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right) = 1+\sum\frac{1}{x}+\sum\frac{1}{xy}+\frac{1}{xyz} \overset{CS}{\geq} 1+\frac{9}{\sum x}+\frac{9}{\sum xy}+\frac{1}{xyz} \geq$$

$$\geq 1+\frac{9}{1}+\frac{9}{\frac{1}{3}}+\frac{1}{\frac{1}{27}} = 64 = RHS.$$

Am folosit mai sus:

1). $\sum xy \leq \frac{1}{3}$, vezi: $1 = (x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx) \Rightarrow \sum xy \leq \frac{1}{3}$.

2). $xyz \leq \frac{1}{27}$, vezi $1 = x+y+z \overset{AG}{\geq} 3\sqrt[3]{xyz} \Rightarrow xyz \leq \frac{1}{27}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = \frac{1}{3}$.

2).If $x, y, z > 0$, $x + y + z = 1$ and $\lambda \geq 0$ then

$$\left(1+\frac{\lambda}{x}\right)\left(1+\frac{\lambda}{y}\right)\left(1+\frac{\lambda}{z}\right) \geq (3\lambda+1)^3.$$

3).In ΔABC

$$\prod\left(1+\frac{r_a}{r}\right) \geq 64.$$

Lema.

If $x, y, z > 0$, $x + y + z = 1$ then

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right) \geq 64.$$

Folosind **Lema** pentru $(x,y,z)=\left(\frac{r}{r_a},\frac{r}{r_b},\frac{r}{r_c}\right)$ obținem: $\prod\left(1+\frac{r_a}{r}\right)\geq 64$

4).In ΔABC

$$\prod\left(1+\frac{h_a}{r}\right)\geq 64.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema897.

If $a,b,c,x,y,z>0$ then

$$\sum\frac{4x}{a+b}\leq\sum\frac{x+z}{a}.$$

Panagiotis Danousis, Greece, MathAtelier9/2025

Soluție

$$LHS=\sum\frac{4x}{a+b}\overset{CS}{\leq}\sum x\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\sum\frac{x+z}{a}=RHS$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

Remarcă.

If $a,b,c,d,x,y,z,t>0$ then

$$\sum\frac{9x}{a+b+c}\leq\sum\frac{x+z+t}{a}.$$

Marin Chirciu

Soluție

$$LHS=\sum\frac{9x}{a+b+c}\overset{CS}{\leq}\sum x\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\sum\frac{x+z+t}{a}=RHS$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=d$.

Problema898.

In acute ΔABC holds:

$$\sum r_a\sqrt{\tan A}\geq 9\sqrt[4]{3}r.$$

Vasile Mircea Popa, RMM 9/2025

Soluție

$$LHS=\sum r_a\sqrt{\tan A}\overset{Chebyshev}{\geq}\frac{1}{3}\sum r_a\sum\sqrt{\tan A}\overset{AG}{\geq}\frac{1}{3}(4R+r)\cdot 3\sqrt[3]{\prod\sqrt{\tan A}}=$$

$$=(4R+r)\sqrt[6]{\prod\tan A}\overset{(1)}{\geq}9r\cdot\sqrt[6]{3\sqrt{3}}=9r\cdot\sqrt[6]{\left(\sqrt{3}\right)^3}=9r\cdot\sqrt{\sqrt{3}}=9\sqrt[4]{3}r=RHS,$$

unde (1) rezultă din $4R+r\overset{Euler}{\geq}9r$ și $\prod\tan A=\frac{2pr}{p^2-(2R+r)^2}\overset{Gerretsen}{\geq}3\sqrt{3}$.

Remarcă.

In acute ΔABC holds:

$$\sum\frac{1}{h_a}\sqrt{\tan A}\geq\sqrt[4]{3}\frac{1}{r}.$$

Marin Chirciu

Soluție

$$LHS=\sum\frac{1}{h_a}\sqrt{\tan A}\overset{Chebyshev}{\geq}\frac{1}{3}\sum\frac{1}{h_a}\sum\sqrt{\tan A}\overset{AG}{\geq}\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{r}\cdot 3\sqrt[3]{\prod\sqrt{\tan A}}=$$

$$=\frac{1}{r}\sqrt[6]{\prod\tan A}\overset{(1)}{\geq}\frac{1}{r}\cdot\sqrt[6]{3\sqrt{3}}=\frac{1}{r}\cdot\sqrt[6]{\left(\sqrt{3}\right)^3}=\frac{1}{r}\cdot\sqrt{\sqrt{3}}=\sqrt[4]{3}\frac{1}{r}=RHS,$$

unde (1) rezultă din $\prod\tan A=\frac{2pr}{p^2-(2R+r)^2}\overset{Gerretsen}{\geq}3\sqrt{3}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema899.

Solve in reals

$$3^{x+5}+7x=13.$$

Qulam Rza Zeynalli, Math 9/2025

Soluție

Funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=3^{x+5}+7x-13$ este strict crescătoare, deci injectivă.

Ecuația $f(x)=0$ are cel mult o soluție.

Cum $f(-2)=0$, deducem că $x=-2$ este soluția unică a ecuației.

Remarcă.

Let be $\lambda \in \mathbf{R}$ fixed. Solve in reals

$$3^{x+\lambda}+3x+3\lambda=1.$$

Marin Chirciu

Soluție

Funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=3^{x+\lambda}+3x+3\lambda-1$ este strict crescătoare, deci injectivă.

Ecuația $f(x)=0$ are cel mult o soluție.

Cum $f(-\lambda)=0$, deducem că $x=-\lambda$ este soluția unică a ecuației.

Problema900.

If $x,y,z>0$, $xy+yz+zx=3$ then

$$\frac{1}{xyz}\geq\frac{2}{3}\sum\sqrt{x}-1.$$

Imad Zak, Lebanon, Mathematical Inequalities9/2025

Soluție

$$\frac{1}{xyz}\geq\frac{2}{3}\sum\sqrt{x}-1 \Leftrightarrow \frac{3}{xyz}\geq 2\sum\sqrt{x}-3 \Leftrightarrow \frac{3}{xyz}+3\geq 2\sum\sqrt{x} \Leftrightarrow \frac{\sum xy}{xyz}+\sum xy\geq 2\sum\sqrt{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum\frac{1}{x}+\sum xy\geq 2\sum\sqrt{x} \Leftrightarrow \sum\left(\frac{1}{x}-2\sqrt{y}+xy\right)\geq 0 \Leftrightarrow \sum\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{xy}\right)^2\geq 0.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1$.

Remarcă.

1). In ΔABC

$$\sum\sqrt{\sqrt{3}\tan\frac{A}{2}}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{p}{r\sqrt{3}}+3\right).$$

Soluție

Lema.

If $x, y, z > 0$, $xy + yz + zx = 3$ then

$$\frac{1}{xyz} \geq \frac{2}{3}\sum \sqrt{x} - 1.$$

Folosind **Lema** pentru $(x, y, z) = \left(\sqrt{3}\tan\frac{A}{2}, \sqrt{3}\tan\frac{B}{2}, \sqrt{3}\tan\frac{C}{2}\right)$ obținem:

$$\sum \sqrt{\sqrt{3}\tan\frac{A}{2}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{p}{r\sqrt{3}} + 3\right)$$

2). In acute ΔABC

$$\sum \sqrt{\sqrt{3}\cot A} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2pr}{3\sqrt{3}\cdot\left[p^2 - (2R + r)^2\right]} + 3\right).$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție

Lema.

If $x, y, z > 0$, $xy + yz + zx = 3$ then

$$\frac{1}{xyz} \geq \frac{2}{3}\sum \sqrt{x} - 1.$$

Folosind **Lema** pentru $(x, y, z) = \left(\sqrt{3}\cot A, \sqrt{3}\cot B, \sqrt{3}\cot C\right)$ obținem:

$$\sum \sqrt{\sqrt{3}\cot A} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2pr}{3\sqrt{3}\cdot\left[p^2 - (2R + r)^2\right]} + 3\right)$$

Problema901.

In acute ΔABC holds

$$\sum \frac{1}{b^2 + c^2 - a^2} \geq \frac{1}{4r^2}.$$

Nica Nicolae,RMM7/2016

Soluție

$$LHS=\sum\frac{1}{b^2+c^2-a^2}=\frac{1}{2\left[p^2-(2R+r)^2\right]}\overset{(1)}{\geq}\frac{1}{4r^2}=RHS,$$

unde $\frac{1}{2\left[p^2-(2R+r)^2\right]}\overset{(1)}{\geq}\frac{1}{4r^2}\Leftrightarrow p^2-(2R+r)^2\leq 2r^2\Leftrightarrow p^2\leq 4R^2+4Rr+3r^2$,(Gerretsen).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

In acute ΔABC holds

1). $$\sum\frac{a}{b^2+c^2-a^2}\geq\frac{9R}{4F}.$$

Marin Chirciu

Soluție

$$LHS=\sum\frac{a}{b^2+c^2-a^2}=\frac{8R^2+6Rr+r^2-p^2}{2p\left[p^2-(2R+r)^2\right]}\overset{Gerretsen}{\geq}\frac{8R^2+6Rr+r^2-4R^2-4Rr-3r^2}{2p\left[4R^2+4Rr+3r^2-(2R+r)^2\right]}=$$

$$=\frac{4R^2+2Rr-2r^2}{2p\cdot 2r^2}\overset{Euler}{\geq}\frac{9Rr}{2p\cdot 2r^2}=\frac{9R}{4rp}=\frac{9R}{4F}=RHS.$$

2). $$\sum\frac{a^2}{b^2+c^2-a^2}\geq 3.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție

$$LHS=\sum\frac{a^2}{b^2+c^2-a^2}=\frac{6R^2+4Rr+r^2-p^2}{p^2-(2R+r)^2}\overset{Gerretsen}{\geq}\frac{6R^2+4Rr+r^2-4R^2-4Rr-3r^2}{4R^2+4Rr+3r^2-(2R+r)^2}=$$

$$=\frac{2R^2-2r^2}{2r^2}=\frac{R^2-r^2}{r^2}\overset{Euler}{\geq}\frac{3r^2}{r^2}=3=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema902.

If $x,y,z>0$, $xyz=1$ then

$$\sum\frac{x}{x^4+1}\leq\frac{3}{2}.$$

Rahim Shahbazov, Azerbaijan, RMM 9/2025

Soluție

Cu substtituția $(x,y,z)=\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\right)$ inegalitatea se scrie:

$\sum\frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{a^4}+1}\le\frac{3}{2}\Leftrightarrow\sum\frac{a^3}{a^4+1}\le\frac{3}{2}$, $a,b,c>0$, $abc=1$, care rezultă din:

$$LHS=\sum\frac{a^3}{a^4+1}\overset{(1)}{\le}\sum\frac{a^3}{\frac{2}{3}(2a^3+1)}\overset{(2)}{\le}\frac{3}{2}=RHS,$$

unde(1) $\Leftrightarrow a^4+1\ge\frac{2}{3}(2a^3+1)\Leftrightarrow 3a^4-4a^3+1\ge0\Leftrightarrow(a-1)^2(3a^2+2a+1)\ge0$,

iar (2) $\sum\frac{a^3}{\frac{2}{3}(2a^3+1)}\le\frac{3}{2}\Leftrightarrow\sum\frac{a^3}{2a^3+1}\le1\Leftrightarrow\sum\frac{1}{2+\frac{1}{a^3}}\le1\overset{\frac{1}{a^3}=t}{\Leftrightarrow}\sum\frac{1}{2+t}\le1\Leftrightarrow\sum\frac{t}{2+t}\ge1$,

vezi $\sum\frac{t}{2+t}\overset{CS}{\ge}\frac{\left(\sum\sqrt{t}\right)^2}{\sum(2+t)}=\frac{\sum t+2\sum\sqrt{tv}}{6+\sum t}\overset{(3)}{\ge}1$, unde $\frac{\sum t+2\sum\sqrt{tv}}{6+\sum t}\overset{(3)}{\ge}1\Leftrightarrow$
$\sum t+2\sum\sqrt{tv}\ge6+\sum t\Leftrightarrow\sum\sqrt{tv}\ge3$, care rezultă din:

$\sum\sqrt{tv}\overset{AG}{\ge}3\sqrt[3]{tvu}=3$, vezi: $tvu=\frac{1}{a^3}\frac{1}{b^3}\frac{1}{c^3}=\frac{1}{(abc)^3}=\frac{1}{1^3}=1$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1\Leftrightarrow x=y=z=1$.

Remarcă.

If $x,y,z>0$, $xyz=1$, and $1\le\lambda\le3$ then

1). $\sum\frac{x}{x^4+\lambda}\le\frac{3}{\lambda+1}$.

2). $\sum\frac{x}{x^4+3}\le\frac{3}{4}$.

3). $\sum\frac{x}{x^4+2}\le1$.

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema903.

If $a,b,c>0$, $a^2+b^2+c^2=3abc$ then

$$\sum\frac{a}{a+bc}\le\frac{3}{2}.$$

Konstantinos Geronikolas, Greece, Mathematical Inequalities9/2025

Soluție

$$LHS=\sum\frac{a}{a+bc}=\sum\left(1-\frac{bc}{a+bc}\right)=3-\sum\frac{1}{1+\frac{a}{bc}}\overset{CS}{\le}3-\frac{9}{\sum\left(1+\frac{a}{bc}\right)}=3-\frac{9}{3+\sum\frac{a}{bc}}\overset{ipoteza}{=}$$

$$\overset{ipoteza}{=}3-\frac{9}{3+3}=\frac{3}{2}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarcă.

If $a,b,c>0$, $a^2+b^2+c^2=3abc$ and $\lambda\ge 0$ then

$$\sum\frac{a}{a+\lambda bc}\le\frac{3}{\lambda+1}.$$

Marin Chirciu

Problema904.

If $x,y\in\mathbf{R}^*$ then

$$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-2\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+2\ge 0.$$

Crăciun Gheorghe, Mathematical Inequalities9/2025

Soluție

$$LHS=\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-2\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+2\overset{CS}{\ge}\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2-2\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+2=\frac{1}{2}t^2-2t+2\overset{(1)}{\ge}0=RHS,$$

unde $\frac{1}{2}t^2-2t+2\overset{(1)}{\ge}0\Leftrightarrow t^2-4t+4\ge 0\Leftrightarrow(t-2)^2\ge 0$, cu egal pentru $t=2\Leftrightarrow\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=y$.

Remarcă.

If $x, y, z > 0$ then

$$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}-2\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)+3\geq 0.$$

Marin Chirciu

Problema905.

If $m\geq 0$, $M\in Int(\Delta ABC)$, $F_a=Aria[MBC], F_b=Aria[MCA], F_c=Aria[MAB]$ then

$$\sum\frac{a^{2m+2}}{F_b^m}\geq 4^{m+1}\left(\sqrt{3}\right)^{m+1}F.$$

D.M.Bătinețu-Giurgiu, Dan Nănuți,RMM9/2025

Soluție

$$LHS=\sum\frac{a^{2m+2}}{F_b^m}=\sum\frac{\left(a^2\right)^{m+1}}{F_b^m}\overset{Radon}{\geq}\frac{\left(\sum a^2\right)^{m+1}}{\left(\sum F_b\right)^m}\overset{I-W}{\geq}\frac{\left(4F\sqrt{3}\right)^{m+1}}{F^m}=4^{m+1}\left(\sqrt{3}\right)^{m+1}F.$$

Remarcă.

If $m\geq 0$, $n\geq 1$, $M\in Int(\Delta ABC)$, $F_a=Aria[MBC], F_b=Aria[MCA], F_c=Aria[MAB]$ then

$$\sum\frac{a^{2m+2n}}{F_b^m}\geq\left(4\sqrt{3}\right)^{m+n}F^n.$$

Marin Chirciu

Soluție

$$LHS=\sum\frac{a^{2m+2n}}{F_b^m}=\sum\frac{\left(a^2\right)^{m+n}}{F_b^m}\overset{Yang}{\geq}\frac{\left(\sum a^2\right)^{m+n}}{\left(\sum F_b\right)^m}\overset{I-W}{\geq}\frac{\left(4F\sqrt{3}\right)^{m+n}}{F^m}=\left(4\sqrt{3}\right)^{m+n}F^n.$$

Am folosit mai sus inegalitatea Ionescu-Weitzenbock $\sum a^2\geq 4F\sqrt{3}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Inegalitatea lui Yang:(generalized Radon inequality).

If $a_k\geq 0, b_k>0, r\geq 0, s\geq 0, r\geq s+1$ then

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^r}{b_k^s}\geq\frac{\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^r}{\left(\sum_{k=1}^{n}b_k\right)^s}\text{, equality occurs }\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots\frac{a_n}{b_n}.$$

Problema906.

If $m\geq 0$, $M\in Int(\Delta ABC)$, d_a,d_b,d_c distances of point M to the sides BC,CA,AB then

$$\sum\left(\frac{h_a}{d_a}\right)^m\geq 3^{m+1}.$$

D.M.Bătinețu-Giurgiu, Daniel Sitaru,RMM 9/2025

Soluție

$$LHS=\sum\left(\frac{h_a}{d_a}\right)^m=\sum\left(\frac{ah_a}{ad_a}\right)^m=\sum\left(\frac{2F}{ad_a}\right)^m=(2F)^n\sum\left(\frac{1}{ad_a}\right)^m\overset{Holder}{\geq}$$

$$\overset{Holder}{\geq}(2F)^m\frac{\left(\sum\frac{1}{ad_a}\right)^m}{3^{m-1}}\overset{CS}{\geq}(2F)^m\frac{\left(\frac{9}{\sum ad_a}\right)^m}{3^{m-1}}=(2F)^m\frac{\left(\frac{9}{2F}\right)^m}{3^{m-1}}=(2F)^m\frac{3^{2m}}{3^{m-1}\cdot(2F)^m}=$$

$$=3^{m+1}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

1). If $n\in\mathbf{N}$, $M\in Int(\Delta ABC)$, d_a,d_b,d_c distances of point M to the sides BC,CA,AB then

$$\sum\left(\frac{m_a}{d_a}\right)^n\geq 3^{n+1}.$$

2).If $n\in\mathbf{N}$, $M\in Int(\Delta ABC)$, d_a,d_b,d_c distances of point M to the sides BC,CA,AB then

$$\sum\left(\frac{w_a}{d_a}\right)^n\geq 3^{n+1}.$$

3).If $n\in\mathbf{N}$, $M\in Int(\Delta ABC)$, d_a,d_b,d_c distances of point M to the sides BC,CA,AB then

$$\sum\left(\frac{s_a}{d_a}\right)^n\geq 3^{n+1}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema907.

If $m \ge 0$ then in ΔABC

$$\sum \frac{a^{m+2}}{h_a^m} \cot^{m+1} A \ge \frac{2^{m+2}}{3^m} F .$$

D.M.Bătinețu-Giurgiu, Daniel Sitaru, RMM 9/2025

Soluție

$$LHS = \sum \frac{a^{m+2}}{h_a^m} \cot^{m+1} A = \sum \frac{a^{2m+2}}{a^m h_a^m} \cot^{m+1} A = \sum \frac{\left(a^2 \cot A\right)^{m+1}}{\left(ah_a\right)^m} \overset{Radon}{\ge} \frac{\left(\sum a^2 \cot A\right)^{m+1}}{\left(\sum ah_a\right)^m} =$$

$$= \frac{\left(4F\right)^{m+1}}{\left(6F\right)^m} = \frac{2^{m+2}}{3^m} F = RHS .$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

If $m \ge 0$ then in acute ΔABC

$$\sum \frac{a^{m+2}}{h_a^m} \tan^{m+1} A \ge 3 \cdot 2^{m+2} F .$$

Marin Chirciu

Problema908.

If $m \ge 0$ then in ΔABC

$$\sum \frac{a^{2m+1}}{h_a} \cot^{m+1} A \ge \frac{2^{2m+1}}{3^m} F^m .$$

D.M.Bătinețu-Giurgiu, Daniel Sitaru, RMM 9/2025

Soluție

$$LHS = \sum \frac{a^{2m+1}}{h_a} \cot^{m+1} A = \sum \frac{a^{2m+2}}{ah_a} \cot^{m+1} A = \sum \frac{\left(a^2 \cot A\right)^{m+1}}{2F} = \frac{1}{2F} \sum \left(a^2 \cot A\right)^{m+1} \overset{Holder}{\ge}$$

$$\overset{Holder}{\ge} \frac{1}{2F} \frac{\left(\sum a^2 \cot A\right)^{m+1}}{3^m} = \frac{1}{2F} \frac{\left(4F\right)^{m+1}}{3^m} = \frac{2^{2m+1}}{3^m} F^m = RHS .$$

Am folosit mai susidentitatea în triunghi $\sum a^2 \cot A = 4F$.

Remarcă.

If $m \geq 0$ then in acute ΔABC

$$\sum \frac{a^{2m+1}}{h_a} \tan^{m+1} A \geq 12(4F)^m .$$

Marin Chirciu

Problema909.

If $M \in Int(\Delta ABC)$, g_a, g_b, g_c lengths of Gergonne's cevians, d_a, d_b, d_c distances of point M to the sides BC, CA, AB then

$$\sum \left(\frac{g_a}{d_a}\right)^2 \geq 27 .$$

D.M.Bătinețu-Giurgiu, Daniel Sitaru, RMM 9/2025

Soluție

$$LHS = \sum \left(\frac{g_a}{d_a}\right)^2 \overset{g_a \geq h_a}{\geq} \sum \left(\frac{h_a}{d_a}\right)^2 = \sum \left(\frac{ah_a}{ad_a}\right)^2 = \sum \left(\frac{2F}{ad_a}\right)^2 = 4F^2 \sum \left(\frac{1}{ad_a}\right)^2 \overset{CS}{\geq}$$

$$\overset{CS}{\geq} 4F^2 \frac{\left(\sum \frac{1}{ad_a}\right)^2}{3} \overset{CS}{\geq} 4F^2 \frac{\left(\frac{9}{\sum ad_a}\right)^2}{3} = 4F^2 \frac{\left(\frac{9}{2F}\right)^2}{3} = 4F^2 \frac{81}{3 \cdot 4F^2} = 27 = RHS .$$

Remarcă.

If $M \in Int(\Delta ABC)$, g_a, g_b, g_c lengths of Gergonne's cevians, d_a, d_b, d_c distances of point M to the sides BC, CA, AB and $n \in \mathbf{N}$ then

$$\sum \left(\frac{g_a}{d_a}\right)^n \geq 3^{n+1} .$$

Marin Chirciu

Problema1000.

Solve in real numbers the system:

$$\begin{cases} x^4 + 2y^2 + 9 = 8xy \\ y^4 + 2z^2 + 9 = 8yz \\ z^4 + 2x^2 + 9 = 8zx \end{cases} .$$

Oscar Reynaga Alarcon, Mathematics(College and High School)12/2024

Soluție

Adunând cele trei ecuații obținem:

$$\sum x^4+2\sum x^2+27=8\sum xy \Leftrightarrow \sum\left(x^2-3\right)^2+8\sum x^2=8\sum xy \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum\left(x^2-3\right)^2+4\sum\left(x-y\right)^2=0 \Leftrightarrow x^2=y^2=z^2=3 \Leftrightarrow x=y=z=\pm\sqrt{3}.$$

Mulțimea soluțiilor sistemului este $S=\left\{\left(\sqrt{3},\sqrt{3},\sqrt{3}\right),\left(-\sqrt{3},-\sqrt{3},-\sqrt{3}\right)\right\}$.

Remarca.

Let $\lambda\ge 0$ fixed. Solve in real numbers the system:

$$\begin{cases} x^4+(\lambda-4)y^2+4=\lambda xy \\ y^4+(\lambda-4)z^2+4=\lambda yz \\ z^4+(\lambda-4)x^2+4=\lambda zx \end{cases}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Mulțimea soluțiilor sistemului este $S=\left\{\left(\sqrt{2},\sqrt{2},\sqrt{2}\right),\left(-\sqrt{2},-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)\right\}$.

Problema1001.

5020. If $a,b,c>0$, $abc=1$ then

$$\sum\frac{\ln a}{1+a+ab}\le 0.$$

Mihaela Berindeanu, București,Crux Math,Feb 2025

Soluție

Avem: $\frac{\ln b}{1+b+bc}=\frac{a\ln b}{a+ab+abc}=\frac{a\ln b}{a+ab+1}$ și $\frac{\ln c}{1+c+ca}=\frac{ab\ln c}{ab+abc+a^2bc}=\frac{ab\ln c}{ab+1+a}$.

Obținem:

$$LHS=\sum\frac{\ln a}{1+a+ab}=\frac{\ln a+a\ln b+ab\ln c}{1+a+ab}\overset{Jensen}{\le}\ln\frac{a+ab+abc}{1+a+ab}=\ln\frac{a+ab+1}{1+a+ab}=\ln 1=0=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Problema1002.

If $a,b,c\in\mathbf{N}$, $2^a+2^b+2^c=148$ then find $a+b+c$.

Qulam Rza Zeynalli, Math 9/2025

Soluție

$$2^a+2^b+2^c=148\Leftrightarrow 2^a\left(1+2^{b-a}+2^{c-a}\right)=2^2\cdot 37\Leftrightarrow\begin{cases}2^a=2^2\\1+2^{b-a}+2^{c-a}=37\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\2^{b-2}+2^{c-2}=36\end{cases}.$$

$$2^{b-2}+2^{c-2}=36\Leftrightarrow 2^{b-2}\left(1+2^{c-b}\right)=2^2\cdot 9\Leftrightarrow\begin{cases}2^{b-2}=2^2\\1+2^{c-b}=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=4\\2^{c-4}=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=4\\c-4=3\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}b=4\\c=7\end{cases}.$$

Obținem $(a,b,c)=(2,4,7)\Rightarrow a+b+c=2+4+7=13$.

Remarcă.

If $a,b,c\in\mathbf{N}$, $3^a+3^b+3^c=279$ then find $a+b+c$.

Marin Chirciu

Soluție

Obținem $(a,b,c)=(2,3,5)\Rightarrow a+b+c=2+3+5=10$.

Problema1002.

If $a,b,c,d>0$, $abcd=1$ then

$$\sum\frac{1}{(1+a)^2}\ge 1.$$

China Mathematical Olympiad 2005

Soluție

Lema.

If $a,b\ge 0$ then

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+a)^2}\ge\frac{1}{1+ab}.$$

Demonstrație

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+a)^2}\ge\frac{1}{1+ab}\Leftrightarrow ab(a-b)^2+(ab-1)^2\ge 0$$,cu egal pentru $a=b=1$.

$$LHS=\sum\frac{1}{(1+a)^2}\overset{Lema}{\ge}\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+cd}\overset{(1)}{\ge}1=RHS,$$

unde $\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+cd}\overset{(1)}{\ge}1\Leftrightarrow 2+ab+cd\ge(1+ab)(1+cd)\Leftrightarrow 1\ge abcd$, vezi $abcd=1$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=d=1$.

Problema1003.

If $a,b,c>0$ then

$$\sum\frac{b+c}{a}\ge 4\frac{\sum a^2}{\sum ab}+2\frac{\sum ab}{\sum a^2}.$$

Hoang Le Nhat Thung, Vietnam

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{b+c}{a}=\sum\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)=\sum\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2-2\right)=\sum\left(\frac{(a+b)^2}{ab}-2\right)\overset{CS}{\ge}\frac{\left(\sum(a+b)\right)^2}{\sum ab}-6=$$

$$=\frac{4\left(\sum a\right)^2}{\sum ab}-6=\frac{4\left(\sum a^2+2\sum ab\right)}{\sum ab}-6=4\frac{\sum a^2}{\sum ab}+2\overset{(1)}{\ge}4\frac{\sum a^2}{\sum ab}+2\frac{\sum ab}{\sum a^2}=RHS,$$

unde $4\frac{\sum a^2}{\sum ab}+2\overset{(1)}{\ge}4\frac{\sum a^2}{\sum ab}+2\frac{\sum ab}{\sum a^2}\Leftrightarrow\sum a^2\ge\sum ab$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

Remarca.

If $a,b,c>0$ and $\lambda\le 4$ then

$$\sum\frac{b+c}{a}\ge\lambda\frac{\sum a^2}{\sum ab}+(6-\lambda)\frac{\sum ab}{\sum a^2}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{b+c}{a}=\sum\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)=\sum\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2-2\right)=\sum\left(\frac{(a+b)^2}{ab}-2\right)\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum(a+b)\right)^2}{\sum ab}-6=$$

$$=\frac{4\left(\sum a\right)^2}{\sum ab}-6=\frac{4\left(\sum a^2+2\sum ab\right)}{\sum ab}-6=4\frac{\sum a^2}{\sum ab}+2\overset{(1)}{\geq}\lambda\frac{\sum a^2}{\sum ab}+(6-\lambda)\frac{\sum ab}{\sum a^2}=RHS,$$

unde $4\frac{\sum a^2}{\sum ab}+2\overset{(1)}{\geq}\lambda\frac{\sum a^2}{\sum ab}+(6-\lambda)\frac{\sum ab}{\sum a^2}\overset{\frac{\sum a^2}{\sum ab}=t\geq 1}{\Leftrightarrow}4t+2\geq\lambda t+\frac{6-\lambda}{t}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(4-\lambda)t^2+2t+\lambda-6\geq 0\Leftrightarrow(t-1)\left[(4-\lambda)t+6-\lambda\right]\geq 0$, care rezultă din $t\geq 1$, vezi

$\sum a^2\geq\sum ab$ și $\lambda\leq 4$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

Problema1004.

Solve for reals

$$\begin{cases}a+b+c+d=20\\ ab+ac+ad+bc+bd+cd=150\end{cases}.$$

Sanong Huayrerai, Math 9/2025

Soluție

$$\begin{cases}a+b+c+d=20\\ ab+ac+ad+bc+bd+cd=150\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a+b+c+d)^2=400\\ 2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)=300\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sum a^2+2\sum ab=400\\ 2\sum ab=300\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sum a^2=100\\ \sum ab=150\end{cases}.$$

Calculăm $\sum(a-5)^2=\sum a^2-10\sum a+100=100-10\cdot 20+100=0$.

Din $\sum(a-5)^2=0\Leftrightarrow a=b=c=d$ și $\sum a=20\Leftrightarrow(a,b,c,d)=(1,1,1,1)$.

Remarcă.

Let be $\lambda\geq 0$ fixed. Solve for reals

$$\begin{cases}a+b+c+d=4\lambda\\ ab+ac+ad+bc+bd+cd=6\lambda^2\end{cases}.$$

Marin Chirciu

Soluție

$$\begin{cases} a+b+c+d=4\lambda \\ ab+ac+ad+bc+bd+cd=6\lambda^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b+c+d)^2=16\lambda^2 \\ 2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)=12\lambda^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sum a^2+2\sum ab=16\lambda^2 \\ 2\sum ab=12\lambda^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum a^2=4\lambda^2 \\ \sum ab=6\lambda^2 \end{cases}.$$

Calculăm $\sum(a-\lambda)^2=\sum a^2-2\lambda\sum a+4\lambda^2=4\lambda^2-2\lambda\cdot 4\lambda+4\lambda^2=0$.

Din $\sum(a-\lambda)^2=0 \Leftrightarrow a=b=c=d$ și $\sum a=4\lambda \Leftrightarrow (a,b,c,d)=(\lambda,\lambda,\lambda,\lambda)$.

Problema1005.

Solve for reals

$$\left(x^2+7x-4\right)^2=4\left(x^2+4\right)(7x-8).$$

Bahadur Heydarov, Math 9/2025

Soluție

$$\left(x^2+7x-4\right)^2=4\left(x^2+4\right)(7x-8) \Leftrightarrow \left(x^2+4+7x-8\right)^2=4\left(x^2+4\right)(7x-8) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^2=4ab \Leftrightarrow (a-b)^2=0 \Leftrightarrow a=b \Leftrightarrow x^2+4=7x-8 \Leftrightarrow x^2-7x+12=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in\{3,4\}.$$

Remarcă.

1). Let be $\lambda,a,b>0$ fixed. Solve for reals

$$\left(x^2+bx+a-c\right)^2=4\left(x^2+a\right)(bx-c).$$

Soluție

$$\left(x^2+bx+a-c\right)^2=4\left(x^2+a\right)(bx-c) \Leftrightarrow \left(x^2+a+bx-c\right)^2=4\left(x^2+a\right)(bx-c) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (u+v)^2=4uv \Leftrightarrow (u-v)^2=0 \Leftrightarrow u=v \Leftrightarrow x^2+a=bx-c \Leftrightarrow x^2-bx+a-c=0 \Leftrightarrow$$
$$x\in\{x_1,x_2\}.$$

2).Let be $\lambda,a,b>0$ fixed. Solve for reals

$$\left(x^2+bx+\lambda\right)^2=4\left(x^2+a\right)\left(bx-a+\lambda\right).$$

Soluție

$$\left(x^2+bx+\lambda\right)^2=4\left(x^2+a\right)\left(bx-a+\lambda\right)\Leftrightarrow\left(x^2+a+bx+\lambda-a\right)^2=4\left(x^2+a\right)\left(bx+\lambda-a\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(u+v)^2=4uv\Leftrightarrow(u-v)^2=0\Leftrightarrow u=v\Leftrightarrow x^2+a=bx+\lambda-a\Leftrightarrow x^2-bx+2a-\lambda=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in\left\{x_1,x_2\right\}.$$

3). Let be $\lambda,a,b\in\mathbf{R}$ fixed. Solve for reals

$$\left(x^2+(a+b)x+\lambda\right)^2=4\left(x^2+\frac{\lambda+ab}{2}\right)\left((a+b)x+\frac{\lambda-ab}{2}\right).$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție

$$\left(x^2+(a+b)x+\lambda\right)^2=4\left(x^2+\frac{\lambda+ab}{2}\right)\left((a+b)x+\frac{\lambda-ab}{2}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2+(a+b)x+\lambda\right)^2=4\left(x^2+\frac{\lambda+ab}{2}\right)\left((a+b)x+\frac{\lambda-ab}{2}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(u+v)^2=4uv\Leftrightarrow(u-v)^2=0\Leftrightarrow u=v\Leftrightarrow x^2+\frac{\lambda+ab}{2}=(a+b)x+\frac{\lambda-ab}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-(a+b)x+ab=0\Leftrightarrow x\in\{a,b\}.$$

Problema1006.

5068. In ΔABC

$$\frac{4R}{r}\geq\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}\right)\left(\sqrt{r_a}+\sqrt{r_a}\right)^2.$$

Nguyen Viet Hung, Vietnam, Crux Math, Sep2025

Soluție

Folosind $\prod\left(r_a+r_b\right)=4Rp^2$ și $r_ar_br_c=rp^2$ obținem $\dfrac{\prod\left(r_a+r_b\right)}{r_ar_br_c}=\dfrac{4R}{r}$.

$$LHS=\frac{4R}{r}=\frac{\prod\left(r_a+r_b\right)}{r_ar_br_c}=\prod\left(1+\frac{r_b}{r_a}\right)=\left(1+\frac{r_b}{r_a}\right)\left(1+\frac{r_c}{r_b}\right)\left(1+\frac{r_a}{r_c}\right)\overset{CBS}{\geq}\left(1+\frac{r_b}{r_a}\right)\left(1+\sqrt{\frac{r_c}{r_b}\cdot\frac{r_a}{r_c}}\right)^2=$$

$$=\left(1+\frac{r_b}{r_a}\right)\left(1+\sqrt{\frac{r_a}{r_b}}\right)^2=\left(1+\frac{r_b}{r_a}\right)\frac{\left(\sqrt{r_a}+\sqrt{r_b}\right)^2}{r_b}=\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}\right)\left(\sqrt{r_a}+\sqrt{r_b}\right)^2=RHS,$$

cu egal pentru $\frac{r_c}{r_b}=\frac{r_a}{r_c}\Leftrightarrow r_c^2=r_ar_b\Leftrightarrow(p-c)^2=(p-a)(p-b)\Leftrightarrow c=\frac{a^2+b^2}{a+b}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $c=\frac{a^2+b^2}{a+b}$.

Remarcă.

In ΔABC

$$\sum\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}\right)\left(\sqrt{r_a}+\sqrt{r_a}\right)^2\le\frac{12R}{r}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Lema.

In ΔABC

$$\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}\right)\left(\sqrt{r_a}+\sqrt{r_a}\right)^2\le\frac{4R}{r}.$$

$LHS=\sum\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}\right)\left(\sqrt{r_a}+\sqrt{r_a}\right)^2\overset{Lema}{\le}\sum\frac{4R}{r}=\frac{12R}{r}=RHS$, cu egal dacă și numai dacă

$c=\frac{a^2+b^2}{a+b}$ și analoagele $\Leftrightarrow a=b=c$.

Problema1007.

Solve for reals

$$\left(\frac{2x^2+3x-5}{x+1}\right)^2+\left(\frac{2x^2+5x-3}{x+1}\right)^2=4.$$

Bahadur Heydarov, Math 9/2025

Soluție

$$\left(\frac{2x^2+3x-5}{x+1}\right)^2+\left(\frac{2x^2+5x-3}{x+1}\right)^2=4\Leftrightarrow\left(\frac{2x^2+3x-5}{x+1}+2-2\right)^2+\left(\frac{2x^2+5x-3}{x+1}\right)^2=4\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{2x^2+5x-3}{x+1}-2\right)^2+\left(\frac{2x^2+5x-3}{x+1}\right)^2=4\Leftrightarrow(t-2)^2+t^2=4\Leftrightarrow 2t^2-4t=0\Leftrightarrow t\in\{0,2\}.$$

Cazul1). Dacă $t=0\Leftrightarrow\frac{2x^2+5x-3}{x+1}=0\Leftrightarrow 2x^2+5x-3=0\Leftrightarrow x\in\left\{-3,\frac{1}{2}\right\}$.

Cazul2). Dacă $t=2\Leftrightarrow\frac{2x^2+5x-3}{x+1}=2\Leftrightarrow 2x^2+3x-5=0\Leftrightarrow x\in\left\{\frac{-5}{2},1\right\}$.

Mulțimea soluțiilor ecuației este este $S=\left\{-3,\frac{-5}{2},\frac{1}{2},1\right\}$.

Remarcă.

Let be $\lambda,a,b>0$ fixed. Solve for reals

$$\left(\frac{\lambda x^2+ax-b}{x+1}\right)^2+\left(\frac{\lambda x^2+(a+2)x-b+2}{x+1}\right)^2=4.$$

Marin Chirciu

Soluție

$$\left(\frac{\lambda x^2+ax-b}{x+1}\right)^2+\left(\frac{\lambda x^2+(a+2)x-b+2}{x+1}\right)^2=4\Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{\lambda x^2+ax-b}{x+1}+2-2\right)^2+\left(\frac{\lambda x^2+(a+2)x-b+2}{x+1}\right)^2=4\Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{\lambda x^2+(a+2)x-b+2}{x+1}-2\right)^2+\left(\frac{\lambda x^2+(a+2)x-b+2}{x+1}\right)^2=4$$

$$\Leftrightarrow(t-2)^2+t^2=4\Leftrightarrow(t-2)^2+t^2=4\Leftrightarrow 2t^2-4t=0\Leftrightarrow t\in\{0,2\}.$$

Cazul1). Dacă $t=0\Leftrightarrow\frac{\lambda x^2+(a+2)x-b+2}{x+1}=0\Leftrightarrow\lambda x^2+(a+2)x-b+2\Leftrightarrow x\in\{x_1,x_2\}$.

Cazul2). Dacă $t=2\Leftrightarrow\frac{\lambda x^2+(a+2)x-b+2}{x+1}=2\Leftrightarrow\lambda x^2+ax-b=0\Leftrightarrow x\in\{x_3,x_4\}$.

Mulțimea soluțiilor ecuației este este $S=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$.

Problema1008.

5017. If $x,y,z\geq 0$, $x+y+z=1$ then

$$(1-x)(1-y)(1-z)\ge\frac{8}{9}\sqrt{3xyz}\ .$$

Michel Bataille, France, Crux Math, Feb2025

Soluție

Folosim pqr -Method. Notăm $p=\sum x=1, q=\sum xy, r=xyz$.

$$LHS=(1-x)(1-y)(1-z)=1-\sum x+\sum xy-xyz=1-1+q-r=q-r\overset{(1)}{\ge}\frac{8}{9}\sqrt{3r}=RHS\ ,$$

unde $q-r\overset{(1)}{\ge}\frac{8}{9}\sqrt{3r}\Leftrightarrow q\ge r+\frac{8}{9}\sqrt{3r}$, care rezultă din $q\ge\sqrt{3r}$, vezi

$q^2=(xy+yz+zx)^2\ge 3xyz(x+y+z)=3xyz=3r$.

Rămâne să arătăm că:

$\sqrt{3r}\ge r+\frac{8}{9}\sqrt{3r}\Leftrightarrow 9\sqrt{3r}\ge 9r+8\sqrt{3r}\Leftrightarrow\sqrt{3r}\ge 9r\Leftrightarrow 3r\ge 81r^2\Leftrightarrow r\le\frac{1}{27}$, vezi

$1=x+y+z\overset{AG}{\ge}3\sqrt[3]{xyz}=3\sqrt[3]{r}\Rightarrow r\le\frac{1}{27}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=\frac{1}{3}$ sau $(x,y,z)=(1,0,0)$ și permutările sale.

Remarcă.

1). If $x,y,z\ge 0$, $x+y+z=1$ and $0\le\lambda\le 1$ then

$$(\lambda-x)(\lambda-y)(\lambda-z)\ge\frac{(3\lambda-1)^3}{9}\sqrt{3xyz}\ .$$

Soluție

2). In ΔABC holds:

$$\prod\left(1-\frac{r}{r_a}\right)\ge\frac{16r}{27R}.$$

Soluție

Lema.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=1$ then

$$(1-x)(1-y)(1-z) \geq \frac{8}{9}\sqrt{3xyz}\,.$$

Soluție

Folosind **Lema** pentru $(x,y,z)=\left(\frac{r}{r_a},\frac{r}{r_b},\frac{r}{r_c}\right)$ obținem: $\prod\left(1-\frac{r}{r_a}\right) \geq \frac{16r}{27R}$

3). In ΔABC holds:

$$\prod\left(1-\frac{r}{h_a}\right) \geq \frac{16r}{27R}\,.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție

Lema.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=1$ then

$$(1-x)(1-y)(1-z) \geq \frac{8}{9}\sqrt{3xyz}\,.$$

Folosind **Lema** pentru $(x,y,z)=\left(\frac{r}{h_a},\frac{r}{h_b},\frac{r}{h_c}\right)$ obținem: $\prod\left(1-\frac{r}{h_a}\right) \geq \frac{16r}{27R}$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema1009.

J711. If $x \in \mathbf{R}$ then

$$\left|\frac{x}{x^2+1}+\frac{6x}{x^2+36}\right| \leq \frac{7}{10}\,.$$

An Zhenping, China, Mathematical Reflections, Nr.5/2025

Solution .

We have $\left|\frac{x}{x^2+1}+\frac{6x}{x^2+36}\right| \leq \frac{7}{10} \Leftrightarrow \frac{-7}{10} \leq \frac{x}{x^2+1}+\frac{6x}{x^2+36} \leq \frac{7}{10}$.

The inequality on the right:

$$\frac{x}{x^2+1}+\frac{6x}{x^2+36} \leq \frac{7}{10} \Leftrightarrow x^4-10x^3+37x^2-60x+36 \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)^2(x-3)^2 \geq 0\,.$$

Equality occurs if and only if $x=2$ or $x=3$.

The inequality on the left:

$$\frac{-7}{10} \le \frac{x}{x^2+1} + \frac{6x}{x^2+36} \Leftrightarrow x^4 + 10x^3 + 37x^2 + 60x + 36 \ge 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 (x+3)^2 \ge 0.$$

Equality occurs if and only if $x = -2$ or $x = -3$.

Problema1010.

If $a, b, c, x, y, z > 0$ then

$$\sum a^3 + \sum \frac{a}{(bx+cy)^2} \ge \frac{2}{x+y}(a+b+c).$$

D.M.Bătinețu-Giurgiu, Dan Nănuți, RMM 9/2025

Soluție

$$LHS = \sum \left(a^3 + \frac{a}{(bx+cy)^2} \right) \overset{AG}{\ge} \sum 2\sqrt{a^3 \cdot \frac{a}{(bx+cy)^2}} = 2\sum \frac{a^2}{bx+cy} \overset{CS}{\ge} 2\frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum (bx+cy)} =$$

$$= 2\frac{\left(\sum a\right)^2}{(x+y)\sum a} = \frac{2}{x+y}(a+b+c) = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c$.

Remarcă.

If $a, b, c, x, y, z > 0$, $a+b+c = 3$ and $n \in \mathbf{N}$ then

$$\sum a^{2n+1} + \sum \frac{a}{(bx+cy)^2} \ge \frac{6}{x+y}.$$

Marin Chirciu

Soluție

$$LHS = \sum \left(a^{2n+1} + \frac{a}{(bx+cy)^2} \right) \overset{AG}{\ge} \sum 2\sqrt{a^{2n+1} \cdot \frac{a}{(bx+cy)^2}} = 2\sum \frac{a^{n+1}}{bx+cy} \overset{Holder}{\ge} 2\frac{\left(\sum a\right)^{n+1}}{3^{n-1}\sum (bx+cy)} =$$

$$= 2\frac{\left(\sum a\right)^{n+1}}{3^{n-1}(x+y)\sum a} = \frac{2}{3^{n-1}(x+y)}\left(\sum a\right)^n = \frac{2}{3^{n-1}(x+y)}3^n = \frac{6}{x+y} = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c$.

Problema1011.

If $x, y, z > 0$, in ΔABC holds:

$$\sum \frac{x}{(y+z)h_a^2} \geq \frac{\sqrt{3}}{F}.$$

D.M.Bătinețu-Giurgiu, Claudia Nănuți, RMM 9/2025

Soluție

$$LHS = \sum \frac{x}{(y+z)h_a^2} = \sum \frac{x}{(y+z)\left(\frac{2F}{a}\right)^2} = \frac{1}{4F^2}\sum \frac{x}{y+z}a^2 \overset{T\sin tsifas}{\geq} \frac{1}{4F^2}\cdot 2\sqrt{3}F = \frac{\sqrt{3}}{F} = RHS.$$

Am folosit mai sus: Inegalitatea lui Tsitsifas: $\sum \frac{x}{y+z}a^2 \geq 2\sqrt{3}F$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral și $x = y = z$.

Remarcă.

If $x, y, z > 0$, in ΔABC holds:

$$\sum \frac{x}{(y+z)h_a^4} \geq \frac{1}{2F^2}.$$

Marin Chirciu

Soluție

$$LHS = \sum \frac{x}{(y+z)h_a^4} = \sum \frac{x}{(y+z)\left(\frac{2F}{a}\right)^4} = \frac{1}{16F^4}\sum \frac{x}{y+z}a^4 \overset{T\sin tsifas}{\geq} \frac{1}{16F^4}\cdot 8F^2 = \frac{1}{2F^2} = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral și $x = y = z$.

Detaliu.

In ΔABC

$$\frac{x}{y+z}a^4 + \frac{y}{z+x}b^4 + \frac{z}{x+y}c^4 \geq 8F^2, \text{ unde } x, y, z > 0.$$

Crux Mathematicorum, 11/1986, George Tsintsifas, Grecia

Soluție.

Avem $\sum \frac{x}{y+z}a^4 = \sum\left(\frac{x}{y+z}+1-1\right)a^4 = \sum \frac{x+y+z}{y+z}a^4 - \sum a^4 \overset{Bergstrom}{\geq}$

$$\geq (x+y+z)\frac{\left(\sum a^2\right)^2}{\sum (y+z)} - \sum a^4 = (x+y+z)\frac{\left(\sum a^2\right)^2}{2(x+y+z)} - \sum a^4 == \frac{1}{2}\left(\sum a^2\right)^2 - \sum a^4 =$$

$$= \frac{2\sum b^2c^2 - \sum a^4}{2} = \frac{2\left[p^4 + p^2\left(2r^2 - 8Rr\right) + r^2(4R+r)^2\right] - 2\left[p^4 - p^2\left(8Rr + 6r^2\right) + r^2(4R+r)^2\right]}{2} =$$

$$= 8r^2p^2 = 8F^2.$$

Problema1012.

Solve for reals

$$(x-2y)^2 + 20 = 12x(1-x) + 6y(4-y).$$

Conexiuni-Brăila-Mai -1995, L:25

Soluție

$$(x-2y)^2 + 20 = 12x(1-x) + 6y(4-y) \Leftrightarrow 13x^2 + 10y^2 + 20 = 12x + 24y + 4xy \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 14x^2 + 14y^2 + 56 = x^2 + 4y^2 + 36 + 12x + 24y + 4xy \Leftrightarrow 14\left(x^2 + y^2 + 4\right) = (x+2y+6)^2.$$

Avem $(1+4+9)\left(x^2+y^2+4\right) \overset{CBS}{\geq} (x+2y+6)^2$, cu egal pentru $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow (x,y) = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

Remarcă.

Let be $\lambda > 0$ fixed. Solve for reals

$$(x-2y)^2 + 20\lambda^2 = 12x(\lambda - x) + 6y(4\lambda - y).$$

Marin Chirciu

Soluție

$$(x-2y)^2 + 20\lambda^2 = 12x(\lambda - x) + 6y(4\lambda - y) \Leftrightarrow 13x^2 + 10y^2 + 20\lambda^2 = 12\lambda x + 24\lambda y + 4xy \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 14x^2 + 14y^2 + 56\lambda^2 = x^2 + 4y^2 + 36\lambda^2 + 6\lambda x + 12\lambda y + 4xy \Leftrightarrow$$

$$14\left(x^2 + y^2 + 4\lambda^2\right) = (x + 2y + 6\lambda)^2.$$

Avem $(1+4+9)\left(x^2+y^2+4\lambda^2\right) \overset{CBS}{\geq} (x+2y+6\lambda)^2$, cu egal pentru $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{2\lambda}{3} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x,y) = \left(\frac{2\lambda}{3}, \frac{4\lambda}{3}\right).$$

Problema1014.

S710. If $a,b,c\ge 0$, $\sum a=\sum ab>0$ then

$$\sum a^2+5abc\ge 8.$$

Marius Stănean, Zalău, Mathematical Reflections Nr.5/2025

Solution.

Using pqr -Method : $p=\sum a, q=\sum ab, r=abc$ we have prove $p=q>0\Rightarrow p^2-2q+5r\ge 8$,

$p=q\Rightarrow p^2-2p+5r\ge 8$.

Get $p^2\ge 3q$, $p=q\Rightarrow p^2\ge 3p\Rightarrow p\ge 3$.

We distinguish the cases:

Case 1). If $p^2>4q$, $p=q\Rightarrow p^2>4p\Rightarrow p>4\Rightarrow$

$$LHS=p^2-2p+5r=p(p-2)+5r\overset{p>4}{>}4(4-2)+5r=8+5r\ge 8=RHS.$$

Case 2). If $p^2\le 4q$, $p=q\Rightarrow p^2\le 4p\Rightarrow p\le 4\Rightarrow 3\le p\le 4$.

Using $p^3-4pq+9r\ge 0$, $p=q\Rightarrow p^3-4p^2+9r\ge 0\Rightarrow r\ge \dfrac{4p^2-p^3}{9}$.

$$LHS=p^2-2p+5r\overset{Schur}{\ge}p^2-2p+5\cdot\frac{4p^2-p^3}{9}\overset{(1)}{\ge}8=RHS,$$

where $p^2-2p+5\cdot\dfrac{4p^2-p^3}{9}\overset{(1)}{\ge}8\Leftrightarrow 5p^3-29p^2+18p+72\le 0\Leftrightarrow (p-3)(p-4)(5p+6)\le 0$,

resulting from $3\le p\le 4$.

Equality occurs if and only if $p=3$ or $p=4$ that is $(a,b,c)=(2,2,0)$ and permutations, or $a=b=c=1$.

Problema1015.

If $x,y,z>0$ then

$$\frac{4\sum x^2}{27\sum xy}+\sum\frac{x}{7x+y+z}\ge\frac{13}{27}.$$

Neculai Stanciu, Titu Zvonaru, RMM 9/2025

Soluție

$$LHS=\frac{4\sum x^2}{27\sum xy}+\sum\frac{x}{7x+y+z}=\frac{4\sum x^2}{27\sum xy}+\sum\frac{x^2}{7x^2+xy+xz}\overset{CS}{\geq}\frac{4\sum x^2}{27\sum xy}+\frac{\left(\sum x\right)^2}{\sum\left(7x^2+xy+xz\right)}=$$

$$=\frac{4\sum x^2}{27\sum xy}+\frac{\left(\sum x\right)^2}{7\sum x^2+2\sum xy}=\frac{4\sum x^2}{27\sum xy}+\frac{\sum x^2+2\sum xy}{7\sum x^2+2\sum xy}\overset{\sum x^2=t,\sum xy=q}{=}\frac{4t}{27q}+\frac{t+2q}{7t+2q}\overset{(1)}{\geq}$$

$$\overset{(1)}{\geq}\frac{13}{27}=RHS,$$

unde $\frac{4t}{27q}+\frac{t+2q}{7t+2q}\overset{(1)}{\geq}\frac{13}{27}\Leftrightarrow 28t^2-56tq+28q^2\geq 0\Leftrightarrow 28\left(t-q\right)^2\geq 0$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z$.

Remarcă.

If $x,y,z>0$ and $\lambda\geq 1$ then

$$\frac{2(\lambda-1)}{(\lambda+2)^2}\cdot\frac{\sum x^2}{\sum xy}+\sum\frac{x}{\lambda x+y+z}\geq\frac{5\lambda+4}{(\lambda+2)^2}.$$

Marin Chirciu

Soluție

$$LHS=\frac{2(\lambda-1)}{(\lambda+2)^2}\cdot\frac{\sum x^2}{\sum xy}+\sum\frac{x}{\lambda x+y+z}=\frac{2(\lambda-1)}{(\lambda+2)^2}\frac{\sum x^2}{\sum xy}+\sum\frac{x^2}{\lambda x^2+xy+xz}\overset{CS}{\geq}$$

$$\overset{CS}{\geq}\frac{2(\lambda-1)}{(\lambda+2)^2}\frac{\sum x^2}{\sum xy}+\frac{\left(\sum x\right)^2}{\sum\left(\lambda x^2+xy+xz\right)}=\frac{2(\lambda-1)}{(\lambda+2)^2}\frac{\sum x^2}{\sum xy}+\frac{\left(\sum x\right)^2}{\lambda\sum x^2+2\sum xy}=$$

$$=\frac{2(\lambda-1)}{(\lambda+2)^2}\frac{\sum x^2}{\sum xy}+\frac{\sum x^2+2\sum xy}{\lambda\sum x^2+2\sum xy}\overset{\sum x^2=t,\sum xy=q}{=}\frac{2(\lambda-1)}{(\lambda+2)^2}\frac{t}{q}+\frac{t+2q}{\lambda t+2q}\overset{(1)}{\geq}\frac{5\lambda+4}{(\lambda+2)^2}=RHS,$$

unde $\frac{2(\lambda-1)}{(\lambda+2)^2}\frac{t}{q}+\frac{t+2q}{\lambda t+2q}\overset{(1)}{\geq}\frac{5\lambda+4}{(\lambda+2)^2}\Leftrightarrow 2\lambda(\lambda-1)t^2-4\lambda(\lambda-1)tq+2\lambda(\lambda-1)q^2\geq 0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2\lambda(\lambda-1)(t-q)^2\geq 0.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z$.

Problema1016

Solve for reals

$$\frac{36}{\sqrt{x}}+\frac{9}{\sqrt{y}}=42-9\sqrt{x}-\sqrt{y}.$$

Sanong Huayrerai, Math 9/2025

Soluție

$$\frac{36}{\sqrt{x}}+\frac{9}{\sqrt{y}}=42-9\sqrt{x}-\sqrt{y}\Leftrightarrow\left(\frac{36}{\sqrt{x}}+9\sqrt{x}\right)+\left(\frac{9}{\sqrt{y}}+\sqrt{y}\right)=42.$$

$$LHS=\left(\frac{36}{\sqrt{x}}+9\sqrt{x}\right)+\left(\frac{9}{\sqrt{y}}+\sqrt{y}\right)\overset{AG}{\geq}2\sqrt{\frac{36}{\sqrt{x}}\cdot 9\sqrt{x}}+2\sqrt{\frac{9}{\sqrt{y}}\cdot\sqrt{y}}=2\cdot 18+2\cdot 3=42=RHS,$$

cu egal pentru $\frac{36}{\sqrt{x}}=9\sqrt{x}$ și $\frac{9}{\sqrt{y}}=\sqrt{y}\Leftrightarrow x=4$ și $y=9$.

Remarcă.

1). Let be $\lambda,n,a,b>0$ fixed. Solve for reals

$$\frac{\lambda}{\sqrt{x}}+\frac{n}{\sqrt{y}}=2\left(\sqrt{\lambda a}+\sqrt{nb}\right)-a\sqrt{x}-b\sqrt{y}.$$

Soluție

Deducem că $(x,y)=\left(\frac{\lambda}{a},\frac{n}{b}\right)$ este soluția unică a ecuației.

2). Solve for reals

$$\frac{(\lambda+1)^2}{\sqrt{x}}+\frac{n^2}{\sqrt{y}}=2n(\lambda+2)-n^2\sqrt{x}-\sqrt{y}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție

Cazul $(\lambda,n,a,b)=\left((\lambda+1)^2,n^2,n^2,1\right)$ în problema de mai sus..

Deducem că $(x,y)=\left(\frac{(\lambda+1)^2}{n^2},n^2\right)$ este soluția unică a ecuației.

Problema1017.

Solve for reals

$$\left(\sqrt[3]{x+6}+\sqrt[3]{3-x}\right)\left(2+3\sqrt[3]{(x+6)(3-x)}\right)=24.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam, RMM 9/2025

Soluție

Notăm $\begin{cases} a=\sqrt[3]{x+6} \\ b=\sqrt[3]{3-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^3+b^3=9 \\ (a+b)(2+3ab)=24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^3-3ab(a+b)=9 \\ (a+b)(2+3ab)=24 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^3-3ab(a+b)=9 \\ 3ab=\dfrac{2(12-a-b)}{a+b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^3-\dfrac{2(12-a-b)}{a+b}(a+b)=9 \\ 3ab=\dfrac{2(12-a-b)}{a+b} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^3+2(a+b)-33=0 \\ 3ab=\dfrac{2(12-a-b)}{a+b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ 3ab=\dfrac{2(12-a-b)}{a+b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ ab=2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a,b)\in\{(1,2),(2,1)\} \Leftrightarrow x\in\{-5,2\}.$$

Remarcă.

1). Let be $\lambda\ge 0$, $n\ge 0$, $k\ge 0$, $u\ge 0, v\ge 0$, $\lambda+n=u^3+v^3$ fixed. Solve for reals

$$\left(\sqrt[3]{x+\lambda}+\sqrt[3]{n-x}\right)\left(k+3\sqrt[3]{(x+\lambda)(n-x)}\right)=(u+v)(k+3uv).$$

Soluție

Mulțimea soluțiilor ecuației este $S=\{u^3-\lambda, v^3-\lambda\}$.

2). Let be $\lambda\ge 0$, $n\ge 0$, $k\ge 0$, $\lambda+n=9$ fixed. Solve for reals

$$\left(\sqrt[3]{x+\lambda}+\sqrt[3]{n-x}\right)\left(k+3\sqrt[3]{(x+\lambda)(n-x)}\right)=3(k+6).$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție

Luăm $u=2, v=1$ în problema de mai sus. Mulțimea soluțiilor ecuației este $S=\{8-\lambda, 1-\lambda\}$.

Problema1018.

Solve for reals

$$(x+19)^{\frac{1}{3}}-2^{\frac{1}{3}}=(x-19)^{\frac{1}{3}}.$$

Sanong Huayrerai, Math 9/2025

Soluție

Notăm $\begin{cases} a=x+19 \\ b=x-19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{3}} \\ a-b=38 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{3}} \\ \left(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)=38 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{3}} \\ 2^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)=38 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{3}} \\ 2^{\frac{1}{3}}\left(\left(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}\right)^2+3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}\right)=38 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{3}} \\ 2^{\frac{1}{3}}\left(2^{\frac{2}{3}}+3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}\right)=38 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{3}} \\ 2+3\cdot 2^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}=38 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{3}} \\ (2ab)^{\frac{1}{3}}=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{3}} \\ 2ab=12^3 \end{cases} \Rightarrow ab=864 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+19)(x-19)=864 \Leftrightarrow x^2-19^2=864 \Leftrightarrow x^2=1225 \Leftrightarrow x=\pm 35$$

Remarcă.

1).Let be $0 \le n \le 2\lambda$ fixed. Solve for reals

$$(x+\lambda)^{\frac{1}{3}}-n^{\frac{1}{3}}=(x-\lambda)^{\frac{1}{3}}.$$

Soluție

Mulțimea soluțiilor ecuației este $S=\left\{\pm\sqrt{\lambda^2+\frac{1}{n}\left(\frac{2\lambda-n}{3}\right)^3}\right\}$.

2). Let be $\lambda \ge 0$ fixed. Solve for reals

$$(x+\lambda)^{\frac{1}{3}}-(2\lambda)^{\frac{1}{3}}=(x-\lambda)^{\frac{1}{3}}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție

Luăm $n=2\lambda$ ăn problema de mai sus.

Mulțimea soluțiilor ecuației este $S=\{-\lambda,\lambda\}$.

Problema1019.

If $a,b,c>0$

$$\frac{\left(a^3+b^3+c^3+3\right)^3}{\prod\left(a^2b+1\right)}\geq 27.$$

George Apostolopoulos, Greece, RMM 12/2024

Soluție.

Lema

If $a,b,c>0$

$$a^3+b^3+c^3\geq a^2b+b^2c+c^2a.$$

Demonstrație.

$a^3+a^3+b^3\overset{AM-GM}{\geq}3a^2b$, se scriu și celelalte două inegalități analoage și se sumează.

Folosind **Lema** este sufficient să arătăm că:

$\dfrac{\left(a^2b+b^2c+c^2a+3\right)^3}{\prod\left(a^2b+1\right)}\geq 27$, care rezultă din substituția $\left(a^2b+1,b^2c+1,c^2a+1\right)=(x,y,z)$.

Inegalitatea se scrie: $(x+y+z)^3\geq 27xyz$, vezi AM-GM.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z\Leftrightarrow a=b=c$.

Remarca.

If $a,b,c,d>0$

$$\frac{\left(a^4+b^4+c^4+d^4+4\right)^4}{\prod\left(a^3b+1\right)}\geq 256.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema

If $a,b,c>0$

$$a^4+b^4+c^4+d^4\geq a^3b+b^3c+c^3d+d^3a.$$

Demonstrație.

$a^4+a^4+a^4+b^4 \overset{AM-GM}{\geq} 4a^3b$, se scriu și celelalte trei inegalități analoage și se sumează.

Folosind **Lema** este sufficient să arătăm că:

$\dfrac{\left(a^3b+b^3c+c^3d+d^3a+4\right)^4}{\prod\left(a^3b+1\right)} \geq 256$, care rezultă din substituția $\left(a^3b+1,b^3c+1,c^3d+1,d^3a+1\right)=(x,y,z,t)$.

Inegalitatea se scrie: $(x+y+z+t)^4 \geq 256xyzt$, vezi AM-GM.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=t \Leftrightarrow a=b=c=d$.

Problema1020.

J714. If $x,y,z\geq 0$, $x^2+y^2+z^2+xyz=4$ then

$$\sum xy+\frac{3}{2}\sqrt{\sum x^2-\sum xy}\geq 3.$$

Marius Stănean, Zalău, Mathematical Reflections, Nr.5/2025

Solution.

Using the substitution $(x,y,z)=(2\cos A,2\cos B,2\cos C)$, ΔABC non obtuse, we have:

$$\sum xy+\frac{3}{2}\sqrt{\sum x^2-\sum xy}\geq 3 \Leftrightarrow 4\sum\cos A\cos B+\frac{3}{2}\sqrt{4\sum\cos^2 A-4\sum\cos A\cos B}\geq 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\sum\cos A\cos B+3\sqrt{\sum\cos^2 A-\sum\cos A\cos B}\geq 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\cdot\frac{p^2+r^2-4R^2}{4R^2}+3\sqrt{\frac{6R^2+4Rr+r^2-p^2}{2R^2}-\frac{p^2+r^2-4R^2}{4R^2}}\geq 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{p^2+r^2}{R^2}+3\sqrt{(4R+r)^2-3p^2}\geq 7 \Leftrightarrow 3\sqrt{(4R+r)^2-3p^2}\geq 7-\frac{p^2+r^2}{R^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9\left((4R+r)^2-3p^2\right)\geq\left(7-\frac{p^2+r^2}{R^2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow p^2\left(29R^2-8r^2-4p^2\right)\geq 32R^4-72R^3r-65R^2r^2+4r^4$, resulting from Walker-Gerretsen inequality $2R^2+8Rr+3r^2\leq p^2\leq 4R^2+4Rr+3r^2$.

It remains to show that:

$$\left(2R^2+8Rr+3r^2\right)\left(29R^2-8r^2-4\left(4R^2+4Rr+3r^2\right)\right)\geq 32R^4-72R^3r-65R^2r^2+4r^4.$$

Equality occurs if and only if the triangle is equilateral.

Problem1021.

S711. In ΔABC holds

$$\sum\frac{\tan\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{B-C}{2}}\geq\sum\frac{1}{\sin B+\sin C}.$$

Mihaela Berindeanu, București, Mathematical Reflections, Nr.5/2025

Solution .

Using $\cos\frac{B-C}{2}=\frac{b+c}{a}\sin\frac{A}{2}$ we have:

$$\frac{\tan\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{B-C}{2}}=\frac{\tan\frac{A}{2}}{\left(\frac{b+c}{a}\sin\frac{A}{2}\right)^2}=\frac{\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}}{\frac{(b+c)^2}{a^2}\sin^2\frac{A}{2}}=\frac{a^2}{(b+c)^2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}=\frac{2a^2}{(b+c)^2\sin A}=$$

$$=\frac{2a^2}{(b+c)^2\frac{a}{2R}}=\frac{4aR}{(b+c)^2}\Rightarrow LHS=\sum\frac{\tan\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{B-C}{2}}=4R\sum\frac{a}{(b+c)^2}.$$

$$RHS=\sum\frac{1}{\sin B+\sin C}=\sum\frac{1}{\frac{b}{2R}+\frac{c}{2R}}=2R\sum\frac{1}{b+c}.$$

We have to show that $LHS\geq RHS \Leftrightarrow 4R\sum\frac{a}{(b+c)^2}\geq 2R\sum\frac{1}{b+c}\Leftrightarrow 2\sum\frac{a}{(b+c)^2}\geq\sum\frac{1}{b+c}$,

resulting from:

$$2\sum\frac{a}{(b+c)^2}\overset{Chebyshev}{\geq}2\cdot\frac{1}{3}\sum a\sum\frac{1}{(b+c)^2}\overset{Titu}{\geq}\frac{2}{3}\sum a\cdot\frac{\left(\sum\frac{1}{b+c}\right)^2}{3}\overset{(1)}{\geq}\sum\frac{1}{b+c},$$

where $\frac{2}{3}\sum a\cdot\frac{\left(\sum\frac{1}{b+c}\right)^2}{3}\overset{(1)}{\geq}\sum\frac{1}{b+c}\Leftrightarrow\frac{2}{9}\sum a\cdot\sum\frac{1}{b+c}\geq 1$, resulting from:

$$\frac{2}{9}\sum a\cdot\sum\frac{1}{b+c}\overset{Titu}{\geq}\frac{2}{9}\sum a\cdot\frac{9}{\sum(b+c)}=\frac{2}{9}\sum a\cdot\frac{9}{2\sum a}=1.$$

Equality occurs if and only if the triangle is equilateral.

Problema1022.

S712. If $x,y,z>0$, $xy+yz+zx+xyz=4$ then

$$\sum\frac{1}{x^2}+\sum\frac{1}{x}\geq 2\sum\frac{1}{xy}.$$

Mircea Lascu, Zalău, Mathematical Reflections, Nr.5/2025

Solution.

$$xy+yz+zx+xyz=4\Leftrightarrow\sum\frac{1}{x+2}=1.$$

$$\sum\frac{x+2}{x^2}\sum\frac{1}{x+2}\overset{CBS}{\geq}\left(\sum\frac{1}{x}\right)^2\Leftrightarrow\sum\frac{x+2}{x^2}\geq\left(\sum\frac{1}{x}\right)^2\Leftrightarrow\sum\frac{1}{x}+\sum\frac{2}{x^2}\geq\sum\frac{1}{x^2}+\sum\frac{2}{xy}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sum\frac{1}{x}+\sum\frac{1}{x^2}\geq 2\sum\frac{1}{xy}.$$

Equality occurs if and only if $x=y=z=1$.

Remark.

If $x,y,z>0$, $xy+yz+zx+xyz=4$ and $\lambda\geq 1$ then

$$\lambda\sum\frac{1}{x^2}+\sum\frac{1}{x}\geq(\lambda+1)\sum\frac{1}{xy}.$$

Solution

$$xy+yz+zx+xyz=4\Leftrightarrow\sum\frac{1}{x+2}=1.$$

$$\sum\frac{x+2}{x^2}\sum\frac{1}{x+2}\overset{CBS}{\geq}\left(\sum\frac{1}{x}\right)^2\Leftrightarrow\sum\frac{x+2}{x^2}\geq\left(\sum\frac{1}{x}\right)^2\Leftrightarrow\sum\frac{1}{x}+\sum\frac{2}{x^2}\geq\sum\frac{1}{x^2}+\sum\frac{2}{xy}\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \sum \frac{1}{x} + \sum \frac{1}{x^2} \geq 2\sum \frac{1}{xy}$,(1).

$\sum \frac{1}{x^2} \geq \sum \frac{1}{xy} \Rightarrow (\lambda - 1)\sum \frac{1}{x^2} \geq (\lambda - 1)\sum \frac{1}{xy}$, (2).

Add inequalities (1) și (2) get: $\sum \frac{1}{x} + \lambda \sum \frac{1}{x^2} \geq (\lambda + 1)\sum \frac{1}{xy}$.

Equality occurs if and only if $x = y = z = 1$.

Problema1023.

J713. If $a,b,c > 0$, $ab + bc + ca = 3abc$ then

$$1 \leq abc \leq \frac{(a+b+c)^3}{12(a+b+c)-9}.$$

Titu Andreescu, USA, Mathematical Reflections, Nr.5/2025

Solution.

1). $1 \leq abc$, see: $3abc = ab + bc + ca \overset{AM-GM}{\geq} 3\sqrt[3]{(abc)^2} \Rightarrow abc \geq \sqrt[3]{(abc)^2} \Rightarrow 1 \leq abc$.

2). $abc \leq \frac{(a+b+c)^3}{12(a+b+c)-9}$.

Use pqr -Method. Let $p = \sum a, q = \sum ab, r = abc$.

$q = 3r \Rightarrow r \leq \frac{p^3}{12p - 9} \Leftrightarrow \frac{q}{3} \leq \frac{p^3}{12p-9} \Leftrightarrow q \leq \frac{p^3}{4p-3} \Leftrightarrow p^3 - 4pq + 3q \geq 0$,

see Schur inequality $p^3 - 4pq + 9r \geq 0, 3r = q \Leftrightarrow p^3 - 4pq + 3q \geq 0$.

Equality occurs if and only if $a = b = c = 1$.

Remark.

If $a,b,c > 0$, $ab + bc + ca = 3abc$ and $\lambda \leq 12$ then

$$\frac{(a+b+c)^3}{\lambda(a+b+c) - 3(\lambda - 9)} \geq abc.$$

Marin Chirciu

Solution .

Use pqr -Method. Let $p=\sum a, q=\sum ab, r=abc$.

$$q=3r \Rightarrow \frac{p^3}{\lambda p-3(\lambda-9)} \geq r \Leftrightarrow \frac{p^3}{\lambda p-3(\lambda-9)} \geq \frac{q}{3},$$

see Schur inequality $p^3-4pq+9r\geq 0, 3r=q \Leftrightarrow p^3-4pq+3q\geq 0 \Leftrightarrow p^3\geq 4pq-3q$.

It suffices to prove:

$\frac{4pq-3q}{\lambda p-3(\lambda-9)} \geq \frac{q}{3} \Leftrightarrow \frac{4p-3}{\lambda p-3(\lambda-9)} \geq \frac{1}{3} \Leftrightarrow (12-\lambda)p \geq 3(12-\lambda)$, by $\lambda \leq 12$ and $p\geq 3$, see:

$$3abc=ab+bc+ca \overset{AM-GM}{\geq} 3\sqrt[3]{(abc)^2} \Rightarrow abc \geq \sqrt[3]{(abc)^2} \Rightarrow abc \geq 1.$$

$$p=a+b+c \overset{AM-GM}{\geq} 3\sqrt[3]{abc} \overset{abc\geq 1}{\geq} 3.$$

Equality occurs if and only if $a=b=c=1$.

Problema1024.

If $0<x<\frac{\pi}{2}$ then

$$\frac{\tan x}{1+\cot x}+\frac{\cot x}{2}+\frac{1}{1+\tan x} \geq \frac{3}{2}.$$

Crăciun Gheorghe, Mathematical Inequalities9/2025

Soluție

Cu substituția $\tan x = t > 0$ obținem:

$$LHS=\frac{\tan x}{1+\cot x}+\frac{\cot x}{2}+\frac{1}{1+\tan x}=\frac{t}{1+\frac{1}{t}}+\frac{\frac{1}{t}}{2}+\frac{1}{1+t}=\frac{t^2}{t+1}+\frac{1}{2t}+\frac{1}{1+t} \overset{(1)}{\geq} \frac{3}{2}=RHS,$$

unde $\frac{t^2}{t+1}+\frac{1}{2t}+\frac{1}{1+t} \overset{(1)}{\geq} \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2t^3-3t^2+1\geq 0 \Leftrightarrow (t-1)^2(2t+1)\geq 0$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $t=1 \Leftrightarrow \tan x=1, 0<x<\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}$.

Remarcă.

1). If $0<x<\frac{\pi}{2}$ and $\lambda \geq 0$ then

$$\frac{\tan x}{\lambda+\cot x}+\frac{\cot x}{\lambda+1}+\frac{1}{\lambda+\tan x}\geq\frac{3}{\lambda+1}.$$

Soluție

Cu substituția $\tan x=t>0$ obținem:

$$LHS=\frac{\tan x}{\lambda+\cot x}+\frac{\cot x}{\lambda+1}+\frac{1}{\lambda+\tan x}=\frac{t^2}{\lambda t+1}+\frac{1}{(\lambda+1)t}+\frac{1}{\lambda+t}\overset{(1)}{\geq}\frac{3}{\lambda+1}=RHS,$$

unde $\frac{t^2}{\lambda t+1}+\frac{1}{(\lambda+1)t}+\frac{1}{\lambda+t}\overset{(1)}{\geq}\frac{3}{\lambda+1}\Leftrightarrow$

$$(\lambda+1)t^4+(\lambda^2-2\lambda)t^3+(-2\lambda^2+2\lambda-3)t^2+(\lambda^2-2\lambda+2)t+\lambda\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(t-1)^2\left((\lambda+1)t^2+(\lambda^2+2)t+\lambda\right)\geq 0.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $t=1\Leftrightarrow\tan x=1, 0<x<\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}$.

2). If $0<x<\frac{\pi}{2}$ then

$$\frac{\tan x}{2+\cot x}+\frac{\cot x}{3}+\frac{1}{2+\tan x}\geq 1.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție

Se ia $\lambda=2$ în problema de mai sus. Soluția ecuației este $x=\frac{\pi}{4}$.

Problema1025.

If $x,y>0$, $x+y=2$, in ΔABC hods:

$$\prod\left(a^x b^y+2\right)\geq 36\sqrt{3}F.$$

D.M.Bătinețu-Giurgiu, Claudia Nănuți, RMM 8/2025

Soluție

Lema

If $a,b,c,t\geq 0$

$$\prod\left(a^2+t\right)\geq\frac{3}{4}(a+b+c)^2t^2.$$

Hojoo Lee Inequality

$$LHS=\prod\left(a^xb^y+2\right)\overset{HojooLee}{\geq}\frac{3}{4}\cdot 4\left(\sum\sqrt{a^xb^y}\right)^2\overset{AG}{\geq}3\left(3\sqrt[3]{\prod\sqrt{a^xb^y}}\right)^2=3\left(3\sqrt[6]{(abc)^{x+y}}\right)^2=3\left(3\sqrt[6]{(abc)^2}\right)^2=$$

$$=3\cdot 9(abc)^{\frac{2}{3}}\overset{Carlitz}{\geq}27\cdot\frac{4F}{\sqrt{3}}=36\sqrt{3}F=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $\sqrt{a^xb^y}=\sqrt{b^xc^y}=\sqrt{c^xa^y}=\sqrt{\frac{2}{2}}$, $a=b=c=1$.

Remarcă.

If $x,y,\lambda,n>0$, $x+y=n$, in ΔABC hods:

$$\prod\left(a^xb^y+\lambda\right)\geq\frac{27\lambda^2}{4}\cdot\left(\frac{4F}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Lema

If $a,b,c,t\geq 0$

$$\prod\left(a^2+t\right)\geq\frac{3}{4}(a+b+c)^2t^2.$$

Hojoo Lee Inequality

$$LHS=\prod\left(a^xb^y+\lambda\right)\overset{HojooLee}{\geq}\frac{3}{4}\cdot\lambda^2\left(\sum\sqrt{a^xb^y}\right)^2\overset{AG}{\geq}\frac{3\lambda^2}{4}\left(3\sqrt[3]{\prod\sqrt{a^xb^y}}\right)^2=\frac{3\lambda^2}{4}\left(3\sqrt[6]{(abc)^{x+y}}\right)^2=$$

$$=\frac{3\lambda^2}{4}\left(3\sqrt[6]{(abc)^n}\right)^2=\frac{3\lambda^2}{4}\cdot 9(abc)^{\frac{n}{3}}\overset{Carlitz}{\geq}\frac{27\lambda^2}{4}\cdot\left(\frac{4F}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{3}{2}\cdot\frac{n}{3}}=\frac{27\lambda^2}{4}\cdot\left(\frac{4F}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{n}{2}}=RHS.$$

Am folosit mai sus: Inegalitatea lui Carlitz: $(abc)^{\frac{2}{3}}\overset{Carlitz}{\geq}\frac{4F}{\sqrt{3}}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $\sqrt{a^xb^y}=\sqrt{b^xc^y}=\sqrt{c^xa^y}=\sqrt{\frac{\lambda}{2}}$, $a=b=c$.

Problema1026.

299. If $m \geq 0$ and $M \in Int(\Delta ABC)$, $F_a = Aria[MBC], F_b = Aria[MCA], F_c = Aria[MCA]$ then

$$\sum \frac{a^{2m+2}}{F_b^m} \geq \left(4\sqrt{3}\right)^m F.$$

D.M.Bătinețu-Giurgiu, Dan Nănuți, RMM 9/2025

Soluție

$$LHS = \sum \frac{a^{2m+2}}{F_b^m} = \sum \frac{\left(a^2\right)^{m+1}}{F_b^m} \overset{Radon}{\geq} \frac{\left(\sum a^2\right)^{m+1}}{\left(\sum F_b\right)^m} \overset{I-W}{\geq} \frac{\left(4F\sqrt{3}\right)^{m+1}}{F^m} = \left(4\sqrt{3}\right)^m F.$$

Am folosit mai sus:inegalitatea Ionescu-Weitzenbock: $\sum a^2 \geq 4F\sqrt{3}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

If $m \geq 0$ and $M \in Int(\Delta ABC)$, $F_a = Aria[MBC], F_b = Aria[MCA], F_c = Aria[MCA]$ then

$$\sum \frac{a^{4m+4}}{F_b^m} \geq 4^{2m+2} F^{m+2}.$$

Marin Chirciu

Soluție

$$LHS = \sum \frac{a^{4m+4}}{F_b^m} = \sum \frac{\left(a^4\right)^{m+1}}{F_b^m} \overset{Radon}{\geq} \frac{\left(\sum a^4\right)^{m+1}}{\left(\sum F_b\right)^m} \overset{Goldner}{\geq} \frac{\left(16F^2\right)^{m+1}}{F^m} = 4^{2m+2} F^{m+2}.$$

Problema1027.

296. In ΔABC

$$\sum \frac{a^3}{h_b + h_c} \geq 4F.$$

D.M.Bătinețu, Claudia Nănuți, RMM 9/2025

Soluție

$$LHS = \sum \frac{a^3}{h_b + h_c} \overset{Holder}{\geq} \frac{\left(\sum a\right)^3}{3\sum\left(h_b + h_c\right)} = \frac{(2p)^3}{3 \cdot 2\sum h_a} \overset{\sum h_a \leq p\sqrt{3}}{\geq} \frac{8p^3}{6 \cdot p\sqrt{3}} = \frac{4p^2}{3\sqrt{3}} \overset{Mitrinovic}{\geq} 4F = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

In ΔABC

1), $$2Rp \le \sum \frac{a^3}{h_b + h_c} \le \frac{R^3 p}{2r^2}.$$

Soluție

Folosim $\sum \frac{a^3}{h_b + h_c} = \frac{4Rp\left(p^2 - 3r^2 - 4Rr\right)}{p^2 + r^2 + 2Rr}$

2). $$12\sqrt{3}r(R-r) \le \sum \frac{a^3}{r_b + r_c} \le 6\sqrt{3}R(R-r).$$

Soluție

Lema.

Folosim $\sum \frac{a^3}{r_b + r_c} = 4p(R-r)$

3). $$\sum \frac{a^3}{r_b + r_c} \le \frac{R}{2r} \sum \frac{a^3}{h_b + h_c}.$$

Soluție

Folosind $\sum \frac{a^3}{r_b + r_c} = 4p(R-r)$ și $\sum \frac{a^3}{h_b + h_c} = \frac{4Rp\left(p^2 - 3r^2 - 4Rr\right)}{p^2 + r^2 + 2Rr}$.

4) $$\sum \frac{a^3}{h_b + \lambda h_c} \ge \frac{8F}{\lambda + 1}, \lambda \ge 0.$$

5). $$\sum \frac{a^{2n+1}}{h_b + \lambda h_c} \ge 2^{2n+1} \cdot 3^{\frac{1-n}{2}} \cdot \frac{F^n}{\lambda + 1}, n \in \mathbf{N}, \lambda \ge 0.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema1028.

In acute ΔABC

$$\sum \frac{b^2+c^2-a^2}{b+c-a} \le 3R\sum \cot A.$$

Ertan Yildirim, Turkey, RMM 9/2017

Soluție1.

$$LHS = \sum \frac{b^2+c^2-a^2}{b+c-a} \overset{Chebyshev}{\le} \frac{1}{3}\sum\left(b^2+c^2-a^2\right)\sum\frac{1}{b+c-a} = \frac{1}{3}\sum a^2 \sum \frac{1}{2(p-a)} =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot 2\left(p^2-r^2-4Rr\right)\frac{1}{2}\frac{4R+r}{pr} \overset{Euler}{\le} 3R\cdot\frac{p^2-r^2-4Rr}{2pr} = 3R\sum \cot A = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

In ΔABC

$$\frac{(4R+r)^2}{p}\cdot\frac{4r-R}{r+R} \le \sum \frac{b^2+c^2-a^2}{b+c-a} \le 2p.$$

Marin Chirciu

Soluție

Folosim identitatea în triunghi $\sum \frac{b^2+c^2-a^2}{b+c-a} = \frac{5p^2-(4R+r)^2}{p}$.

Problema1029.

In ΔABC

$$p^2 \le \frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}.$$

Kooi Inequality, Mathematical Inequalities9/2025

Soluție

Folosim identitatea în triunghi $H\Gamma^2 = 4R^2\left[1-\frac{2p^2(2R-r)}{R(4R+r)^2}\right]$, unde Γ este punctul lui Gergonne, adică intersecția dreptelor AA', BB', CC', unde A', B', C' sunt punctele de contact ale cercului înscris în ΔABC cu laturile BC, CA, AB.

Din $H\Gamma^2 = 4R^2\left[1-\frac{2p^2(2R-r)}{R(4R+r)^2}\right] \geq 0$ obținem $p^2 \leq \frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema1030.

In ΔABC

$$\sum \frac{m_a^2}{r_b r_c} + \frac{\sum r_a^2}{\sum r_b r_c} = 2 + \frac{R}{r}.$$

Adil Abdullayev, Azerbaijan, RMM 9/2025

Soluție

Folosim identitățile în triunghi

$$\sum \frac{m_a^2}{r_b r_c} = \frac{p^2(R+4r) - r(4R+r)^2}{p^2 r}, \sum r_a^2 = (4R+r)^2 - 2p^2, \sum r_b r_c = p^2.$$

$$LHS = \sum \frac{m_a^2}{r_b r_c} + \frac{\sum r_a^2}{\sum r_b r_c} = \frac{p^2(R+4r) - r(4R+r)^2}{p^2 r} + \frac{(4R+r)^2 - 2p^2}{p^2} = 2 + \frac{R}{r}.$$

Remarcă.

1). In ΔABC

$$3 \leq \sum \frac{m_a^2}{r_b r_c} \leq \frac{3R}{2r}.$$

Soluție

Folosim $\sum \frac{m_a^2}{r_b r_c} = \frac{p^2(R+4r) - r(4R+r)^2}{p^2 r}$

2). In ΔABC

$$\frac{6r}{R} \leq \sum \frac{m_a^2}{h_b h_c} \leq 3.$$

Soluție

Folosim $\sum \frac{m_a^2}{h_b h_c} = \frac{p^2\left(p^2+2r^2-4Rr\right)+r\left(4R+r\right)^3}{4p^2R^2}$

3). In ΔABC

$$\sum \frac{m_a^2}{h_b h_c} \le 3 \le \sum \frac{m_a^2}{r_b r_c}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție

Folosim $\sum \frac{m_a^2}{h_b h_c} = \frac{p^2\left(p^2+2r^2-4Rr\right)+r\left(4R+r\right)^3}{4p^2R^2}$ și $\sum \frac{m_a^2}{r_b r_c} = \frac{p^2\left(R+4r\right)-r\left(4R+r\right)^2}{p^2 r}$

Problema1031.

If $x, y, z > 0$, $x^2+y^2+z^2 \le 3$ then

$$\sum \sqrt{1+3x} \ge 2\sum x.$$

Nguyen Van Hoa, Vietnam, Mathematical Inequalities9/2025

Soluție

Lema.

If $0 < x < 3$ then

$$\sqrt{1+3x} \ge \frac{-1}{4}x^2 + \frac{5}{4}x + 1.$$

Demonstrație

$\sqrt{1+3x} \ge \frac{-1}{4}x^2 + \frac{5}{4}x + 1 \Leftrightarrow 16\left(1+3x\right) \ge \left(-x^2+5x+4\right)^2 \Leftrightarrow x^4 - 10x^3 + 17x^2 - 8x \le 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\left(x-1\right)^2\left(x-8\right) \le 0.$

$LHS = \sum \sqrt{1+3x} \overset{Lema}{\ge} \sum\left(\frac{-1}{4}x^2 + \frac{5}{4}x + 1\right) = \frac{-1}{4}\sum x^2 + \frac{5}{4}\sum x + 3 \ge \frac{-1}{4}\cdot 3 + \frac{5}{4}\sum x + 3 =$

$= \frac{9}{4} + \frac{5}{4}\sum x \overset{(1)}{\ge} 2\sum x = RHS$,

unde $\frac{9}{4} + \frac{5}{4}\sum x \overset{(1)}{\ge} 2\sum x \Leftrightarrow \sum x \le 3$, vezi $3 \ge \sum x^2 \overset{CS}{\ge} \frac{1}{3}\left(\sum x\right)^2 \Rightarrow 3 \ge \frac{1}{3}\left(\sum x\right)^2 \Rightarrow \sum x \le 3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = 1$.

Remarcă.

If $x, y, z > 0$, $x^2 + y^2 + z^2 \le 3$ and $1 \le \lambda \le 2 + \sqrt{3}$ then

$$\sum \sqrt{1 + (\lambda^2 - 1)x} \ge \lambda \sum x .$$

Marin Chirciu

Soluție

Lema.

If $0 < x < 3$ then

$$\sqrt{1 + (\lambda^2 - 1)x} \ge \frac{-\lambda^2 + 2\lambda - 1}{2\lambda} x^2 + \frac{3\lambda^2 - 4\lambda + 1}{2\lambda} x + 1 .$$

Demonstrație

$$\sqrt{1 + (\lambda^2 - 1)x} \ge \frac{-\lambda^2 + 2\lambda - 1}{2\lambda} x^2 + \frac{3\lambda^2 - 4\lambda + 1}{2\lambda} x + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)^2 (\lambda - 1)^2 \left[(\lambda - 1)^2 x - 4\lambda(\lambda + 2) \right] \le 0 .$$

$$LHS = \sum \sqrt{1 + (\lambda^2 - 1)x} \overset{Lema}{\ge} \sum \left(\frac{-\lambda^2 + 2\lambda - 1}{2\lambda} x^2 + \frac{3\lambda^2 - 4\lambda + 1}{2\lambda} x + 1 \right) =$$

$$= \frac{-\lambda^2 + 2\lambda - 1}{2\lambda} \sum x^2 + \frac{3\lambda^2 - 4\lambda + 1}{2\lambda} \sum x + 3 \ge \frac{-\lambda^2 + 2\lambda - 1}{2\lambda} \cdot 3 + \frac{3\lambda^2 - 4\lambda + 1}{2\lambda} \sum x + 3 \overset{(1)}{\ge} \lambda \sum x = RHS$$

unde $\frac{-\lambda^2 + 2\lambda - 1}{2\lambda} \cdot 3 + \frac{3\lambda^2 - 4\lambda + 1}{2\lambda} \sum x + 3 \overset{(1)}{\ge} \lambda \sum x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\lambda^2 - 4\lambda + 1) \sum x \ge 3(\lambda^2 - 4\lambda + 1)$, care rezultă din $(\lambda^2 - 4\lambda + 1) \le 0$, $2 - \sqrt{3} \le \lambda \le 2 + \sqrt{3}$ și

$\sum x \le 3$, vezi $3 \ge \sum x^2 \overset{CS}{\ge} \frac{1}{3} \left(\sum x \right)^2 \Rightarrow 3 \ge \frac{1}{3} \left(\sum x \right)^2 \Rightarrow \sum x \le 3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = 1$.

Problema1032.

If $x \ge 0$ then

$$x + xe^x + 2 \ge 2e^x .$$

Panagiotis Danousis, Greece, Math Atelier 9/2025

Soluție

$$x+xe^x+2\ge 2e^x \Leftrightarrow \frac{e^x-1}{e^x+1}\le \frac{x}{2}.$$

Aplicăm Tangent Line Method pentru funcția concavă $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$, $x\ge 0$ în punctul $x_0=0$.

Obținem ecuația tangentei $y=\frac{x}{2}$ și f concavă pe $[0,\infty)\Rightarrow f(x)\le \frac{x}{2}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=0$.

Remarcă.

If $x\ge \ln\lambda$, $\lambda>0$ then

$$\lambda xe^x+\lambda^2x+\lambda(\lambda^2+1)\ge \lambda(\lambda^2+1)e^x.$$

Marin Chirciu

Soluție

$$\lambda xe^x+\lambda^2x+\lambda(\lambda^2+1)\ge \lambda(\lambda^2+1)e^x \Leftrightarrow \frac{e^x-\lambda}{e^x+\lambda}\le \frac{2\lambda x+1-\lambda^2}{(\lambda+1)^2}.$$

Aplicăm Tangent Line Method pentru funcția concavă $f(x)=\frac{e^x-\lambda}{e^x+\lambda}$, $x\ge 0$ în punctul $x_0=0$.

Obținem ecuația tangentei $y=\frac{2\lambda x+1-\lambda^2}{(\lambda+1)^2}$ și f concavă pe $[\ln\lambda,\infty)\Rightarrow f(x)\le \frac{2\lambda x+1-\lambda^2}{(\lambda+1)^2}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=0$.

Problema1033.

If $a,b,c>0$ then

$$\sum \frac{a}{\sqrt{4b^2+bc+4c^2}}\ge 1.$$

D.M.Bătinețu-Giurgiu, Neculai Stanciu, RMM 9/2025

Soluție

$$LHS = \sum \frac{a}{\sqrt{4b^2+bc+4c^2}} = \sum \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a(4b^2+bc+4c^2)}} = \sum \frac{(a)^{\frac{3}{2}}}{\left(a(4b^2+bc+4c^2)\right)^{\frac{1}{2}}} \overset{Radon}{\geq}$$

$$\overset{Radon}{\geq} \frac{\left(\sum a\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\sum a(4b^2+bc+4c^2)\right)^{\frac{1}{2}}} \overset{(1)}{\geq} 1 = RHS,$$

unde $\frac{\left(\sum a\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\sum a(4b^2+bc+4c^2)\right)^{\frac{1}{2}}} \overset{(1)}{\geq} 1 \Leftrightarrow \left(\sum a\right)^{\frac{3}{2}} \geq \left(\sum a(4b^2+bc+4c^2)\right)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(\sum a\right)^3 \geq \sum a(4b^2+bc+4c^2) \Leftrightarrow \sum a^3 + 3\prod(a+b) \geq 4\sum ab(a+b) + 3abc \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum a^3 + 3\left(2abc + \sum ab(a+b)\right) \geq 4\sum ab(a+b) + 3abc \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \sum a^3 + 3abc \geq \sum ab(a+b)$,(Schur).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

Remarcă.

If $a,b,c>0$ and $\frac{7}{4} \leq \lambda \leq 4$ then

$$\sum \frac{a}{\sqrt{\lambda b^2+bc+\lambda c^2}} \geq \frac{3}{\sqrt{2\lambda+1}}.$$

Marin Chirciu

Problema1034.

In acute ΔABC

$$\frac{9}{4R+r} \leq \sum \frac{1}{s_a} \leq \frac{1}{r}.$$

Adil Abdullayev, Azerbaijan, RMM 9/2017

Soluție

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum \frac{1}{s_a} \overset{h_a \leq s_a}{\leq} \sum \frac{1}{h_a} = \frac{1}{r}.$$

Inegalitatea din stânga.

$$\sum\frac{1}{s_a}\overset{m_a\le s_a}{\ge}\sum\frac{1}{m_a}\overset{m_a\le 2R\cos^2\frac{A}{2}}{\ge}\sum\frac{1}{2R\cos^2\frac{A}{2}}=\frac{1}{2R}\sum\frac{1}{\cos^2\frac{A}{2}}=\frac{1}{2R}\cdot\left[1+\frac{(4R+r)^2}{p^2}\right]\overset{Gerretsen}{\ge}$$

$$\overset{Gerretsen}{\ge}\frac{1}{2R}\cdot\left[1+\frac{(4R+r)^2}{\frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}}\right]=\frac{1}{2R}\cdot\left[1+\frac{2(2R-r)}{R}\right]=\frac{5R-2r}{2R^2}\overset{Euler}{\ge}\frac{9}{4R+r},$$

unde $\frac{5R-2r}{2R^2}\overset{Euler}{\ge}\frac{9}{4R+r}\Leftrightarrow 2R^2-3Rr-2r^2\ge 0\Leftrightarrow (R-2r)(2R+r)\ge 0$, vezi $R\ge 2r$,(Euler).

Am folsit mai sus $m_a\le 2R\cos^2\frac{A}{2}$, in acute ΔABC.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

In ΔABC

$$\frac{4}{3R^2}\le\sum\frac{1}{s_a^2}\le\frac{R^2}{12r^4}.$$

Marin Chirciu

Problema1035.

a) Verificați egalitățile: $2025=5^2+20^2+40^2$ și $2025^2=1155^2+1158^2+1194^2$.

b) Arătați că 2025^n se poate scrie ca sumă de trei pătrate perfecte nenule distincte, pentru orice număr natural nenul n.

Mihai Marinca Chirciu, student, București, Inemath 1/2025

Soluție

a)Calcul.

b). Se consideră cazurile cazurile n impar și n par.

Cazul1). Dacă n este impar $\Rightarrow n=2k+1, k\in\mathbf{N}\Rightarrow$

$$2025^n=2025^{2k+1}=2025\cdot 2025^{2k}=\left(5^2+20^2+40^2\right)\cdot 2025^{2k}=$$

$=\left(5\cdot 2025^{k}\right)^{2}+\left(20\cdot 2025^{k}\right)^{2}+\left(40\cdot 2025^{k}\right)^{2}=a^{2}+b^{2}+c^{2}$, a,b,c numere naturale nenule distincte.

Cazul2). Dacă n este par $\Rightarrow n=2k+2, k\in\mathbf{N}\Rightarrow$

$$2025^{n}=2025^{2k+2}=2025^{2}\cdot 2025^{2k}=\left(1155^{2}+1158^{2}+1194^{2}\right)\cdot 2025^{2k}=$$

$=\left(1155\cdot 2025^{k}\right)^{2}+\left(1158\cdot 2025^{k}\right)^{2}+\left(1194\cdot 2025^{k}\right)^{2}=a^{2}+b^{2}+c^{2}$, a,b,c numere naturale nenule distincte.

Problema1036.

In ΔABC

$$1).\ \prod\cos A\le\frac{a^{2}b^{2}c^{2}}{\prod\left(a^{2}+b^{2}\right)}.$$

$$2).\ 8\prod\cos A\le\frac{s_{a}s_{b}s_{c}}{m_{a}m_{b}m_{c}}$$

Rahim Shahbazov, Azerbaijan, RMM 9/2025

Soluție

1). Folosind identitățile în triunghi: $\prod\cos A=\dfrac{p^{2}-(2R+r)^{2}}{4R^{2}}$ și

$\prod\left(b^{2}+c^{2}\right)=2\left[p^{6}+p^{4}\left(r^{2}-12Rr\right)+p^{2}r^{2}\left(40R^{2}+8Rr-r^{2}\right)-r^{3}\left(4R+r\right)^{3}\right]$ avem:

$$\frac{p^{2}-(2R+r)^{2}}{4R^{2}}\cdot 2\left[p^{6}+p^{4}\left(r^{2}-12Rr\right)+p^{2}r^{2}\left(40R^{2}+8Rr-r^{2}\right)-r^{3}\left(4R+r\right)^{3}\right]\le 16R^{2}r^{2}p^{2}\Leftrightarrow$$

$$\left[p^{2}-(2R+r)^{2}\right]\cdot\left[p^{6}+p^{4}\left(r^{2}-12Rr\right)+p^{2}r^{2}\left(40R^{2}+8Rr-r^{2}\right)-r^{3}\left(4R+r\right)^{3}\right]\le 32R^{4}r^{2}p^{2},$$

care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen.

2). Avem $s_{a}=\dfrac{2bc}{b^{2}+c^{2}}m_{a}\Leftrightarrow\dfrac{s_{a}}{m_{a}}=\dfrac{2bc}{b^{2}+c^{2}}$

$$RHS=\frac{s_{a}s_{b}s_{c}}{m_{a}m_{b}m_{c}}=\prod\frac{2bc}{b^{2}+c^{2}}=\frac{8a^{2}b^{2}c^{2}}{\prod\left(b^{2}+c^{2}\right)}\overset{1)}{\ge}8\prod\cos A=LHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema1037.

If $a,b,c>0$, $a^2+b^2+c^2=6$ then

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+a+b+c\geq 6.$$

Nguyen Phuc Tang, Vietnam, RMM 9/2025

Remarcă.

1). If $a,b,c>0$, $a^2+b^2+c^2=3$ then

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+a+b+c\geq 6.$$

Marin Chirciu

Soluție

$$LHS=\sum\frac{a}{b}+\sum a=\sum\frac{a^2}{ab}+\sum a\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum ab}+\sum a=\frac{\sum a^2+2\sum ab}{\sum ab}+\sum a=$$

$$\frac{\sum a^2}{\sum ab}+2+\sum a=\frac{3}{\sum ab}+2+\sum a\overset{pqr-Method}{=}\frac{3}{q}+2+p\overset{(1)}{\geq}6=RHS.$$

unde $\frac{3}{q}+2+p\overset{(1)}{\geq}6\Leftrightarrow\frac{3}{\frac{p^2-3}{2}}+2+p\geq 6\Leftrightarrow\frac{6}{p^2-3}+p\geq 4\Leftrightarrow p^3-4p^2-3p+18\geq 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(p-3)^2(p+2)\geq 0$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

2). If $a,b,c>0$, $ab+bc+ca=3$ and $\lambda\geq 0$ then

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\lambda(a+b+c)\geq 3(\lambda+1).$$

Marin Chirciu

Soluție

$$LHS=\sum\frac{a}{b}+\lambda\sum a=\sum\frac{a^2}{ab}+\lambda\sum a\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum ab}+\lambda\sum a=\frac{\sum a^2+2\sum ab}{\sum ab}+\lambda\sum a=$$

$$\frac{\sum a^2}{\sum ab}+2+\lambda\sum a=\frac{3}{\sum ab}+2+\lambda\sum a\overset{pqr-Method}{=}\frac{3}{q}+2+\lambda p\overset{(1)}{\geq}3(\lambda+1)=RHS.$$

unde $\frac{3}{q}+2+\lambda p\overset{(1)}{\geq}3(\lambda+1)\overset{q=3}{\Leftrightarrow}\frac{3}{3}+2+\lambda p\geq 3(\lambda+1)\Leftrightarrow \lambda p\geq 3\lambda$, care rezultă din $\lambda\geq 0$ și $p\geq 3$, vezi $p^2\geq 3q=3\cdot 3=9$

Am folosit mai sus pqr -Method, $p=\sum ab, q=\sum ab$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Problema1038.

Compute

$$\int_1^2 \frac{\ln x^2}{\ln x^2+\ln\left(9-6x+x^2\right)}dx.$$

Neculai Stanciu, Buzău, RMM 9/2025

Soluție

Folosim $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$ obținem:

$$I=\int_1^2 \frac{\ln x^2}{\ln x^2+\ln\left(9-6x+x^2\right)}dx=\int_1^2 \frac{\ln(3-x)^2}{\ln(3-x)^2+\ln x^2}dx.$$

Rezultă $I+I=\int_1^2 \frac{\ln x^2}{\ln x^2+\ln\left(9-6x+x^2\right)}dx+\int_1^2 \frac{\ln(3-x)^2}{\ln(3-x)^2+\ln x^2}dx=\int_1^2 dx=x\Big|_1^2=1$.

Din $2I=1\Leftrightarrow I=\frac{1}{2}$.

Remarcă.

Let be $\lambda>0$ fixed. Compute

$$\int_\lambda^{\lambda+1} \frac{\ln x^2}{\ln x^2+\ln\left(\lambda^2-2\lambda x+x^2\right)}dx.$$

Marin Chirciu

Soluție

Folosim $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$ obținem:

$$I = \int_{\lambda}^{\lambda+1} \frac{\ln x^2}{\ln x^2 + \ln(\lambda - x)^2} dx = \int_{\lambda}^{\lambda+1} \frac{\ln(\lambda - x)^2}{\ln x^2 + \ln(\lambda - x)^2} dx .$$

Rezultă $I + I = \int_{\lambda}^{\lambda+1} \frac{\ln x^2}{\ln x^2 + \ln(\lambda - x)^2} dx + \int_{\lambda}^{\lambda+1} \frac{\ln(\lambda - x)^2}{\ln x^2 + \ln(\lambda - x)^2} dx = \int_{\lambda}^{\lambda+1} dx = x\Big|_{\lambda}^{\lambda+1} = 1$.

Din $2I = 1 \Leftrightarrow I = \frac{1}{2}$.

Problema1039.

In ΔABC

$$\sum \sin A \sum \sin^3 A < \frac{81}{4} .$$

George Apostolopoulos, Greece, RMM 1/2025

Soluție.

Folosind identitățile în triunghi $\sum \sin A = \frac{p}{R}$ și $\sum \sin^3 A = \frac{2p\left(p^2 - 3r^2 - 6Rr\right)}{8R^3}$ obținem:

$$LHS = \sum \sin A \sum \sin^3 A = \frac{p}{R} \cdot \frac{2p\left(p^2 - 3r^2 - 6Rr\right)}{8R^3} = \frac{p^2\left(p^2 - 3r^2 - 6Rr\right)}{4R^4} \overset{Gerretsen}{\leq}$$

$$\overset{Gerretsen}{\leq} \frac{\left(4R^2 + 4Rr + 3r^2\right)\left(4R^2 + 4Rr + 3r^2 - 3r^2 - 6Rr\right)}{4R^4} = \frac{\left(4R^2 + 4Rr + 3r^2\right)\left(4R^2 - 2Rr\right)}{4R^4} =$$

$$= \frac{\left(4R^2 + 4Rr + 3r^2\right)\left(2R - r\right)}{2R^3} = \frac{8R^3 + 4R^2 r + 2Rr^2 - 3r^3}{2R^3} \overset{Euler}{\leq} \frac{81}{16} < \frac{81}{4} = RHS .$$

Am folosit mai sus:

$$\frac{8R^3 + 4R^2 r + 2Rr^2 - 3r^3}{2R^3} \overset{Euler}{\leq} \frac{81}{16} \Leftrightarrow 17R^3 - 32R^2 r - 16Rr^2 + 24r^3 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (R - 2r)\left(17R^2 + 2Rr - 12r^2\right) \geq 0$, vezi $R \geq 2r$,(Euler).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral..

Remarca.

In ΔABC

1). $\frac{81r^2}{16R^2} \le \sum \sin A \sum \sin^3 A \le \frac{81}{16}$.

2) $\frac{9}{16} \le \sum \cos A \sum \cos^3 A \le 3 - 39\left(\frac{r}{R}\right)^4$.

Soluție.

Folosim identitățile în triunghi $\sum \cos A = 1 + \frac{r}{R}$ și $\sum \cos^3 A = \frac{(2R+r)^3 - 4R^3 - 3rp^2}{4R^3}$.

3). $\sum \sin A \sum \sin^3 A \le 9 \sum \cos A \sum \cos^3 A$.

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Folosim identitățile în triunghi: $\sum \sin A = \frac{p}{R}, \sum \sin^3 A = \frac{2p\left(p^2 - 3r^2 - 6Rr\right)}{8R^3}$,

$\sum \cos A = 1 + \frac{r}{R}$ și $\sum \cos^3 A = \frac{(2R+r)^3 - 4R^3 - 3rp^2}{4R^3}$.

Problema1040.

JP. 285 In ΔABC

$$\sum \frac{m_a^2}{m_b} \ge p\sqrt{3}.$$

Marian Ursărescu, Roman,RMM11/2019

Soluție.

Lema.

If $x, y, z > 0$ then

$$\sum \frac{x^2}{y} \ge 3\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}.$$

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{x^2}{y} = \sum \frac{x^4}{x^2 y} \overset{CS}{\ge} \frac{\left(\sum x^2\right)^2}{\sum x^2 y} \overset{CBS}{\ge} \frac{\left(\sum x^2\right)^2}{\sqrt{\sum x^2 \sum x^2 y^2}} \overset{(1)}{\ge} 3\sqrt{\frac{\sum x^2}{3}} = RHS,$$

unde $\frac{\left(\sum x^2\right)^2}{\sqrt{\sum x^2 \sum x^2y^2}} \overset{(1)}{\geq} 3\sqrt{\frac{\sum x^2}{3}} \Leftrightarrow \sum x^2 \geq 3\sqrt{\frac{\sum x^2y^2}{3}} \Leftrightarrow \left(\sum x^2\right)^2 \geq 3\sum x^2y^2$, vezi

$\left(\sum a\right)^2 \geq 3\sum ab$, pentru $(a,b,c) = (x^2, y^2, z^2)$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z$.

Folosind **Lema** pentru $(x, y, z) = (m_a, m_b, m_c)$ obținem:

$$LHS = \sum \frac{m_a^2}{m_b} \overset{Lema}{\geq} 3\sqrt{\frac{\sum m_a^2}{3}} \overset{Ryzkov}{\geq} 3\sqrt{\frac{p^2}{3}} = p\sqrt{3} = RHS .$$

Am folosit mai sus inegalitatea lui Ryzkov $\sum m_a^2 \geq p^2$ (Mat.v skole,1/1939).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

<u>Remarcă.</u>

In ΔABC

$$1).\ \sum \frac{m_a^{n+1}}{m_a^n} \geq 9r , n \in \mathbf{N} .$$

<u>Soluție.</u>

$$LHS = \sum \frac{m_a^{n+1}}{m_a^n} \overset{Radon}{\geq} \frac{\left(\sum m_a\right)^{n+1}}{\left(\sum m_b\right)^n} = \sum m_a \geq 9r = RHS .$$

$$2) \sum \frac{h_a^2}{h_b} \geq 9r .$$

$$3).\ \sum \frac{h_a^{n+1}}{h_a^n} \geq 9r , n \in \mathbf{N} .$$

$$4).\ \sum \frac{w_a^2}{w_b} \geq 9r .$$

$$5).\ \sum \frac{w_a^{n+1}}{w_a^n} \geq 9r , n \in \mathbf{N} .$$

6). $\sum \frac{s_a^2}{s_b} \geq 9r$.

7). $\sum \frac{s_a^{n+1}}{s_a^n} \geq 9r, n \in \mathbf{N}$.

8). $\sum \frac{r_a^2}{r_b} \geq p\sqrt{3}$.

9). $\sum \frac{r_a^{n+1}}{r_a^n} \geq 9r, n \in \mathbf{N}$.

Dezvoltari, Marin Chirciu

Problema1041.

In ΔABC

$$2R\sum h_a \leq \sum a^2 .$$

Ion Cucurezeanu, Constanța, OL Constanța1985

Soluție.

$$LHS = 2R\sum h_a = 2R \cdot \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{2R} = p^2 + r^2 + 4Rr \overset{(1)}{\leq} \sum a^2 = RHS,$$

unde $p^2 + r^2 + 4Rr \overset{(1)}{\leq} \sum a^2 \Leftrightarrow p^2 + r^2 + 4Rr \leq 2\left(p^2 - r^2 - 4R\right) \Leftrightarrow p^2 \geq 12Rr + 3r^2$, vezi inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \geq 16Rr - 5r^2$.

Remarcă.

In ΔABC

1). $18Rr\left(\frac{2r}{R}\right)^{\frac{1}{3}} \leq 2R\sum h_a \leq 4\left(R+r\right)^2$.

2). $18Rr \leq 2R\sum w_a \leq 9R^2$.

3). $18Rr \leq 2R\sum m_a \leq 9R^2$.

4). $18Rr \leq 2R\sum s_a \leq 9R^2$.

5). $18Rr \le 2R\sum r_a \le 9R^2$.

Dezvoltari, Marin Chirciu

Problema1042.

If $a,b,c,d>0$, $a^2+b^2+c^2+d^2\le 1$ then

$$(a+b)\sqrt{cd}+(c+d)\sqrt{ab}\le 1.$$

Traian Tămâian, Carei, SGM-5/2016, S:L.16.167

Soluție.

$$LHS=(a+b)\sqrt{cd}+(c+d)\sqrt{ab}\overset{AG}{\le}(a+b)\cdot\frac{c+d}{2}+(c+d)\cdot\frac{a+b}{2}=$$

$$=(a+b)(c+d)\overset{AG}{\le}\frac{(a+b)^2+(c+d)^2}{2}\overset{CS}{\le}\frac{2(a^2+b^2)+2(c^2+d^2)}{2}=a^2+b^2+c^2+d^2\le 1.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=d=1$.

Remarcă.

If $a,b,c,d>0$, $a^4+b^4+c^4+d^4=1$ then

$$(a^2+b^2)cd+(c^2+d^2)ab\le 1.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS=(a^2+b^2)cd+(c^2+d^2)ab\overset{AG}{\le}(a^2+b^2)\cdot\frac{c^2+d^2}{2}+(c^2+d^2)\cdot\frac{a^2+b^2}{2}=$$

$$=(a^2+b^2)(c^2+d^2)\overset{AG}{\le}\frac{(a^2+b^2)^2+(c^2+d^2)^2}{2}\overset{CS}{\le}\frac{2(a^4+b^4)+2(c^4+d^4)}{2}=$$

$$=a^4+b^4+c^4+d^4=1.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=d=1$.

Problema1043.

If $a,b,c\in(1,2]$ then

$$\sum\frac{a}{a^2-1}\ge 2.$$

Cătălin Zârnă, Constanța, SGM-3/2016, S:L.16.85

Soluție.

$a,b,c \in (1,2] \Rightarrow a^2 - 3a + 2 \le 0$ și analoagele $\Rightarrow a^2 - 1 \le 3(a-1)$ și analoagele.

$$LHS = \sum \frac{a}{a^2-1} \ge \sum \frac{a}{3(a-1)} = \frac{1}{3}\sum \frac{a}{a-1} \ge \frac{1}{3}\sum 2 = 2 = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = 2$.

Remarcă.

If $a,b,c \in (\lambda, \lambda+1]$, $\lambda \ge 0$ then

$$\sum \frac{a}{a^2-\lambda^2} \ge \frac{3(\lambda+1)}{2\lambda+1}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$a \in (\lambda, \lambda+1] \Rightarrow a^2 - (2\lambda+1)a + \lambda(\lambda+1) \le 0 \Rightarrow a^2 - \lambda^2 \le (2\lambda+1)(a-\lambda)$.

$$LHS = \sum \frac{a}{a^2-\lambda^2} \le \sum \frac{a}{(2\lambda+1)(a-\lambda)} = \frac{1}{2\lambda+1}\sum \frac{a}{a-\lambda} \ge \frac{1}{2\lambda+1}\sum(\lambda+1) = \frac{3(\lambda+1)}{2\lambda+1} = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = \lambda + 1$.

Problema1044.

If $a,b,c,d > 0$, $a+b+c+d = k$, $k \in (0,8)$ then

$$\sum \frac{a}{b^2+1} \ge \frac{k(8-k)}{8}.$$

Mihai Bogdan, Constanța, SGM-3/2016, S:L.16.88

Soluție.

$$\sum \frac{a}{b^2+1} \ge \frac{k(8-k)}{8} \Leftrightarrow \sum \frac{a}{b^2+1} - k \ge \frac{k(8-k)}{8} - k \Leftrightarrow \sum \frac{a}{b^2+1} - \sum a \ge \frac{k(8-k)}{8} - k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum\left(\frac{a}{b^2+1}-a\right) \geq \frac{-k^2}{8} \Leftrightarrow \sum\frac{-ab^2}{b^2+1} \geq \frac{-k^2}{8} \Leftrightarrow \sum\frac{ab^2}{b^2+1} \leq \frac{k^2}{8}$$, vezi:

$$\sum\frac{ab^2}{b^2+1} \overset{AG}{\leq} \sum\frac{ab^2}{2b} = \frac{1}{2}\sum ab = \frac{1}{2}(a+c)(b+d) \overset{AG}{\leq} \left(\frac{(a+c)+(b+d)}{2}\right)^2 = \frac{k^2}{8}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=d=1$ și $k=4$.

Remarcă.

If $a,b,c>0$, $a+b+c=k$, $k\in(0,6)$ then

$$\sum\frac{a}{b^2+1} \geq \frac{k(6-k)}{6}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$\sum\frac{a}{b^2+1} \geq \frac{k(6-k)}{6} \Leftrightarrow \sum\frac{a}{b^2+1}-k \geq \frac{k(6-k)}{6}-k \Leftrightarrow \sum\frac{a}{b^2+1}-\sum a \geq \frac{k(6-k)}{6}-k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum\left(\frac{a}{b^2+1}-a\right) \geq \frac{-k^2}{6} \Leftrightarrow \sum\frac{-ab^2}{b^2+1} \geq \frac{-k^2}{6} \Leftrightarrow \sum\frac{ab^2}{b^2+1} \leq \frac{k^2}{6}$$, vezi:

$$\sum\frac{ab^2}{b^2+1} \overset{AG}{\leq} \sum\frac{ab^2}{2b} = \frac{1}{2}\sum ab \overset{SOS}{\leq} \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\left(\sum a\right)^2 = \frac{k^2}{6}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$ și $k=3$.

Problema1045.

If $a,b,c>0$ then

$$\sum\frac{b^2c^2}{a^3(b+c)} \geq \frac{3}{2}.$$

Tudorel Lupu, Constanța, SGM-3/2016, S:L.16.86

Soluție.

$$LHS = \sum\frac{b^2c^2}{a^3(b+c)} = \sum\frac{\left(\frac{bc}{a}\right)^2}{a(b+c)} \overset{CS}{\geq} \frac{\left(\sum\frac{bc}{a}\right)^2}{\sum a(b+c)} \overset{SOS}{\geq} \frac{3\sum\frac{bc}{a}\cdot\frac{ca}{b}}{2\sum ab} = \frac{3\sum a^2}{2\sum ab} \overset{SOS}{\geq} \frac{3}{2} = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

Remarcă.

1). If $a,b,c>0$ and $\lambda\ge 0$ then

$$\sum\frac{b^2c^2}{a^3(b+\lambda c)}\ge\frac{3}{\lambda+1}.$$

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{b^2c^2}{a^3(b+\lambda c)}=\sum\frac{\left(\frac{bc}{a}\right)^2}{a(b+\lambda c)}\overset{CS}{\ge}\frac{\left(\sum\frac{bc}{a}\right)^2}{\sum a(b+\lambda c)}\overset{SOS}{\ge}\frac{3\sum\frac{bc}{a}\cdot\frac{ca}{b}}{(\lambda+1)\sum ab}=\frac{3\sum a^2}{(\lambda+1)\sum ab}\overset{SOS}{\ge}$$

$$\overset{SOS}{\ge}\frac{3}{\lambda+1}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

2). If $a,b,c>0$, $ab+bc+ca=3$ and $\lambda\ge 0$, $n\in\mathbf{N}$ then

$$\sum\frac{b^{2n}c^{2n}}{a^{2n+1}(b+\lambda c)}\ge\frac{3}{\lambda+1}.$$

Soluție.

Pentru $n=0$ obținem $\sum\frac{1}{a(b+\lambda c)}\ge\frac{3}{\lambda+1}$, vezi

$$\sum\frac{1}{a(b+\lambda c)}\overset{CS}{\ge}\frac{9}{\sum a(b+\lambda c)}=\frac{9}{(\lambda+1)\sum ab}=\frac{9}{(\lambda+1)3}=\frac{3}{\lambda+1}.$$

Pentru $n\in\mathbf{N}^*$ folosim inegalitatea lui Holder.

$$LHS=\sum\frac{b^{2n}c^{2n}}{a^{2n+1}(b+\lambda c)}=\sum\frac{\left(\frac{bc}{a}\right)^{2n}}{a(b+\lambda c)}\overset{Holder}{\ge}\frac{\left(\sum\frac{bc}{a}\right)^{2n}}{3^{2n-2}\sum a(b+\lambda c)}\overset{SOS}{\ge}\frac{\left(3\sum\frac{bc}{a}\cdot\frac{ca}{b}\right)^n}{3^{2n-2}(\lambda+1)\sum ab}=$$

$$=\frac{\left(3\sum a^2\right)^n}{3^{2n-2}(\lambda+1)\sum ab}\overset{SOS}{\ge}\frac{\left(3\sum ab\right)^n}{3^{2n-2}(\lambda+1)\sum ab}=\frac{3^n\left(\sum ab\right)^n}{3^{2n-2}(\lambda+1)\sum ab}=\frac{3^n\left(\sum ab\right)^{n-1}}{3^{2n-2}(\lambda+1)}\overset{\sum ab=3}{=}$$

$$\overset{\sum ab=3}{=}\frac{3^n\cdot 3^{n-1}}{3^{2n-2}(\lambda+1)}=\frac{3}{\lambda+1}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarcă.

3). In ΔABC

$$\sum \frac{\tan^4 \frac{B}{2} \cdot \tan^4 \frac{C}{2}}{\tan^5 \frac{A}{2}\left(\tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2}\right)} \geq \frac{1}{2}.$$

Soluție.

Lemă.

If $x, y, z > 0$, $xy + yz + zx = 3$ then

$$\sum \frac{y^4 z^4}{x^5 (y+z)} \geq \frac{3}{2}.$$

Folosind **Lema** pentru $(x, y, z) = \left(\sqrt{3}\tan\frac{A}{2}, \sqrt{3}\tan\frac{B}{2}, \sqrt{3}\tan\frac{C}{2}\right)$ obținem:

$$\sum \frac{\tan^4 \frac{B}{2} \cdot \tan^4 \frac{C}{2}}{\tan^5 \frac{A}{2}\left(\tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2}\right)} \geq \frac{1}{2}$$

4). In acute ΔABC

$$\sum \frac{\cot^4 B \cdot \cot^4 C}{\cot^5 A(\cot B + \cot C)} \geq \frac{1}{2}.$$

Dezvoltari, Marin Chirciu

Soluție.

Lemă.

If $x, y, z > 0$, $xy + yz + zx = 3$ then

$$\sum \frac{y^4 z^4}{x^5 (y+z)} \geq \frac{3}{2}.$$

Folosind **Lema** pentru $(x, y, z) = \left(\sqrt{3}\cot A, \sqrt{3}\cot B, \sqrt{3}\cot C\right)$ obținem:

$$\sum \frac{\cot^4 B \cdot \cot^4 C}{\cot^5 A(\cot B + \cot C)} \geq \frac{1}{2}$$

Problema1046.

Solve the equation

$$\left(\log_2 3\right)^x + \left(\log_3 5\right)^x = 2^{x+1}\left(\log_3 2\right)^x .$$

Gherghina Gheorghe, Pitești, OL Argeș 1994

Soluție.

$$\left(\log_2 3\right)^x + \left(\log_3 5\right)^x = 2^{x+1}\left(\log_3 2\right)^x \Leftrightarrow \left(\log_2 3\right)^x + \left(\log_3 5\right)^x = 2\left(\log_3 4\right)^x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\log_2 3}{\log_3 4}\right)^x + \left(\frac{\log_3 5}{\log_3 4}\right)^x = 2 .$$

Ecuația este de forma $f\left(x\right) = 2$, unde f este funcție strict crescătoare, ca sumă de două funcții exponențiale cu baze supraunitare, vezi $\log_2 3 > \log_3 4 > \log_4 5$.

Din f strict crescătoare $\Rightarrow$ f injectivă. $f\left(x\right) = f\left(0\right) \Rightarrow x = 0$.

Deducem că $x = 0$ este soluția unică a ecuației.

Remarcă.

Solve the equation

$$\text{1). } \left(\log_2 3\right)^x + \left(\log_3 4\right)^x = 2\left(\log_4 5\right)^x .$$

Soluție.

$$\left(\log_2 3\right)^x + \left(\log_3 4\right)^x = 2\left(\log_4 5\right)^x \Leftrightarrow \left(\frac{\log_2 3}{\log_4 5}\right)^x + \left(\frac{\log_3 4}{\log_4 5}\right)^x = 2 .$$

Ecuația este de forma $f\left(x\right) = 2$, unde f este funcție strict crescătoare, ca sumă de două funcții exponențiale cu baze supraunitare, vezi $\log_2 3 > \log_3 4 > \log_4 5$.

Din f strict crescătoare $\Rightarrow$ f injectivă. $f\left(x\right) = f\left(0\right) \Rightarrow x = 0$.

Deducem că $x = 0$ este soluția unică a ecuației.

$$\text{2). } \left(\log_2 3\right)^x + \left(\frac{3}{2}\right)^x = 2\left(\log_3 4\right)^x .$$

Dezvoltari, Marin Chirciu

Soluție.

$$(\log_2 3)^x+\left(\frac{3}{2}\right)^x=2(\log_3 4)^x \Leftrightarrow \left(\frac{\log_2 3}{\log_3 4}\right)^x+\left(\frac{\frac{3}{2}}{\log_3 4}\right)^x=2 \Leftrightarrow$$

Ecuația este de forma $f(x)=2$, unde f este funcție strict crescătoare, ca sumă de două funcții exponențiale cu baze supraunitare, vezi $\log_2 3>\frac{3}{2}>\log_3 4$.

Din f strict crescătoare $\Rightarrow$ f injectivă. $f(x)=f(0)\Rightarrow x=0$.

Deducem că $x=0$ este soluția unică a ecuației.

Problema1047.

Calculați limita șirului $(a_n)_{n\geq 2}$, unde

$$a_n=n^2\left(\sqrt[n]{2+\cos x}-\sqrt[n+1]{2+\cos x}\right), x\in\mathbf{R}.$$

Călinescu Ion, Câmpulung Muscel, OL Arges 1994

Soluție.

$$a_n=n^2\left(\sqrt[n]{2+\cos x}-\sqrt[n+1]{2+\cos x}\right)=n^2\left(\sqrt[n]{y}-\sqrt[n+1]{y}\right)=n^2\left(y^{\frac{1}{n}}-y^{\frac{1}{n+1}}\right)=n^2y^{\frac{1}{n+1}}\left(y^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}-1\right)=$$

$$=n^2y^{\frac{1}{n+1}}\left(y^{\frac{1}{n(n+1)}}-1\right)=\frac{n^2}{n(n+1)}y^{\frac{1}{n+1}}\cdot\frac{y^{\frac{1}{n(n+1)}}-1}{\frac{1}{n(n+1)}}\to 1\cdot 1\cdot\ln y=\ln y.$$

Deducem că $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\ln(2+\cos x)$.

Remarcă.

Calculați limita șirului $(a_n)_{n\geq 2}$, unde

$$a_n=n^2\left(\sqrt[n]{\lambda}-\sqrt[n+1]{\lambda}\right), \lambda>1.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$a_n=n^2\left(\sqrt[n]{\lambda}-\sqrt[n+1]{\lambda}\right)=n^2\left(\sqrt[n]{\lambda}-\sqrt[n+1]{\lambda}\right)=n^2\left(\lambda^{\frac{1}{n}}-\lambda^{\frac{1}{n+1}}\right)=n^2\lambda^{\frac{1}{n+1}}\left(\lambda^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}-1\right)=$$

$$=n^2\lambda^{\frac{1}{n+1}}\left(\lambda^{\frac{1}{n(n+1)}}-1\right)=\frac{n^2}{n(n+1)}\lambda^{\frac{1}{n+1}}\cdot\frac{\lambda^{\frac{1}{n(n+1)}}-1}{\frac{1}{n(n+1)}}\to 1\cdot 1\cdot\ln\lambda=\ln\lambda .$$

Deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\ln\lambda$.

Problema1048.

If $x, y, z>1$ and $n\in\mathbf{N}, n\geq 2$ then

$$\sum\log_z\frac{y^n+z^n}{y^{n-1}+z^{n-1}}\geq 3 .$$

Călin Burdușel, Târgoviște, OJ Dâmbovița 1995

Soluție

Lema.

If $y, z>0$ and $n\in\mathbf{N}, n\geq 2$ then

$$\frac{y^n+z^n}{y^{n-1}+z^{n-1}}\geq\frac{y+z}{2} .$$

Demonstrație

$\frac{y^n+z^n}{y^{n-1}+z^{n-1}}\geq\frac{y+z}{2}\Leftrightarrow\left(y^{n-1}-z^{n-1}\right)\left(y-z\right)\geq 0$, vezi factorii au același semn.

$$LHS=\sum\log_x\frac{y^n+z^n}{y^{n-1}+z^{n-1}}\overset{Lema}{\geq}\sum\log_x\frac{y+z}{2}\overset{AG}{\geq}\sum\log_x\sqrt{yz}=\frac{1}{2}\sum\log_x yz=$$

$$=\frac{1}{2}\sum\left(\log_x y+\log_y x\right)\overset{AG}{\geq}\frac{1}{2}\sum 2=3=RHS .$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z$.

Remarcă.

If $x, y, z>0$, $x+y+z=1$ and $n\in\mathbf{N}$, $\lambda\geq 0$ then

$$\sum\frac{y^{n+1}+\lambda z^{n+1}}{y^n+\lambda z^n}\geq 3 .$$

Marin Chirciu

Soluție

Lema.

If $y,z>0$ and $n\in\mathbf{N}$, $\lambda\geq 0$ then

$$\frac{y^{n+1}+\lambda z^{n+1}}{y^n+\lambda z^n}\geq\frac{y+\lambda z}{\lambda+1}.$$

Demonstrație

$\frac{y^{n+1}+\lambda z^{n+1}}{y^n+\lambda z^n}\geq\frac{y+\lambda z}{\lambda+1}\Leftrightarrow\lambda\left(y^n-z^n\right)\left(y-z\right)\geq 0$, vezi factorii au același semn.

$$LHS=\sum\frac{y^{n+1}+\lambda z^{n+1}}{y^n+\lambda z^n}\overset{Lema}{\geq}\sum\frac{y+\lambda z}{\lambda+1}=\frac{\left(\lambda+1\right)\sum x}{\lambda+1}=\sum x=1=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Problema1049.

O.VII. 582. Determinați numerele prime p,q,r astfel încât

$$pq+1=r^4.$$

Florin Rotaru, Focșani, RMT-3/2025, O.VII. 582

Soluție

1). Dacă r este impar $\Rightarrow$ pq este par $\Rightarrow$ cel puțin unul dintre numerele p,q este 2.

Cosiderând situațiile posibile nu obținem soluții care convin.

2). Dacă r este par, p,q -impare $\Rightarrow$ $pq+1$ este par, $pq+1=r^4$ $\Rightarrow$ r este par, r prim $\Rightarrow$ $r=2$.

$pq+1=r^4, r=2\Rightarrow pq+1=2^4\Leftrightarrow pq=15$, p,q prime $\Rightarrow\left\{p,q\right\}=\left\{3,5\right\}$.

Deducem că $\left(p,q,r\right)\in\left\{\left(3,5,2\right),\left(5,3,2\right)\right\}$.

Remarcă.

Determinați numerele prime p,q,r astfel încât

$$pq-1=r^3.$$

Marin Chirciu

Soluție

1). Dacă r este impar $\Rightarrow$ pq este par $\Rightarrow$ cel puțin unul dintre numerele p,q este 2.

Cosiderând situațiile posibile nu obținem soluții care convin.

2). Dacă r este par, , r prim $\Rightarrow r=2$.

$pq-1=r^3$, $r=2 \Rightarrow pq-1=2^3 \Leftrightarrow pq=9$, p,q prime $\Rightarrow$ $p=q=3$.

Deducem că $(p,q,r)=(3,3,2)$.

Art9500

December 1, 2025

Bibliografie:

1. C.Năstăsescu, C.Niță, M.Brandiburu, D. Joița , Exerciții de algebră, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1992.
2. O. Bottema, R. Z. Djordjević, R. R. Janić, D. S. Mitrinović și P. M. Vasić, „Geometric Inequalities”, Groningen 1969, Olanda .
3. Marin Chirciu, Inegalități trigonometrice, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2016.
4. Marin Chirciu, Inegalități cu linii importante în triunghi ,de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2018.
5. Marin Chirciu, Inegalități cu laturi și cu raze în triunghi, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2017.
6. George Apostolopoulos, Greece , Mathematical Inequalites 1/2025.
7. Konstantinos Geronikolas, Greece, Mathematical Inequalities 11/2025.
8. Tapas Das, India, RMM 10/2025.
9. Nguyen Van Hoa, Vietnam, Mathematical Inequalities 11/2025.
10. Crăciun Gheorghe, Ploiești, Mathematical Inequalities 11/2025.
11. Halit Shehu, RMM 10/2025.
12. Ertan Yildirim Turkey, RMM 9/2017.
13. Nguyen Hung Cuong, Vietnam, RMM 11/2025.
14. Adil Abdullayev, Azerbaijan, RMM 11/2025.
15. Panagiotis Danousis, Greece, Math Atelier 11/2025.
16. Laurențiu Panaitopol, Universitatea București, 1986.
17. Dorin Marghidanu, Corabia, Olt, Mathematical Inequalities 10/2025.
18. D.M. Bătinețu-Giurgiu, București, RMM 11/2025.
19. Claudia Nănuți, România, RMM 11/2025.

21.Mircea Lascu, Mathematical Reflections,5/2025.

20. Mihaly Bencze, Brașov, RMM 11/2025.
21. Neculai Stanciu, Buzău, RMM 9/2025.
22. Michel Bataille, Crux Math, Feb 2025.
23. Titu Andreescu,USA, Mathematical Reflections 5/2025.

25. Kunihiko Chikaya, Japan, Mathematical Inequalities 11/2025.

24. Nguyen Ngoc Phuc, Vietnam, Mathematical Inequalities 11/2025.
25. Sanong Huayrerai,Math 11/2025.

26. Nguyen Viet Hung, Vietnam,Crux Mathematicorum, 8/2025.
27. Daniel Sitaru, Romania, RMM 11/2025.
28. Elton Papanikolla,MathOlymp, 11/2025.
29. Mehmet Şahin, Turkey, RMM 11/2025.
30. Nguyen Minh Tho, Vietnam, Mathematical Inequalites 11/2025.
31. Rahim Shahbazov,Azerbaijan, RMM 11/2025.
38.Marius Stănean, Zalău, Romania, Mathematical Reflections 5/2025.

39.An Zhenping, China, Mathematical Reflections, Nr.5/2025.

40.Mihaela Berindeanu, București, Mathematical Reflections Nr.5/2025.

41.Amir Sofi, Kosovo. Mathematics(College and High School) 11/2025.

42.George Tsintsifas, Greece, Crux Mathematicorum 11/1986.

43. Vlad Petru, Concursul"Gheorghe Lazăr", Sibiu, 23-25 noiembrie 2012.

44. Imad Zak, Lebanon, Mathematical Inequalities9/2025.

45. Laura Molea, Curtea de Argeș, OL2016 Argeș

46. Gheorghe Molea, Curtea de Argeș, OL2016 Argeș

47.A.W.Walker, The Mathematics Magazine, vol43,nr4/1970.

48. Sakthivel Thirunavukkarasu, Math9/2025.

49.Florin Rotaru, Focșani, RMT 3/2025.

50. Chew-Seong Cheong, Math 11/2025.

51. Titu Zvonaru, Comănești, RMM9/2025.

52. Ioachim U.Pinari, Italy, Mathematical Reflections, Nr.6/2025.

53. Marin Ionescu, Pitești, OL2016 Argeș

54. Matei Alina, OL2023,Argeș

55. Adomniței Constantin,OL2012,Vaslui.

56. Dinu Teodorescu, Târgoviște, Concursul „Discipolii lui Lazăr„Ploiești, 24 martie 2012.

57.Romeo Ilie, Brașov, RMT 3/2025.

58.Cătălin Cristea, Craiova, RMT 3/2025.

59.Aurel Doboșan, Lugoj, RMT 3/2025.

60.Gheorghe Iacob , Pașcani, RMT 3/2025.

60.Mihaela Bișoc, Pașcani, RMT 3/2025.

61.Ștefana N. Drăminescu, România, Mathematical Reflections 6/2025.

62.Tănase Rumișan, România, Mathematical Reflections, Nr.6/2025.

63.Beau I. McEachren, Canada, Mathematical Reflections, Nr.6/2025.

64.Elton Papanikolla, Greece,Math Olymp 10/2025.

65.Vasile Mirccea Popa,RMM 10/2025.

66.Shirvan Tahirov, Mathematical Inequalities 10/2025.

67.Delia Marinca, Timișoara, RMT3/2025.

68.Gabriela Sabău, OL-Cluj-1994.

69.Mihai Vijdeluc, Baia Mare, Recreații Matematice, Nr.2/2025.

70.Dang Ngoc Minh, Vietnam,RMM 10/2025.

71.Nica Nicolae,RMM 9/2016.

72.George Florin Șerban, Brăila,RMM 10/2025.

73.Denos Maradiaga, Mathematical Inequalities 10/2025.

74.Ovidiu Bobb, Copalnic Mănăștur, Maramureș,RMM 9/2025.

75.Ted Szylowiec, Mathematical Inequalities9/2025.

76.Qulam Rza Zeynalli, Math 9/2025.

77.Dan Nănuți,Romania,RMM9/2025.

78.China Mathematical Olympiad 2005.

79.Bahadur Heydarov, Math 9/2025.

80.Conexiuni-Brăila-Mai -1995, L:25.

81.Kooi Inequality, Mathematical Inequalities9/2025.

82.Nguyen Phuc Tang, Vietnam, RMM 9/2025.

83.Hoang Le Nhat Thung, Vietnam, RMM3/2025.

84.Zaza Mzhavanadze, Georgia,5/2022.

85.Mihai Marinca Chirciu, student, București, Inemath 1/2025.

86.Oscar Reynaga Alarcon, Mathematics(College and High School)12/2024.

87.Codeci Elena, Curtea de Argeș,OL2016,Argeș.

88.Popescu Ionela, Câmpulung Muscel, OL2016,Argeș.

89.Florin Stănescu, Găești, Crux Math 10/2019.

90.Marian Ursărescu, Roman,RMM11/2019.

91.Ion Cucurezeanu, Constanța, OL Constanța1985.

92.Traian Tămâian, Carei, SGM-5/2016, S:L.16.167.

93.Cătălin Zârnă, Constanța, SGM-3/2016, S:L.16.85.

94.Mihai Bogdan, Constanța, SGM-3/2016, S:L.16.88.

95.Tudorel Lupu, Constanța, SGM-3/2016, S:L.16.86.

96.Gherghina Gheorghe, Pitești, OL Argeș 1994.

97.Călinescu Ion, Câmpulung Muscel, OL Arges 1994.

98.Călin Burdușel, Târgoviște, OJ Dâmbovița 1995.

99. T.Bernabid Nail, Mathematical Inequalities 11/2025.

100. Ioachim U.Pinari, Italy, Mathematical Reflections, Nr.6/2025.

101.Marin Chirciu, Inegalități algebrice 2,de inițiere la perf, Ed.Paralela 45, Pitești, 2021.

102.Marin Chirciu, Inegalități geometrice2, inițiere și perf, Ed. Paralela 45, Pitești, 2021.

103.Marin Chirciu, Inegalități algebrice, de la inițiere la perf, Ed.Comper, Băbana, 2025.

Art 9500

1 IDecembrie2025