118 pagini

WWW.MATEINFO.RO

REVISTA ELECTRONICA MATEINFO.RO

SEPTEMBRIE 2025

ISSN 2065 - 6432

REVISTĂ DIN FEBRUARIE 2009

COORDONATOR:

ANDREI OCTAVIAN DOBRE

REDACTORI PRINCIPALI ȘI SUSȚINĂTORI PERMANENȚI AI REVISTEI

NECULAI STANCIU

MARIN CHIRCIU

ROXANA MIHAELA STANCIU

ARTICOLE

R.E.M.I. IUNIE 2025

PUTEȚI TRIMITE ARTICOLE ÎN FORMAT WORD PE REVISTA.MATEINFO@YAHOO.COM

1. IN MEMORY OF TITU ZVONARU

by Neculai Stanciu


(N. 27 noiembrie 1953 – D. 11 aprilie 2025)

Titu Zvonaru was born on November 27, 1953 in the commune of Dărmăneşti, Bacău County. This commune received city status in 1989. He attended high school in his native commune.

Between 1968 and 1972, he was a student at the Theoretical High School in Comăneşti, standing out for his outstanding results in mathematics competitions. He also became a special solver for the Gazeta Matematica.

Between 1972 and 1976, he was a student at the Faculty of Mathematics and Computer Science at the University of Bucharest. After college, he worked as a programmer analyst at the Computing Center of the M.Ap.N. until 2002.

His main areas of interest were the theory of inequalities, elementary geometry and materials for preparing for mathematics competitions.

He is the co-author of two volumes: “Note matematice. Probleme pentru concursuri”, Paralela 45 Publishing House, 2002 and “Inegalităţi”, GIL Publishing House, which was published in several editions, the last in 2019, together with a team coordinated by Laurențiu Panaitopol.

He wrote a large number of articles, published in the magazines ’’Gazeta Matematică’’, ’’Arhimede’’, ’’Recreatii Matematice’’, ’’Revista de Matematică din Timișoara’’, ’’Sclipirea Minţii”, “Didactica Matematică”, “REMI”, etc. In addition to the mathematics magazines in Romania, he also published problems in the following foreign magazines “The American Mathematical Monthly”, “Crux Mathematicorum”, “Mathematical Reflection”, “School Science and Mathematics”, “The Pentagon”, “Mathematical Excalibur”, “School science and Mathematics”, “Mathematics Magaziene”, The College Mathematics Journal”, “The Fibonacci Quarterly”, “La Gaceta de la RSME”, “Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matematica – REOIM”, etc.

He was the one of the editors of the magazine “Recreatii Matematice”.

He wrote many articles and mathematical notes, standing out for the clarity of thought and expression, transmitting the pleasure caused by the beauty of mathematics.

He collaborated with many mathematicians, with favorite topics such as: mathematical recreations, number theory, synthetic geometry and inequalities.

He was gifted with a brilliant and quick mind. He amazed with the simplicity and clarity of the solutions he offered.

He impressed with the brilliant ideas found seemingly without effort. He was close to those who asked for his support, managing to transmit to other generations the passion for mathematics through elegant and valuable problems.

He passed away on April 11, 2025.

He is buried in the "Sfântul Ilie" Cemetery in Vermeşti, Comăneşti, Romania.

Some of my Collaborations with TITU ZVONARU

I. Some Articles

1. ''O identitate legată de o inegalitate cunoscută'' – Sclipirea Minţii, Nr. 34, 2024, 12.
2. ''O rafinare a inegalităţii lui Euler în triunghi'' – Revista de Matematică din Timişoara (RMT), Nr. 4, 2024, 15.
3. ''Trei soluţii pentru problema E:16475'' – Gazeta Matematică Seria B – nr. 10, 2023, 435 – 436.
4. ''O inegalitate şi mai multe metode de abordare'' – Gazeta Matematică - Seria B, Nr. 6-7-8, 2022, 287-290.
5. ''O rafinare a inegalităţii lui Weitzenböck'' – RMT, Nr. 2, 2020, 12.
6. ''Trucuri Cauchy-Buniakovski-Schwarz'' – Gazeta Matematică, nr. 11/2019, 513 - 516.
7. ''Despre şiruri'' –Didactica Matematică, Anul VIII, Nr. 2/2018, 36-39.
8. ''Despre şiruri'' –Didactica Matematică, Anul VIII, Nr. 2/2018, 36-39.
9. ''Recreaţii ... matematice '' - Recreaţii Matematice, Nr. 2, Iulie - Decembrie, 2018, 105-108.
10. ''O metodă de rafinare a unei inegalităţi'' – Sclipirea Minţii, An XI, Nr. 21, mai, 2018, 7 – 11.
11. ''Gerretsen şi Schur'' – RMT, Nr. 4, 2017, 12 – 13.
12. ''Caleidoscop matematic – Teorema lui Routh'' – Coperta Suplimentului cu exerciţii al G.M-B, nr. 9/2017.
13. ''Soluţii problema lunii aprilie 2017'' – Revista MateInfo.Ro_Mai_2017, 3-7.
14. ''Problema lunii aprilie 2017'' – Revista MateInfo.Ro_Aprilie_2017, 2.
15. ''Other solutions for two problems from AMM'' – Revista MateInfo.Ro_Februarie_2017, 2-4.
16. ''Other solutions for certain problems from The Pentagon'' – Revista MateiInfo.Ro_August_2016, 9-15.
17. ''Solved problems I'' – R.M.M. - Romanian Mathematical Magazine – nr. 17, septembrie 2016, 31-32.
18. ''Soluţia problemei 304 din La Gaceta'' - Revista MateInfo.Ro – Iulie, 2016, 16.
19. ''Asupra problemei 26971 din G.M.-B nr. 10/2014'' - Revista MateInfo.Ro – Aprilie, 2016, 2-3
20. ''Asupra problemei O.VII.393 din RMTnr. 1/2016'' - Revista MateInfo.Ro – Aprilie, 2016, 4.
21. ''O „demonstraţie'' a inegalităţii Cauchy-Buniakovski-Schwarz folosind inegalitatea lui Cebâşev!" – Recreaţii Matematice, Anul XVII, Nr. 2, Iulie – Decembrie 2015, 123-124.
22. ''Some inequalities of Ionescu – Weitzenböck type in triangle'' – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 22, No.2., October, 2014, 785-804.
23. ''Un argument de medie'' – GMB- nr.2/2015, 67-71.
24. ''O modalitate de a demonstra unele inegalităţi'' - R.M.T – Nr. 3/2014, 3-7.

25. ''Alte soluţii pentru unele probleme ONM 2014'' – Revista MateInfo.Ro – Mai, 2014, 1-4.
26. ''Some applications of H. Bergström' s inequality and J. Radon's inequality in triangle (IV) – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 22, No. 1., April, 2014, 246-252.
27. ''Some refinements of some inequalities and geometric applications'' – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 22, No. 1., April, 2014, 257-266.
28. ''How we use the injectivity of functions for solving equations'' – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 22, No. 1., April, 2014, 272-285.
29. ''Demostrarea unor inegalităţi din Octogon Mathematical Magazine'' – Sclipirea Minţii, Anul VII, Nr. 13, 2014, 3-4.
30. ''Generalizarea problemei VIII.169 din RecMat, nr. 2/2013'' - Recreaţii Matematice, Anul XVI, Nr. 1, Ianuarie – Iunie 2014, 28-29.
31. ''A generalization of one inequality and some geometric applications'' – Octogon Mathematical Magazine, Vol. 21, No.2., October, 2013, 641-648.
32. ''Bergström sau Hölder'' – R.M.T – Nr. 4/2013, 10-12.
33. ''Demonstrarea unor inegalităţi din Octogon'' (împreună cu D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti) – Sclipirea Minţii, Nr. 12, 2013, 5-6.
34. ''One problem, other seven solutions'' - Revista MateInfo.Ro, Octombrie, 2013, 6-9.
35. ''Other solutions for two problems of REOIM and la Gaceta de la RSME'' - Revista MateInfo.Ro, Martie, 2013, 2-4.
36. ''Cum demonstrăm o inegalitate ?'' – RMT, Nr. 1/2013, 12-13.
37. ''Soluţii noi pentru patru probleme din G.M.-B şi o întărire'' - Revista MateInfo.Ro, Ianuarie, 2013, 2-5.
38. ''Solutions for two problems (and a remark) from SSMJ other than those listed in SSMJ – January 2013'' - Revista MateInfo.Ro, Ianuarie, 2013, 5-8.
39. ''Concursul de matematică Sclipirea Minţii, 3.11.2012'' - Revista MateInfo.Ro, Decembrie, 2012, 10-18.
40. ''Rafinări ale problemei L:256 din Sclipirea Minţii, Nr. X – 2012'' - Revista MateInfo.Ro, Decembrie, 2012, 18-20.
41. ''Câteva soluţii pentru problema OBJ.15. din RMT, Nr. 3/2012'' – RMT, Nr. 4/2012, pp. 12 – 13.
42. ''Solutions of the problems J235, J237, J239, S235, O235 and O236 of MR 4 (2012)'' - Revista MateInfo.Ro, Noiembrie, 2012, 12-16.
43. ''O generalizare a problemei VIII.149 din Recreaţii Matematice NR. 1/2012'' - Revista MateInfo.Ro, Octombrie, 2012, 2-4.
44. ''O extindere a problemei O.VII.272 din RMT NR. 1/2011'' - Revista MateInfo.Ro, Octombrie, 4-9.
45. ''Alte soluţii pentru problema G:330 din S.M. IX – 2012'' - Revista MateInfo.Ro, Septembrie, 2012, 2-5.
46. ''A generalization of the problem J209 from Mathematical Reflections 5 (2011)'' - Revista MateInfo.Ro, Septembrie, 2012, 27-28.
47. ''Soluţii pentru patru probleme din La Gaceta de la Real Sociedad Matematica Espanola, Vol. 14, Nr. 3/2011, altele decât cele din La Gaceta de la Real Sociedad Matematica Espanola, Vol. 15, Nr. 3/2012'' - Revista MateInfo.Ro, August, 2012.
48. ''Other solutions for three problems of Mathematical Reflections, Issue 3, 2012''- Revista MateInfo.Ro, August, 2012.
49. ''Abordarea unei inegalităţi apărute în Sclipirea Minţii nr. IX''- Revista MateInfo.Ro, Iunie, 2012.
50. ''Solutions for the problems J217, J218, J219 and J221 from mathematical Reflections – Issue 1, 2012'' - Revista MateInfo.Ro, May, 2012.

51. ’’Solutions of the problems 5185 and 5186 from The School Science and Mathematics Journal (posted in December 2011 other than solutions from March 2012)’’ - Revista MateInfo.Ro, May, 2012.
52. ’’ Solutions to the problems 5176, 5179 and 5180 posted in the School Science and Mathematics Journal – November 2011 other than those presented in the School Science and Mathematics Journal – February 2012’’ - Revista MateInfo.Ro, aprilie, 2012.
53. ’’O condiţie de existenţă a triunghiurilor dreptunghice de arie şi perimetru date’’– Rec.Mat. nr. 1/2012
54. ’’Solutions to the problems 5171 and 5173 posted in the School Science and Mathematics Journal – October 2011 other than those presented in the School Science and Mathematics Journal – January 2012’’ - Revista MateInfo.Ro, februarie, 2012
55. ’’Soluţii pentru patru probleme (J208, J209, S207, S209) din Mathematical Reflections nr. 5/2011 altele decât cele din Mathematical Reflections nr. 6/2011’’ - Revista MateInfo.Ro, ianuarie, 2012
56. “Alte proprietăţi caracteristice triunghiului echilateral” – Recreaţii Matematice, Iaşi, nr. 2/2011
57. “În legătură cu unele probleme apărute în RMT nr. 3/2010”- RMT -2/2011
58. “Șase soluții pentru problema L:155 din SM, nr. VII, 2011”-SM-nr. VIII/2011

II. Some Proposed Problems published in

Gazeta Matematică, Recreaţii Matematice, RMT, Sclipirea Minţii, Crux Mathematicorum, Mathematical Reflections, School Science and Mathematics, The Pentagon, Mathematical Excalibur, La Gaceta de la RSME, Revista Escolar de La Olimpiada Iberoamericana de Matematica, Math Problems, etc.

III. Some Solutions published in

The American Mathematical Monthly:
11589, 11596, 11605, 11664, 11670, 11751, 11737, 11777, 11815, 11816, 11823, 11783, 11784, 11790, 11797, 11836, 11839, 11857, 11860, 11890, 11927, 11942, 11945, 11951, 11958, 11971, 11984, 11986, 11994, 12027, 12042, 12076, 12083, 12168, 12214, 12303.

Mathematics Magazine:
1873, 1937, 1942, 1955, 1961, 1968, 1971.

The College Mathematics Journal:
961, 962, 964, 982, 983, 988, 991, 1010, 1012, 1015, 1019, 1022, 1023, 1025, 1026, 1028, 1031, 1032, 1038, 1039, 1040, 1041, 1043, 1045, 1052, 1058, 1059, 1066, 1069, 1080, 1084, 1089, 1105.

School Science and Mathematics:
5166, 5171, 5173, 5176, 5179, 5180, 5185, 5186, 5187, 5188, 5191, 5194, 5197, 5203, 5204, 5210, 5212, 5213, 5214, 5220, 5226, 5257, 5271, 5277, 5278, 5280, 5291, 5293, 5303, 5305, 5307, 5308, 5309, 5311, 5319, 5320, 5325, 5326, 5328, 5329, 5330, 5340, 5345, 5349, 5350, 5356, 5361, 5367, 5368, 5369, 5370, 5371, 5373, 5377, 5379, 5382, 5389, 5391, 5394, 5398, 5399, 5401, 5403, 5404, 5407, 5421, 5423, 5430, 5439, 5440, 5441, 5459, 5460, 5463, 5467, 5481, 5485, 5488, 5490, 5492, 5500, 5506, 5508.

Mathematical Reflections:

S177, J208, J209, S207, S209, J217, J218, J219, J221, J279, S282, J283, J290, J292, S284, S285, J295, S292, S299, J302, J303, J305, J306, S301, O302, J312, S307, O310, J313, J315, J316, J317, J318, S313, S314, S315, S317, O313, O315, J319, J320, J323, J324, S319, S320, O321, J325, J326, J328, J330, S326, S327, U325, O326, O327, O330, J331, J333, J335, J336, S332, S334, S335, O331, J337, J339, J342, S337, S338, S342, J355, J359, J360, S357, O355, J361, J362, J363, J364, J365, S365.

Crux Mathematicorum:
M349, M369, M370, M372, M373, M376, M377, M378, M379, M422, M424, M427, M432, M433, M435, M438, M439, M440, M442, M444, M445, M446, M447, M448, M450, M470, M471, M474, M475, M480, M481, 3699, M515, M517, 3725, 3728, 3731, CC38, 3781, 3782, 3783, OC98, CC51,OC103, OC104, 3801, 3802, 3803, 3807, OC108, 3812, 3816, 3819, CC63, CC64, CC65, 3821, 3822, 3823, 3824, 3825, 3829, 3831, 3832, 3833, 3834, 3939, 3840, OC116, CC66, CC68, CC69, CC72, CC73, CC74, CC75, OC121, OC122, 3841, 3843, 3844, CC76, CC77, CC78, CC79, OC126, OC128, 3852, 3853, 3855, 3856, 3858, 3867, OC134, CC82, CC83, CC84, 3875, CC88, OC136, OC139, 3876, 3878, OC141, 3895, OC146, OC150, 3914, 3916, 3918, 3941, 3946, 3948, 3949, 3993, 3994, 3998, 4000, 4016. 4031, 4075, 4082, 4116, OC291.

The Pentagon:
681, 682, 699, 706, 714, 711, 712, 714, 718, 719, 722, 723, 724, 725, 726, 727, 730, 731, 732, 733, 734, 736, 737, 738, 739, 741, 742, 743, 746, 748, 749, 750, 751, 752, 755, 756, 757, 758, 759, 765, 767, 781, 782, 796, 799, 830, 832.

Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matematica:
229, 230, 248, 250, 251, 266, 268, 269, 270, 274, 290.

La Gaceta:
174, 181, 184, 185, 186, 189, 192, 193, 197, 202, 204, 205, 208, 214, 216, 219, 220, 221, 228, 230, 231, 240, 243, 250, 252, 256, 260, 267, 277, 279, 281, 282, 283, 285, 286, 289, 293, 298, 304, 307, 322, 340, 343, 367.

Math Problems:
21, 25, 28, J12, J18, J19, 88, J21, J24, 97, J26, J27, J28, J29, MC70, MC71, MC72, MC73, MC74, J31, J32, J33, J35, J38, J39, J45, 54, J62.

Mathematical Excalibur:
383, 391, 394, 402, 404, 415, 416, 418, 420, 426, 428, 434, 439, 442, 446, 447, 448, 449, 450, 453, 454, 459, 461, 462, 468, 491, 492, 509, 526, 527.

Octogon Mathematical Magazine:
PP. 16981, PP. 16990, PP. 17423, PP. 17510, PP. 17756, PP. 17985, PP. 18031, PP. 18126, PP. 18362, PP. 18583, PP. 18692, PP. 18694, PP. 18695, PP. 18700, PP.17382, PP.17399, PP.17425, PP.17510, PP.17592, PP.17717, PP.17756. PP.17813, PP.17928, PP.17929, PP.17931, PP.17932, PP.17934, PP.17936, PP.17955, PP.18126, PP.18301, PP.18351, PP.18362, PP.18454, PP.18552, PP.18583, PP.18654, PP.18736, PP.18870, PP.18898, PP.19844, PP.19901, PP.19931, PP.20009, PP.20013, PP.20015, PP.20040, PP.20139, PP.19258, PP.19259, PP.19260, PP.19261, PP.19272, PP.19418, PP.19443, PP.19495, PP.19431, PP.19614, PP.19617, PP.19619, PP.19620, PP.19621,PP.19622, PP.19623, PP.19625, PP.19626, PP.19628, PP.19629, PP.19633, PP.19635, PP.19841, PP.19861, PP.19863, PP.19895, PP.19896, PP.19927, PP.19931, PP.19942, PP.20041, PP.20150,

PP.20153, PP.20160, PP.20167, PP.20179, PP.20197, PP.20200, PP.20209, PP.20212, PP.20219, PP.20222, PP.20223, PP.20224, PP.20226, PP.20238, PP.20244, PP.20256, PP.20257, PP.20261, PP.20262, PP.20265, PP.20267, PP.20269, PP.20270, PP.20271, PP.20274, PP.20275, PP.20277, PP.20278, PP.20279, PP.20280, PP.20281, PP.20287, PP.20288, PP.20289, PP.20291, PP.20302, PP.20309, PP.20306, PP.20312, PP.20314, PP.20316, PP.20319, PP.20321, PP.20322, PP.20323, PP.20325, PP.20333, PP.20351, PP.20353, PP.20356, PP.20381, PP.20387, PP.20392, PP.20394, PP.20395, PP.20399, PP.20403, PP.20407, PP.20412, PP.20430, PP.20453, PP.20454, PP.20469, PP.20479, PP.20524, PP.20526, PP.20530, PP.20531, PP.20564, PP.20566, PP.20568, PP.20574, PP.20590, PP.20601, PP.20608, PP.20618, PP.20620, PP.20621, PP.20623, PP.20633, PP.20636, PP.20637, PP.20650, PP. 20660, PP.20661, PP. 20668, PP.20669, PP.20670, PP.20671, PP.20672, PP.20677, PP.20678, PP.20679, PP.20680, PP.20681, PP.20684, PP.20685, PP.20690, PP.20705, PP.20706, PP.20714, PP.20728, PP.20732, PP.20736, PP.20736, PP.20743, PP.20744, PP.20755, PP.20762, PP.20765, PP.20768, PP.20771, PP.20785, PP.20793, PP.20795, PP.20809, PP.20811, PP.20819, PP.20820, PP.20824, PP.20825, PP.20830, PP.20835, PP.20836, PP.20848, PP. 20855, PP.20861, PP.20865, PP.20866, PP.20867, PP.20869, PP.20870, PP.20875, PP.20876, PP.20880, PP.20892, PP.20895, PP.20897, PP.20906, PP.20907, PP.20910, PP.20912, PP.20917, PP.20920, PP.20928, PP.20931, PP.20936, PP.20938, PP.20944, PP.20945, PP.20946, PP.20949, PP.20951, PP.20952, PP.20957, PP.20958, PP.20960, PP.20984, PP.20992, PP.20994, PP.20995, PP.20998, PP.21000, PP.21001, PP.21008, PP.21010, PP.21063, PP.21070, PP.21121, PP.21129, PP.21133, PP.21142, PP.21145, PP.21146, PP.21147, PP.21148, PP.21149, PP.21150, PP.21151, PP.21152, PP.21153, PP.21154, PP.21155, PP.21156, PP.21157, PP.21158, PP.21159, PP.21160, PP.21163, PP.21164, PP.21165, PP.21166, PP.21173, PP.21174, PP.21178, PP.21180, PP.21194, PP.21199, PP.21203, PP.21204, PP.21209, PP.21213, PP.21233, PP.21243, PP.21286, PP.21291, PP.21298, PP.21299, PP.21301, PP.21302, PP.21303, PP.21304, PP.21305, PP.21306, PP.21307, PP.21308, PP.21309, PP.21311, PP.21312, PP.21313, PP.21318, PP.21319, PP.21321, PP.21331, PP.21381, PP.21409, PP.21410, PP.21417, PP.21418, PP.21421, PP.21431, PP.21432, PP.21435, PP.21439, PP.21440, PP.21441, PP.21442, PP.21443, PP.21445, PP.21446, PP.21447, PP.21460, PP.21488, PP.21489, PP.21490, PP.21491, PP.21494, PP.21508, PP.21543, PP.21547, PP.21567, PP.21574, PP.21575, PP.21609, PP.21618, PP.21625, PP.21626, PP.21627, PP.21641, PP.21652, PP.21659, PP.21660, PP.21662, PP.21696, PP.21701, PP.21702, PP.21704, PP.21719, PP.21729, PP.21730, PP.21760, PP.21776, PP.21777, PP.21780, PP.21784, PP. 21861, PP. 21863, PP. 21874, PP. 21884, PP. 21886, PP. 21896, PP. 21899, PP. 21913, PP. 21937, PP. 21942, PP. 21949, PP. 21954, PP. 21958, PP. 21959, PP. 21960, PP. 21993, PP. 22007, PP. 22059, PP. 22072, PP. 22082, PP. 22133, PP. 22137, PP. 22159, PP. 22180, PP. 22188, PP. 22193, PP. 22197, PP. 22203, PP. 22237, PP. 22261, PP. 22266, PP. 22273, PP. 22300, PP. 22301, PP. 22339, PP. 22343, PP. 22344, PP. 22345, PP. 22346, PP. 22347, PP. 22348, PP. 22349, PP. 22350, PP. 22351, PP. 22353, PP. 22359, PP. 22375, PP. 22376, PP. 22404, PP. 22414, PP. 22416, PP. 22419= PP. 22422, PP. 22420, PP. 22421, PP. 22425, PP. 22432, PP. 22529, PP. 22550, PP. 22551, PP. 22554, PP. 22556, PP. 22579, PP. 22599, PP. 22614, PP. 22645, PP. 22702, PP.22726, PP.22738, PP.22739, PP.22740, PP.22742, PP.22755, PP.22759, PP.22765, PP.22770, PP.22772, PP.22778, PP.22781, PP.22788, PP.22791, PP.22799, PP.22800, PP.22816, PP.22826, PP.22832, P.22834, PP.22836,

PP.22852, PP.22885, PP.22890, PP.22904, PP.22951, PP.22994, PP.22995, PP.23001, PP.23011, PP.23034, PP.23043, PP.23047, PP.23085, PP. 23101, PP.23104, PP.23114, PP.23119, PP.23134, PP.23153, PP.23194, PP.23197.

2. PROBLEME DE ALGEBRĂ CU SOLUȚII VECTORIALE

Prof. Cărămidă Elena Daniela ,
Colegiul "Vasile Lovinescu" Fălticeni

I. Inegalități

1. Dacă $a,b\in[-1;1]$:

$$\sqrt{1-a^2}+\sqrt{1-b^2}\le 2\sqrt{1-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}$$

Soluție: Considerăm vectorii $\vec{x}=(1;1)$ și $\vec{y}=\left(\sqrt{1-a^2};\sqrt{1-b^2}\right)$.

Relația $\|\vec{x}\cdot\vec{y}\|\le\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|$ implică:

$$\left(1\cdot\sqrt{1-a^2}+1\cdot\sqrt{1-b^2}\right)\le\left(1^2+1^2\right)\left[\left(\sqrt{1-a^2}\right)^2+\left(\sqrt{1-b^2}\right)^2\right]$$

$$\sqrt{1-a^2}+\sqrt{1-b^2}\le\sqrt{2\left(2-a^2-b^2\right)}\quad(1)$$

Deoarece $\sqrt{2\left(2-a^2-b^2\right)}\le 2\sqrt{1-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}\quad(2)$

$$4-2a^2-2b^2\le 4-a^2-b^2-2ab$$

și se ajunge la $(a-b)^2\ge 0$ (adevărat).

Din relațiile (1) și (2) se obține relația din enunț.

2. **E: 17780*/G.M. 6/1979**

Să se arate că: $\frac{\sqrt[n]{4}+\sqrt[n]{9}+\sqrt[n]{16}}{\sqrt[n]{6}+\sqrt[n]{8}+\sqrt[n]{12}}\le\frac{\sqrt[n+1]{6}+\sqrt[n+1]{8}+\sqrt[n+1]{12}}{\sqrt[n+1]{4}+\sqrt[n+1]{9}+\sqrt[n+1]{16}}$

unde $n\ge 2, n\in\mathbb{N}$.

Soluție: Considerăm vectorii $\vec{a}=\left(\sqrt[n]{2};\sqrt[n]{3};\sqrt[n]{4}\right)$ și $\vec{b}=\left(\sqrt[n]{3};\sqrt[n]{4};\sqrt[n]{2}\right)$ și

$\vec{x}=\left(\sqrt[n+1]{2};\sqrt[n+1]{3};\sqrt[n+1]{4}\right)$; $\vec{y}=\left(\sqrt[n+1]{3};\sqrt[n+1]{4};\sqrt[n+1]{2}\right)$.

Deducem succesiv: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{3}+\sqrt[n]{3}\cdot\sqrt[n]{4}+\sqrt[n]{4}\cdot\sqrt[n]{2}=\sqrt[n]{6}+\sqrt[n]{12}+\sqrt[n]{8}$

$$\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|=\sqrt{\left(\sqrt[n]{2}\right)^2+\left(\sqrt[n]{3}\right)^2+\left(\sqrt[n]{4}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(\sqrt[n]{3}\right)^2+\left(\sqrt[n]{4}\right)^2+\left(\sqrt[n]{2}\right)^2}=\sqrt[n+1]{4}+\sqrt[n+1]{9}+\sqrt[n+1]{16}.$$

Membrul stâng al inegalității propuse este:

$$S=\frac{\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|}{\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right|}=\frac{\sqrt[n]{4}+\sqrt[n]{9}+\sqrt[n]{16}}{\sqrt[n]{6}+\sqrt[n]{9}+\sqrt[n]{16}}>1\quad(1)$$

Pe de altă parte: $\vec{x}\cdot\vec{y}=\sqrt[n+1]{2}\cdot\sqrt[n+1]{3}+\sqrt[n+1]{3}\cdot\sqrt[n+1]{4}+\sqrt[n+1]{4}\cdot\sqrt[n+1]{2}=\sqrt[n+1]{6}+\sqrt[n+1]{12}+\sqrt[n+1]{8}$

$$\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|=\sqrt{\left(\sqrt[n+1]{2}\right)^2+\left(\sqrt[n+1]{3}\right)^2+\left(\sqrt[n+1]{4}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(\sqrt[n+1]{3}\right)^2+\left(\sqrt[n+1]{4}\right)^2+\left(\sqrt[n+1]{2}\right)^2}=\sqrt[n+1]{4}+\sqrt[n+1]{9}+\sqrt[n+1]{16}$$

Membrul drept al inegalității propuse este:

$$D=\frac{\left|\vec{x}\cdot\vec{y}\right|}{\left\|\vec{x}\right\|\cdot\left\|\vec{y}\right\|}=\frac{\sqrt[n+1]{6}+\sqrt[n+1]{8}+\sqrt[n+1]{12}}{\sqrt[n+1]{4}+\sqrt[n+1]{9}+\sqrt[n+1]{16}}<1 \quad (2).$$

Din (1) și (2) rezultă inegalitatea din enunț.

3. Să se demonstreze inegalitatea: $\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}\le\sqrt{ab}$

unde $a,b,c>0$ și $a>c$, $b>c$.

Soluție:

Alegem vectorii $\vec{v_1}=\left(\sqrt{c};\sqrt{b-c}\right)$ și $\vec{v_2}=\left(\sqrt{a-c};\sqrt{c}\right)$.

$$\left|\vec{v_1}\cdot\vec{v_2}\right|\le\left\|\vec{v_1}\right\|\cdot\left\|\vec{v_2}\right\|\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{c}\cdot\sqrt{a-c}+\sqrt{b-c}\cdot\sqrt{c}\le\sqrt{\left(\sqrt{c}\right)^2+\left(\sqrt{b-c}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(\sqrt{a-c}\right)^2+\left(\sqrt{c}\right)^2}\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}\le\sqrt{ab}$$

II Probleme de extrem (minime și maxime)

1. Să se demonstreze că, dacă $x_1;x_2;...;x_n$ sunt numere reale, astfel încât:

$$x_1+x_2+....+x_n\ge1$$

atunci

$$n\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2+...+x_n^2\right)\ge1$$

(Olimpiada județeană, Argeș, martie 1993)

Soluție:

Considerăm vectorii: $\vec{a}=(1;1;1;...;1)$, $\vec{b}=\left(x_1;x_2;x_3;...;x_n\right)$, deci:

$$1^2\le\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right|^2\le\left\|\vec{a}\right\|^2\cdot\left\|\vec{b}\right\|^2=\left(1^2+1^2+1^2...+1^2\right)\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2+...+x_n^2\right)$$

Prin urmare: $1\le n\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2+...+x_n^2\right)$

ceea ce este echivalent cu: $\min\left[n\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2+...+x_n^2\right)\right]=1$

2. E:22755/G.M. 2-3/1993

Fie $x,y,z,a\in\mathbb{R}$, astfel încât $x+2y+3z=a$. Să se afle a, astfel încât minimul sumei $x^2+y^2+z^2$ să fie 14.

Soluție:

Să luăm vectorii $\vec{v_1}=(x,y,z)$, $\vec{v_2}=(1,2,3)$

$$\left\|\vec{v_1}\right\|^2\cdot\left\|\vec{v_2}\right\|^2\ge\left(\vec{v_1}\cdot\vec{v_2}\right)^2\Leftrightarrow(x+2y+3z)^2\le\left(1^2+2^2+3^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)\quad(1)$$

Deducem: $x^2+y^2+z^2\ge\frac{a^2}{14}$ (2) cu egalitate pentru $\vec{v_1}=\lambda\cdot\vec{v_2}$ și exprimând rapoartele corespunzătoare coordonatelor, se obține:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x^2}{1^2}=\dfrac{y^2}{2^2}=\dfrac{z^2}{3^2}=k^2=\dfrac{x^2+y^2+z^2}{14}\geq\dfrac{a^2}{14}\\[2ex]\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}=\dfrac{x+2y+3z}{14}\geq\dfrac{a}{14}\end{array}\right.\qquad(3)$$

Deducem: $x=\dfrac{a}{14};y=\dfrac{a}{7};z=\dfrac{3a}{14}$.

Din $\min\left(x^2+y^2+z^2\right)=\dfrac{a^2}{14}=14$, rezultă $a\in\left[-14;14\right]$.

Bibliografie

Victor Tudor, *Probleme de algebră cu rezolvări ingenioase,* Editura Carminis,Pitești , 1999

Art 9100

3. Math Journal

-7-

Marin Chirciu [1]

Mathematical Journal prezintă o selecție de probleme recente din diverse publicații de specialitate .

Problema651.

In ΔABC

$$\sum \frac{r_a}{h_a} \geq \frac{3}{4} \sum \left(\frac{a}{m_a} \right)^2 .$$

Eldeniz Hesenov, Georgia, RMM 6/2020

Soluție

$$\sum \left(\frac{a}{m_a} \right)^2 = \sum \frac{a^2}{m_a^2} \overset{m_a^2 \geq p(p-a)}{\leq} \sum \frac{a^2}{p(p-a)} = \frac{4(R-r)}{r} .$$

$$\sum \frac{a^2}{p(p-a)} = \frac{4(R-r)}{r} \text{ și } \sum \frac{r_a}{h_a} = \frac{2R-r}{r} .$$

Remarcă.

In ΔABC

$$1).\ \sum \frac{h_a}{r_a} \geq \frac{r}{2R} \sum \left(\frac{a}{m_a} \right)^2 .$$

Soluție

$$\sum \left(\frac{a}{m_a} \right)^2 = \sum \frac{a^2}{m_a^2} \overset{m_a^2 \geq p(p-a)}{\leq} \sum \frac{a^2}{p(p-a)} = \frac{4(R-r)}{r} .$$

$$\sum \frac{a^2}{p(p-a)} = \frac{4(R-r)}{r} \text{ și } \sum \frac{h_a}{r_a} = \frac{p^2 + r^2 - 8Rr}{2Rr} .$$

$$2).\ \sum \frac{r_a}{h_a} \geq \frac{3r^2}{R^2} \sum \left(\frac{a}{h_a} \right)^2 .$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

$$\sum \frac{a^2}{h_a^2} = \frac{p^2\left(p^2 - 6r^2 - 8Rr\right) + r^2 (4R + r)^2}{2p^2 r^2} \overset{Gerretsen}{\geq} \frac{4R^2 - 3Rr - 2r^2}{2r^2} .$$

$$\sum \frac{r_a}{h_a} = \frac{2R-r}{r} \text{ și } \sum \frac{a^2}{h_a^2} = \frac{p^2\left(p^2 - 6r^2 - 8Rr\right) + r^2 (4R + r)^2}{2p^2 r^2} .$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema652.

If $x, y, z > 0$, $xy + yz + zx = 3$ then

[1] *Profesor, Colegiul Național „Zinca Golescu"Pitești*

$$\frac{\sum x^3}{\sum x^2}+1\geq\frac{2}{3}\sum x.$$

Kunihiko Chikaya, Japan, Mathematical Inequalities8/2025

Soluție

Folosim pqr -Method.

Notăm $p=\sum x, q=\sum xy=3, r=xyz$.

Avem $\sum x^3=p^3-3pq+3r$ $\sum x^2=p^2-2q$.

Inegalitatea se scrie:

$$\frac{p^3-3pq+3r}{p^2-2q}+1\geq\frac{2}{3}p\overset{q=3}{\Leftrightarrow}\frac{p^3-9p+3r}{p^2-6}+1\geq\frac{2}{3}p\Leftrightarrow p^3+3p^2-15p+9r-18\geq 0,$$

care rezultă din inegalitatea lui Schur $p^3-4pq+9r\geq 0, q=3\Leftrightarrow 9r\geq 12p-p^3$.

Este suficient să arătăm că:

$p^3+3p^2-15p+\left(12p-p^3\right)-18\geq 0\Leftrightarrow p^2-p-6\geq 0\Leftrightarrow (p-3)(p-2)\geq 0$, vezi $p\geq 3$,

adevărată din $p^2=(x+y+z)^2\geq 3(xy+yz+zx)=3\cdot 3=9\Rightarrow p\geq 3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1$.

Remarcă.

1). If $x,y,z>0$, $xy+yz+zx=3$ and $\lambda\leq 1$ then

$$\frac{\sum x^3}{\sum x^2}+\lambda\geq\frac{\lambda+1}{3}\sum x.$$

Soluție

Folosim pqr -Method.

$$\frac{p^3-3pq+3r}{p^2-2q}+\lambda\geq\frac{\lambda+1}{3}p\overset{q=3}{\Leftrightarrow}\frac{p^3-9p+3r}{p^2-6}+\lambda\geq\frac{\lambda+1}{3}p\Leftrightarrow$$

$(2-\lambda)p^3+3\lambda p^2+(6\lambda-21)p+9r-18\lambda\geq 0$,

care rezultă din inegalitatea lui Schur $p^3-4pq+9r\geq 0, q=3\Leftrightarrow 9r\geq 12p-p^3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1$.

2). In ΔABC

$$\frac{\sum\tan^3\frac{A}{2}}{\sum\tan^2\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\geq\frac{2(4R+r)}{3p}.$$

Soluție

Lema.

If $x,y,z>0$, $xy+yz+zx=3$ then

$$\frac{\sum x^3}{\sum x^2}+1\geq\frac{2}{3}\sum x.$$

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=1\Leftrightarrow\sum\sqrt{3}\tan\frac{A}{2}\cdot\sqrt{3}\tan\frac{B}{2}=3$.

Folosind **Lema** pentru $(x,y,z)=\left(\sqrt{3}\tan\frac{A}{2},\sqrt{3}\tan\frac{B}{2},\sqrt{3}\tan\frac{C}{2}\right)$ obținem:

$$\frac{\sum\left(\sqrt{3}\tan\frac{A}{2}\right)^3}{\sum\left(\sqrt{3}\tan\frac{A}{2}\right)^2}+1\geq\frac{2}{3}\sum\sqrt{3}\tan\frac{A}{2}\Leftrightarrow\frac{\sum\tan^3\frac{A}{2}}{\sum\tan^2\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\geq\frac{2(4R+r)}{3p}.$$

3). In acute ΔABC

$$\frac{\sum\cot^3 A}{\sum\cot^2 A}+\frac{1}{\sqrt{3}}\geq\frac{2}{3}\sum\cot A.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum\cot A\cot B=1\Leftrightarrow\sum\sqrt{3}\cot A\cdot\sqrt{3}\cot B=3$.

Folosind **Lema** pentru $(x,y,z)=\left(\sqrt{3}\cot A,\sqrt{3}\cot B,\sqrt{3}\cot C\right)$ obținem:

$$\frac{\sum\left(\sqrt{3}\cot A\right)^3}{\sum\left(\sqrt{3}\cot A\right)^2}+1\geq\frac{2}{3}\sum\sqrt{3}\cot A\Leftrightarrow\frac{\sum\cot^3 A}{\sum\cot^2 A}+\frac{1}{\sqrt{3}}\geq\frac{2}{3}\sum\cot A.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema653.

If $a,b,c>0$, $a^2+b^2+c^2=3$ then

$$\sum\frac{a}{a+bc}\leq\frac{3}{1+abc}.$$

Konstantinos Geronikolas, Greece, Mathematical Inequalities, Problem(220) 6/25

Soluție

$\sum\frac{a}{a+bc}\leq\frac{3}{1+abc}\overset{reverse}{\Leftrightarrow}\sum\frac{bc}{a+bc}\geq\frac{3abc}{1+abc}$, care rezultă din:

$\sum\frac{bc}{a+bc}=\sum\frac{abc}{a^2+abc}\overset{(1)}{\geq}\frac{3abc}{1+abc}$,

unde $\sum\frac{abc}{a^2+abc}\overset{(1)}{\geq}\frac{3abc}{1+abc}\Leftrightarrow\sum\frac{1}{a^2+abc}\geq\frac{3}{1+abc}$, vezi

$\sum\frac{1}{a^2+abc}\overset{CS}{\geq}\frac{9}{\sum\left(a^2+abc\right)}=\frac{9}{\sum a^2+3abc}=\frac{9}{3+3abc}=\frac{3}{1+abc}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarcă.

If $a,b,c>0$, $a^2+b^2+c^2=3$ then

$$\sum\frac{a}{a+\lambda bc}\leq\frac{3}{1+\lambda abc}.$$

Marin Chirciu

Soluție

$\sum\frac{a}{a+\lambda bc}\leq\frac{3}{1+\lambda abc}\overset{reverse}{\Leftrightarrow}\sum\frac{bc}{a+\lambda bc}\geq\frac{3abc}{1+\lambda abc}$, care rezultă din:

$\sum\frac{bc}{a+\lambda bc}=\sum\frac{abc}{a^2+\lambda abc}\overset{(1)}{\geq}\frac{3abc}{1+\lambda abc}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Problema654.

If $a,b,c\geq 1$ then

$$\sum\left(ab-\frac{a+b}{2}\right)^3\geq 3\ln a\ln b\ln c.$$

Kunihiko Chikaya, Japan, MathAtelier 8/25

Soluție

Facem substituția $(a,b,c)=(x+1,y+1,z+1)$, $x,y,z\geq 0$ și folosim : $x\geq\ln(x+1)$, $x\geq 0$.

$$LHS=\sum\left(ab-\frac{a+b}{2}\right)^3=\sum\left((x+1)(y+1)-\frac{x+y+2}{2}\right)^3=\sum\left(xy+\frac{x+y}{2}\right)^3\overset{x,y,z\geq 0}{\geq}\sum\left(\frac{x+y}{2}\right)^3\overset{AG}{\geq}$$

$$\overset{AG}{\geq}\frac{3}{8}\prod(x+y)\overset{Cesaro}{\geq}\frac{3}{8}\cdot 8xyz=3xyz\overset{x\geq\ln(x+1)}{\geq}3\prod\ln(x+1)=3\prod\ln a=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=0\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Remarcă.

If $a,b,c,d\geq 1$ then

$$\sum\left(abc-\frac{ab+bc+ca}{2}\right)^4\geq 4\ln a\ln b\ln c\ln d.$$

Marin Chirciu

Soluție

Facem substituția $(a,b,c,d)=(x+1,y+1,z+1,t+1)$, $x,y,z,t\geq 0$ și vezi: $x\geq\ln(x+1)$, $x\geq 0$.

$$LHS=\sum\left(abc-\frac{ab+bc+ca}{2}\right)^4=\sum\left(\prod(x+1)-\frac{\sum(x+1)(y+1)}{3}\right)^4=$$

$$=\sum\left(xyz+\frac{2}{3}\sum xy+\frac{x+y+z}{3}\right)^4\overset{x,y,z,t\geq 0}{\geq}\sum\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^4\overset{AG}{\geq}\frac{4}{81}\prod(x+y+z)\overset{AG}{\geq}$$

$$\overset{AG}{\geq}\frac{4}{81}\cdot 81xyzt=4xyzt\overset{x\geq\ln(x+1)}{\geq}4\prod\ln(x+1)=4\prod\ln a=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=t=0\Leftrightarrow a=b=c=d=1$.

Problema655.

If $a,b,c>0$, $a^2+b^2+c^2=1$ then find min of

$$P=\sum\frac{a^2}{1+2bc}.$$

THCS8/2025

Soluție

$$P=\sum\frac{a^2}{1+2bc}\geq\sum\frac{a^2}{1+b^2+c^2}=\sum\frac{a^2}{2-a^2}=\sum\frac{x}{2-x}\overset{Jensen}{\geq}\frac{3}{5},$$

unde $\sum\frac{x}{2-x}\overset{Jensen}{\geq}\frac{3}{5}$, $x,y,z\in(0,1)$, $x+y+z=1$ rezultă din:

$$f(x)=\frac{x}{2-x},\ x\in(0,1),\ f'(x)=\frac{2}{(2-x)^2},\ f''(x)=\frac{4}{(2-x)^3}>0\Rightarrow f \text{ este funcție convexă}.$$

$$\sum\frac{x}{2-x}=f(x)+f(y)+f(z)\overset{Jensen}{\geq}3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)=3f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{3}{5}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=\frac{1}{3}\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Deducem că $\min P = \frac{3}{5}$ pentru $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Remarcă.

Let be $\lambda \geq 0$ fixed. If $a,b,c > 0$, $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ then find min of

$$P = \sum \frac{a^2}{\lambda + 2bc}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Obținem că $\min P = \frac{3}{3\lambda + 2}$ pentru $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Problema656.

If $a,b,c,d,e > 0$, $a+b+c+d+e = 5$ then

$$4a^3 + 9b^3 + 144c^3 + 256d^3 + 2304e^3 \geq 125.$$

Crăciun Gheorghe, Mathematical Inequalities8/25

Soluție

$$LHS = 4a^3 + 9b^3 + 144c^3 + 256d^3 + 2304e^3 = \frac{a^3}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{b^3}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} + \frac{c^3}{\left(\frac{1}{12}\right)^2} + \frac{d^3}{\left(\frac{1}{16}\right)^2} + \frac{e^3}{\left(\frac{1}{48}\right)^2} \overset{Radon}{\geq}$$

$$\overset{Radon}{\geq} \frac{(a+b+c+d+e)^3}{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{16} + \frac{1}{48}\right)^2} = \frac{5^3}{1^2} = 125 = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $(a,b,c,d,e) = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{3}, \frac{5}{12}, \frac{5}{16}, \frac{5}{48}\right)$.

Remarcă.

1).If $a,b,c,d,e > 0$, $a+b+c+d+e = 5$ then

$$4a^3 + 16b^3 + 36c^3 + 324d^3 + 1296e^3 \geq 125.$$

Soluție

$$LHS = 4a^3 + 16b^3 + 36c^3 + 324d^3 + 1296e^3 = \frac{a^3}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{b^3}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} + \frac{c^3}{\left(\frac{1}{6}\right)^2} + \frac{d^3}{\left(\frac{1}{18}\right)^2} + \frac{e^3}{\left(\frac{1}{36}\right)^2} \overset{Radon}{\geq}$$

$$\overset{Radon}{\geq} \frac{(a+b+c+d+e)^3}{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18} + \frac{1}{36}\right)^2} = \frac{5^3}{1^2} = 125 = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $(a,b,c,d,e) = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{6}, \frac{5}{18}, \frac{5}{36}\right)$.

2).If $a,b,c,d,e > 0$, $a+b+c+d+e = 5$ then

$$4a^3 + 16b^3 + 64c^3 + 144d^3 + 576e^3 \geq 125.$$

Soluție

$$LHS = 4a^3 + 16b^3 + 64c^3 + 144d^3 + 576e^3 = \frac{a^3}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{b^3}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} + \frac{c^3}{\left(\frac{1}{8}\right)^2} + \frac{d^3}{\left(\frac{1}{12}\right)^2} + \frac{e^3}{\left(\frac{1}{24}\right)^2} \overset{Radon}{\geq}$$

$$\overset{Radon}{\geq} \frac{(a+b+c+d+e)^3}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}\right)^2} = \frac{5^3}{1^2} = 125 = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $(a,b,c,d,e) = \left(\frac{5}{2},\frac{5}{4},\frac{5}{8},\frac{5}{12},\frac{5}{24}\right)$.

3).If $a,b,c,d,e>0$, $a+b+c+d+e=5$ then

$$4a^3+16b^3+49c^3+196d^3+784e^3 \geq 125.$$

Soluție

$$LHS = 4a^3+16b^3+49c^3+196d^3+784e^3 = \frac{a^3}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{b^3}{\left(\frac{1}{4}\right)^2}+\frac{c^3}{\left(\frac{1}{7}\right)^2}+\frac{d^3}{\left(\frac{1}{14}\right)^2}+\frac{e^3}{\left(\frac{1}{28}\right)^2} \overset{Radon}{\geq}$$

$$\overset{Radon}{\geq} \frac{(a+b+c+d+e)^3}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}\right)^2} = \frac{5^3}{1^2} = 125 = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $(a,b,c,d,e) = \left(\frac{5}{2},\frac{5}{4},\frac{5}{7},\frac{5}{14},\frac{5}{28}\right)$.

4). If $a,b,c,d>0$, $a+b+c+d=4$ then

$$a^3+4b^3+9c^3+36d^3 \geq 16.$$

Soluție

$$LHS = a^3+4b^3+9c^3+36d^3 = \frac{a^3}{\left(\frac{1}{1}\right)^2}+\frac{b^3}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{c^3}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}+\frac{d^3}{\left(\frac{1}{6}\right)^2} \overset{Radon}{\geq}$$

$$\overset{Radon}{\geq} \frac{(a+b+c+d)^3}{\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)^2} = \frac{4^3}{2^2} = \frac{64}{4} = 16 = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $(a,b,c,d) = \left(\frac{4}{2},\frac{4}{4},\frac{4}{6},\frac{4}{12}\right) \Leftrightarrow (a,b,c,d) = \left(2,1,\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$

5). If $a,b,c,d>0$, $a+b+c+d=4$ then

$$4a^3+9b^3+81c^3+324d^3 \geq 64.$$

Soluție

$$LHS = 4a^3+9b^3+81c^3+324d^3 = \frac{a^3}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{b^3}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}+\frac{c^3}{\left(\frac{1}{9}\right)^2}+\frac{d^3}{\left(\frac{1}{18}\right)^2} \overset{Radon}{\geq}$$

$$\overset{Radon}{\geq} \frac{(a+b+c+d)^3}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}\right)^2} = \frac{4^3}{1^2} = 64 = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $(a,b,c,d) = \left(\frac{4}{2},\frac{4}{3},\frac{4}{9},\frac{4}{18}\right) \Leftrightarrow (a,b,c,d) = \left(2,\frac{4}{3},\frac{4}{9},\frac{2}{9}\right)$

6). If $a,b,c>0$, $a+b+c=3$ then

$$4a^3+9b^3+36c^3 \geq 27.$$

Soluție

$$LHS=4a^3+9b^3+36c^3=\frac{a^3}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{b^3}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}+\frac{c^3}{\left(\frac{1}{6}\right)^2}\overset{Radon}{\geq}\frac{(a+b+c)^3}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)^2}=\frac{3^3}{1^2}=27=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $(a,b,c)=\left(\frac{3}{2},\frac{3}{3},\frac{3}{6}\right)\Leftrightarrow(a,b,c)=\left(\frac{3}{2},1,\frac{1}{2}\right)$.

Problema657.
In ΔABC

$$\sum\frac{(b+c)^2}{bc}\cos A=5+\frac{2r}{R}.$$

Nguyen Viet Hung , Vietnam, CruxMath, Problem B129

Soluție
Lema.

$$LHS=\sum\frac{(b+c)^2}{bc}\cos A=\sum\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+2\right)\cos A=\sum\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\cos A+2\sum\cos A=$$

$$=3+2\left(1+\frac{r}{R}\right)=5+\frac{2r}{R}=RHS.$$

Am folosit mai sus $\sum\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\cos A=3$ și $\sum\cos A=1+\frac{r}{R}$.

Remarcă.
In ΔABC

$$\sum\frac{b^2+c^2+bc}{bc}\cos A=4+\frac{r}{R}.$$

Marin Chirciu

Problema658.
If $x,y,z>0$, $xy+yz+zx\geq 3$ then

$$\sum\frac{x^2}{\sqrt{8x^2+14xy+3y^2}}\geq\frac{3}{5}.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam, Mathematical Inequalities, Problem(196) 6/25

Soluție
Lema.
If $x,y>0$ then

$$\sqrt{8x^2+14xy+3y^2}\leq 3x+2y.$$

Demonstrație.
$\sqrt{8x^2+14xy+3y^2}\leq 3x+2y\Leftrightarrow 8x^2+14xy+3y^2\leq(3x+2y)^2\Leftrightarrow(x-y)^2\geq 0$.

$$LHS=\sum\frac{x^2}{\sqrt{8x^2+14xy+3y^2}}\overset{Lema}{\geq}\sum\frac{x^2}{3x+2y}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum x\right)^2}{\sum(3x+2y)}=\frac{\left(\sum x\right)^2}{5\sum x}=\frac{1}{5}\sum x\overset{(1)}{\geq}\frac{3}{5}=RHS,$$

unde(1) $\Leftrightarrow\sum x\geq 3$, vezi $\left(\sum x\right)^2\geq 3\sum xy\geq 3\cdot 3=9\Rightarrow\sum x\geq 3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1$.

Remarcă.
If $x,y,z>0$, $xy+yz+zx\geq 3$ and $\lambda\geq 1, n\geq 1$ then

$$\sum \frac{x^2}{\sqrt{(\lambda^2-1)x^2+2(\lambda n+1)xy+(n^2-1)y^2}} \ge \frac{3}{\lambda+n}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Lema.

If $x,y>0$ and $\lambda \ge 1, n \ge 1$ then

$$\sqrt{(\lambda^2-1)x^2+2(\lambda n+1)xy+(n^2-1)y^2} \le \lambda x+ny.$$

Demonstrație.

$\sqrt{(\lambda^2-1)x^2+2(\lambda n+1)xy+(n^2-1)y^2} \le \lambda x+ny \Leftrightarrow$

$(\lambda^2-1)x^2+2(\lambda n+1)xy+(n^2-1)y^2 \le (\lambda x+ny)^2 \Leftrightarrow (x-y)^2 \ge 0.$

Problema659.

If $a,b,c>0$, $abc=1$ then

$$\sum \frac{a^3}{\sqrt{a^2+2a+bc}} \ge \frac{3}{2}.$$

Konstantinos Geronikolas, Greece, Mathematical Inequalities, Problem(196) 6/25

Soluție

$$LHS=\sum \frac{a^3}{\sqrt{a^2+2a+bc}}=\sum \frac{a^4}{a\sqrt{a^2+2a+bc}} \overset{CS}{\ge} \frac{\left(\sum a^2\right)^2}{\sum a\sqrt{a^2+2a+bc}} \overset{CBS}{\ge} \frac{\left(\sum a^2\right)^2}{2\sum a^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum a^2 \overset{AG}{\ge} \frac{3}{2}=RHS.$$

Am folosit mai sus(CBS): $\sum a\sqrt{a^2+2a+bc} \le 2\sum a^2$, vezi:

$$\sum a\sqrt{a^2+2a+bc} \overset{CBS}{\le} \sqrt{\sum a^2 \sum (a^2+2a+bc)} \overset{(1)}{\le} \sqrt{\sum a^2 \left(\sum a^2+2\sum a^2+\sum a^2\right)}=$$

$=\sqrt{\sum a^2 \cdot 4\sum a^2}=2\sum a^2$, unde (1) rezultă din:

1). $\sum a \le \sum a^2$, vezi $\sum a^2 \overset{CS}{\ge} \frac{\left(\sum a\right)^2}{3}=\sum a \cdot \frac{\sum a}{3} \overset{AG}{\ge} \sum a \cdot \sqrt[3]{abc}=\sum a \cdot 1=\sum a$;

2). $\sum ab \le \sum a^2 \Leftrightarrow \sum (a-b)^2 \ge 0$.

(CBS): $\sum a^2 \overset{AG}{\ge} 3$, vezi $\sum a^2 \overset{AG}{\ge} 3\sqrt[3]{(abc)^2} \overset{abc=1}{=} 3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarcă.

If $a,b,c>0$, $abc=1$ and $\lambda \ge 0$ then

$$\sum \frac{a^3}{\sqrt{a^2+2\lambda a+bc}} \ge \frac{3}{\sqrt{2(\lambda+1)}}.$$

Marin Chirciu

Soluție

$$LHS=\sum \frac{a^3}{\sqrt{a^2+2\lambda a+bc}}=\sum \frac{a^4}{a\sqrt{a^2+2\lambda a+bc}} \overset{CS}{\ge} \frac{\left(\sum a^2\right)^2}{\sum a\sqrt{a^2+2\lambda a+bc}} \overset{CBS}{\ge} \frac{\left(\sum a^2\right)^2}{\sqrt{2(\lambda+1)}\sum a^2}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2(\lambda+1)}}\sum a^2 \overset{AG}{\geq} \frac{3}{\sqrt{2(\lambda+1)}} = RHS.$$

Am folosit mai sus(CBS): $\sum a\sqrt{a^2+2\lambda a+bc} \leq \sqrt{2(\lambda+1)}\sum a^2$.

Problema 660.

In ΔABC

$$\sum a\sqrt{r_b r_c} \leq 3R\sqrt{3(3R^2-r^2)}.$$

Kostas Geronikolas, Greece, Mathematical Inequalities, Problem(397) 6/20

Soluție

$$LHS = \sum a\sqrt{r_b r_c} \overset{CBS}{\leq} \sqrt{\sum a^2 \sum r_b r_c} \overset{Leibniz}{\leq} \sqrt{9R^2 p^2} = 3Rp \leq 3R\sqrt{3(3R^2-r^2)} = RHS.$$

Am folosit mai sus inegalitatea lui Leibniz $\sum a^2 \leq 9R^2$ și $\sum r_b r_c = p^2$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

In ΔABC

$$6F \leq \sum a\sqrt{r_b r_c} \leq \frac{9R^2\sqrt{3}}{2}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum a\sqrt{r_b r_c} \overset{CBS}{\leq} \sqrt{\sum a^2 \sum r_b r_c} \overset{Leibniz}{\leq} \sqrt{9R^2 p^2} = 3Rp \overset{Leibniz}{\leq} 3R\frac{3R\sqrt{3}}{2} = \frac{9R^2\sqrt{3}}{2}.$$

Inegalitatea din stânga.

$$\sum a\sqrt{r_b r_c} \overset{AG}{\geq} 3\sqrt[3]{\prod a\sqrt{r_b r_c}} = 3\sqrt[3]{abcr_a r_b r_c} = 3\sqrt[3]{4Rrp\cdot rp^2} = 3p\sqrt[3]{4Rr^2} \overset{Euler}{\geq} 3p\sqrt[3]{4\cdot 2rr^2} =$$

$$= 3p\cdot 2r = 6F.$$

Problema 661.

In ΔABC

$$1).\ \sum \frac{bc}{s_a^2} \geq \frac{8r}{R}.$$

Soluție

$$LHS = \sum \frac{bc}{s_a^2} \geq \sum \frac{bc}{m_a^2} \overset{Panaitopol}{\geq} \sum \frac{bc}{\left(\frac{Rp}{a}\right)^2} = \frac{1}{R^2p^2}\sum a^2 bc = \frac{1}{p^2R^2}\cdot abc\sum a = \frac{8r}{R} = RHS.$$

$$2).\ \sum \frac{a(b+c)}{s_a^2} \geq \frac{16r}{R}.$$

Marin Chirciu, IneMath,8/25

Soluție

$$LHS = \sum \frac{a(b+c)}{s_a^2} \geq \sum \frac{a(b+c)}{m_a^2} \overset{Panaitopol}{\geq} \sum \frac{bc}{\left(\frac{Rp}{a}\right)^2} = \frac{1}{R^2p^2}\sum a^3(b+c) =$$

$$= \frac{1}{p^2R^2}\cdot 2\left[p^2\left(p^2-4Rr\right)-r^2(4R+r)^2\right] = 2\left[\frac{p^2-4Rr}{R^2} - \frac{r^2(4R+r)^2}{p^2R^2}\right] \overset{Gerretsen}{\geq} \frac{16r}{R} = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema662.
In ΔABC

$$1).\ \sum \frac{bc}{w_a^2} \geq \frac{8r}{R}.$$

Soluţie

$$LHS = \sum \frac{bc}{w_a^2} \geq \sum \frac{bc}{m_a^2} \overset{Panaitopol}{\geq} \sum \frac{bc}{\left(\frac{Rp}{a}\right)^2} = \frac{1}{R^2p^2}\sum a^2bc = \frac{1}{p^2R^2}\cdot abc\sum a = \frac{8r}{R} = RHS.$$

$$2).\ \sum \frac{a(b+c)}{w_a^2} \geq \frac{16r}{R}.$$

Marin Chirciu, IneMath,8/25

Soluţie

$$LHS = \sum \frac{a(b+c)}{w_a^2} \geq \sum \frac{a(b+c)}{m_a^2} \overset{Panaitopol}{\geq} \sum \frac{bc}{\left(\frac{Rp}{a}\right)^2} = \frac{1}{R^2p^2}\sum a^3(b+c) =$$

$$= \frac{1}{p^2R^2}\cdot 2\left[p^2\left(p^2-4Rr\right)-r^2\left(4R+r\right)^2\right] = 2\left[\frac{p^2-4Rr}{R^2} - \frac{r^2\left(4R+r\right)^2}{p^2R^2}\right] \overset{Gerretsen}{\geq} \frac{16r}{R}.$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema663.
In ΔABC

$$1).\ \sum \frac{bc}{m_a^2} \geq \frac{8r}{R}.$$

Soluţie

$$LHS = \sum \frac{bc}{m_a^2} \overset{Panaitopol}{\geq} \sum \frac{bc}{\left(\frac{Rp}{a}\right)^2} = \frac{1}{R^2p^2}\sum a^2bc = \frac{1}{p^2R^2}\cdot abc\sum a = \frac{8r}{R} = RHS.$$

$$2).\ \sum \frac{a(b+c)}{m_a^2} \geq \frac{16r}{R}.$$

Marin Chirciu, IneMath,8/25

Soluţie

$$LHS = \sum \frac{a(b+c)}{m_a^2} \overset{Panaitopol}{\geq} \sum \frac{bc}{\left(\frac{Rp}{a}\right)^2} = \frac{1}{R^2p^2}\sum a^3(b+c) = \frac{1}{p^2R^2}\cdot 2\left[p^2\left(p^2-4Rr\right)-r^2\left(4R+r\right)^2\right] =$$

$$= 2\left[\frac{p^2-4Rr}{R^2} - \frac{r^2\left(4R+r\right)^2}{p^2R^2}\right] \overset{Gerretsen}{\geq} 2\left[\frac{16Rr-5r^2-4Rr}{R^2} - \frac{r^2\left(4R+r\right)^2}{\frac{r\left(4R+r\right)^2}{R+r}R^2}\right] \geq \frac{16r}{R}.$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema664.
In ΔABC

$$\sum \frac{bc}{r_a^2} \geq 4.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam, Mathematical Inequalities8/25

Soluție

$$LHS = \sum \frac{bc}{r_a^2} = \sum \frac{bc}{\left(\frac{S}{p-a}\right)^2} = \frac{1}{S^2}\sum (p-a)^2 bc = \frac{1}{p^2r^2}\cdot p^2\left(p^2+r^2-12Rr\right) =$$

$$= \frac{p^2+r^2-12Rr}{r^2} \overset{Gerretsen}{\geq} \frac{16Rr-5r^2+r^2-12Rr}{r^2} = \frac{4Rr-4r^2}{r^2} = \frac{4(R-r)}{r} \overset{Euler}{\geq} 4 = RHS.$$

Remarcă.

In ΔABC

$$\sum \frac{a(b+c)}{r_a^2} \geq 8.$$

Marin Chirciu

Soluție

$$LHS = \sum \frac{a(b+c)}{r_a^2} = \sum \frac{a(b+c)}{\left(\frac{S}{p-a}\right)^2} = \frac{1}{S^2}\sum a(b+c)(p-a)^2 = \frac{1}{p^2r^2}2r\left[p^2(4R-r) - r(4R+r)^2\right] =$$

$$= \frac{2p^2(4R-r)-2r(4R+r)^2}{p^2r} = \frac{2(4R-r)}{r} - \frac{2(4R+r)^2}{p^2} \overset{Gerretsen}{\geq} \frac{2(4R-r)}{r} - \frac{2(4R+r)^2}{\frac{r(4R+r)^2}{R+r}} =$$

$$= \frac{2(4R-r)}{r} - \frac{2(R+r)}{r} = \frac{6R-4r}{r} \overset{Euler}{\geq} \frac{6\cdot 2r-4r}{r} = 8 = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema665.

In ΔABC

$$\sum \frac{bc}{h_a^2} \geq 4.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam, Mathematical Inequalities8/25

Soluție

$$LHS = \sum \frac{bc}{h_a^2} = \sum \frac{bc}{\left(\frac{2S}{a}\right)^2} = \frac{1}{4S^2}\sum a^2bc = \frac{1}{4p^2r^2}\cdot abc\sum a = \frac{2R}{r} \overset{Euler}{\geq} 4 = RHS.$$

Remarcă.

In ΔABC

$$\sum \frac{a(b+c)}{h_a^2} \geq 8.$$

Marin Chirciu

Problema666.

If $a,b,c>0$ then

$$\sum \frac{a}{8a^2+5b^2+3c^2} \leq \frac{1}{16}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Titu Zvonaru, Comănești, Bacău, Concurs„Vranceanu-Procopiu„Bacău-2012

Soluție

$$LHS=\sum\frac{a}{8a^2+5b^2+3c^2}\overset{AG}{\le}\sum\frac{a}{16\sqrt[16]{a^{16}b^{10}c^6}}=\sum\frac{a}{16\sqrt[8]{a^8b^5c^3}}=\sum\frac{1}{16\sqrt[8]{b^5c^3}}\overset{(1)}{\le}\frac{1}{16}\sum\frac{1}{a}=RHS,$$

unde $\sum\frac{1}{\sqrt[8]{b^5c^3}}\overset{(1)}{\le}\sum\frac{1}{a}$ rezultă din:

Cu substituția $\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\right)=\left(x^8,y^8,z^8\right)$ inegalitatea $\sum\frac{1}{\sqrt[8]{b^5c^3}}\le\sum\frac{1}{a}$ se scrie:

$x^8+y^8+z^8\ge x^5y^3+y^5z^3+z^5x^3$, vezi inegalitatea lui Muirhead $(8,0,0)\succ(5,3,0)$,

$8+0\ge5+0, 8+0\ge5+3, 8+0+0=5+3+0$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

Remarcă.

If $a,b,c>0$ and $n,k\in\mathbf{N}^*, n\ge k$ then

$$\sum\frac{a}{(n+k)a^2+nb^2+kc^2}\le\frac{1}{2(n+k)}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Marin Chirciu

Problema667.

In ΔABC

$$\sum\frac{h_a}{\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}}\ge3\sqrt{3}r.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam, Mathematical Inequalities8/25

Soluție

$$LHS=\sum\frac{h_a}{\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}}\overset{Chebyshev}{\ge}\frac{1}{3}\sum h_a\sum\frac{1}{\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}}\overset{CS}{\ge}\frac{1}{3}\cdot9r\cdot\frac{9}{\sum\left(\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\right)}=$$

$$=3r\cdot\frac{9}{2\sum\cos\frac{A}{2}}\overset{Jensen}{\ge}3r\cdot\frac{9}{2\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}}=3\sqrt{3}r=RHS.$$

Remarcă.

In ΔABC

$$\sum\frac{h_b+h_c}{\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}}\ge6\sqrt{3}r\left(\frac{2r}{R}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Marin Chirciu

Soluție

$$LHS=\sum\frac{h_b+h_c}{\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}}\overset{AG}{\ge}3\sqrt[3]{\prod\frac{h_b+h_c}{\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}}}=3\sqrt[3]{\frac{\prod(h_b+h_c)}{\prod\left(\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\right)}}=$$

$$=\frac{3\sqrt[3]{\prod(h_b+h_b)}}{\sqrt[3]{\prod\left(\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\right)}}\overset{AG}{\geq}\frac{3\sqrt[3]{8\prod h_a}}{\frac{\sum\left(\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\right)}{3}}=\frac{9\cdot 2\sqrt[3]{\frac{2r^2p^2}{R}}}{2\sum\cos\frac{A}{2}}\overset{Mitrinovic\&Euler}{\geq}$$

$$\overset{Mitrinovic\&Euler}{\geq}\frac{9\cdot 2\sqrt[3]{\frac{2r^2\cdot 27r^2}{R}}}{2\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{3}\cdot 2\sqrt[3]{\frac{2\cdot 27r^4}{R}}=\sqrt{3}\cdot 2\cdot 3r\sqrt[3]{\frac{2r}{R}}=6\sqrt{3}r\left(\frac{2r}{R}\right)^{\frac{1}{3}}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema668.

In ΔABC

$$\sum\frac{h_a}{\cos B+\cos C}\geq 9r.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam, Mathematical Inequalities8/25

Soluție

$$LHS=\sum\frac{h_a}{\cos B+\cos C}\overset{Chebyshev}{\geq}\frac{1}{3}\sum h_a\sum\frac{1}{\cos B+\cos C}\overset{CS}{\geq}\frac{1}{3}\cdot 9r\cdot\frac{9}{\sum(\cos B+\cos C)}=$$

$$=3r\cdot\frac{9}{2\sum\cos A}\geq 3r\cdot\frac{9}{2\cdot\frac{3}{2}}=9r=RHS.$$

Remarcă.

In ΔABC

$$\sum\frac{h_b+h_b}{\cos B+\cos C}\geq 18r\left(\frac{2r}{R}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Marin Chirciu

Problema669.

If $a,b>0$, $a+b=2a^2b^2$ then

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\geq 2.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam,RMM8/25

Soluție

Lema.

If $a,b>0$, $a+b=2a^2b^2$ then

$$a+b\geq 2.$$

Demonstrație

$$a+b=2a^2b^2\overset{ab\leq\frac{(a+b)^2}{4}}{\leq}2\left(\frac{(a+b)^2}{4}\right)^2=\frac{(a+b)^4}{8}\Rightarrow a+b\leq\frac{(a+b)^4}{8}\Rightarrow(a+b)^3\geq 8\Rightarrow a+b\geq 2.$$

$$LHS=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}\overset{a+b=2a^2b^2}{=}\frac{a^2+b^2}{\frac{a+b}{2}}=\frac{2(a^2+b^2)}{a+b}\overset{CS}{\geq}\frac{(a+b)^2}{a+b}=a+b\overset{Lema}{\geq}2=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=1$.

Remarcă.

If $a,b>0$, $a+b=2a^nb^n$, $n\in\mathbf{N}$ then

$$\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}\geq 2.$$

Marin Chirciu

Soluție

Dacă $n=0$ se obține egalitatea 2=2.

Pentru $n=1$ avem $a+b=2ab\Rightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq 2$, evident cu egal.

În continuare fie $n\in\mathbf{N}, n\geq 2$.

Lema.

If $a,b>0$, $a+b=2a^nb^n$, $n\geq 1$ then

$$a+b\geq 2.$$

Demonstrație

$$a+b=2a^nb^n\overset{ab\leq\frac{(a+b)^2}{4}}{\leq}2\left(\frac{(a+b)^2}{4}\right)^n=\frac{(a+b)^{2n}}{2^{2n-1}}\Rightarrow a+b\leq\frac{(a+b)^{2n}}{2^{2n-1}}\Rightarrow(a+b)^{2n-1}\geq 2^{2n-1}\Rightarrow$$

$$a+b\geq 2.$$

$$LHS=\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}=\frac{a^n+b^n}{a^nb^n}\overset{a+b=2a^nb^n}{=}\frac{a^n+b^n}{\frac{a+b}{2}}=\frac{2(a^n+b^n)}{a+b}\overset{Holder}{\geq}\frac{2\cdot\frac{(a+b)^n}{2^{n-1}}}{a+b}=\frac{(a+b)^{n-1}}{2^{n-2}}\overset{Lema}{\geq}$$

$$\overset{Lema}{\geq}\frac{2^{n-1}}{2^{n-2}}=2=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=1$.

Problema670.

In ΔABC hods:

$$\prod\left(w_bw_c+2a^2\right)\geq 144\sqrt{3}F^3.$$

D.M.Bătinețu-Giurgiu, Mihaly Bencze, RMM, Problema195

Soluție

Lema

If $a,b,c,t\geq 0$

$$\prod\left(a^2+t\right)\geq\frac{3}{4}(a+b+c)^2t^2.$$

Hojoo Lee Inequality

Demonstrație

Demonstrăm mai întâi inegalitatea:

If $a,b,t\geq 0$

$$\left(a^2+t\right)\left(b^2+t\right)\geq\frac{3}{4}t\left(t+(a+b)^2\right),(*).$$

Într-adevăr:

Avem $\left(a^2+t\right)\left(b^2+t\right)\geq\frac{3}{4}t\left(t+(a+b)^2\right)\Leftrightarrow 4\left(a^2+t\right)\left(b^2+t\right)\geq 3t\left(t+a^2+b^2+2ab\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t\left(a^2+b^2-2ab\right)+t^2-2abt+4a^2b^2\geq 0\Leftrightarrow t(a-b)^2+(t-2ab)^2\geq 0$,

cu egalitate pentru $a=b$ și $t=2ab$.

În continuare obținem:

$\left(a^2+t\right)\left(b^2+t\right)\left(c^2+t\right)\overset{(*)}{\geq}\frac{3}{4}t\left(t+(a+b)^2\right)\left(c^2+t\right)\overset{(1)}{\geq}\frac{3}{4}(a+b+c)^2t^2$, unde (1) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{3}{4}t\left(t+(a+b)^2\right)\left(c^2+t\right)\geq\frac{3}{4}(a+b+c)^2t^2 \Leftrightarrow \left(t+(a+b)^2\right)\left(c^2+t\right)\geq(a+b+c)^2t \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(t-a(b+c)\right)^2\geq 0$, cu egalitate pentru $t=a(b+c)$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=\frac{t}{\sqrt{2}}$.

$$LHS=\prod\left(w_bw_c+2a^2\right)=\prod a^2\prod\left(\frac{w_bw_c}{a^2}+2\right)\overset{HojooLee}{\geq}(abc)^2\cdot\frac{3}{4}\cdot 4\left(\sum\frac{\sqrt{w_bw_c}}{a}\right)^2\overset{AG}{\geq}$$

$$\overset{AG}{\geq}(abc)^2\cdot 3\cdot\left(6F(abc)^{\frac{-2}{3}}\right)^2=108F^2(abc)^{\frac{2}{3}}\overset{Carlitz}{\geq}108F^2\cdot\frac{4F}{\sqrt{3}}=144\sqrt{3}F^3=RHS.$$

Am folosit mai sus:

$$\sum\frac{\sqrt{w_bw_c}}{a}\geq\sum\frac{\sqrt{h_bh_c}}{a}=\sum\frac{\sqrt{\frac{2F}{b}\frac{2F}{c}}}{a}=2F\sum\frac{1}{a\sqrt{bc}}\overset{AG}{\geq}2F\cdot 3\sqrt[3]{\frac{1}{(abc)^2}}=6F(abc)^{\frac{-2}{3}}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $\frac{\sqrt{w_bw_c}}{a}=\frac{\sqrt{w_cw_a}}{b}=\frac{\sqrt{w_aw_b}}{c}=\frac{2}{\sqrt{2}}, a=b=c$.

Remarcă.

In ΔABC hods:

$$1).\ \prod\left(w_bw_c+\lambda a^2\right)\geq 36\lambda^2\sqrt{3}F^3.$$

Soluție

$$LHS=\prod\left(w_bw_c+\lambda a^2\right)=\prod a^2\prod\left(\frac{w_bw_c}{a^2}+\lambda\right)\overset{HojooLee}{\geq}(abc)^2\cdot\frac{3}{4}\cdot\lambda^2\left(\sum\frac{\sqrt{w_bw_c}}{a}\right)^2\overset{AG}{\geq}$$

$$\overset{AG}{\geq}(abc)^2\cdot\frac{3\lambda^2}{4}\cdot\left(6F(abc)^{\frac{-2}{3}}\right)^2=27\lambda^2F^2(abc)^{\frac{2}{3}}\overset{Carlitz}{\geq}27\lambda^2F^2\cdot\frac{4F}{\sqrt{3}}=36\lambda^2\sqrt{3}F^3=RHS.$$

$$2).\ \prod\left(h_bh_c+\lambda a^2\right)\geq 36\lambda^2\sqrt{3}F^3.$$

Soluție

$$LHS=\prod\left(h_bh_c+\lambda a^2\right)=\prod a^2\prod\left(\frac{h_bh_c}{a^2}+\lambda\right)\overset{HojooLee}{\geq}(abc)^2\cdot\frac{3}{4}\cdot\lambda^2\left(\sum\frac{\sqrt{h_bh_c}}{a}\right)^2\overset{AG}{\geq}$$

$$\overset{AG}{\geq}(abc)^2\cdot\frac{3\lambda^2}{4}\cdot\left(6F(abc)^{\frac{-2}{3}}\right)^2=27\lambda^2F^2(abc)^{\frac{2}{3}}\overset{Carlitz}{\geq}27\lambda^2F^2\cdot\frac{4F}{\sqrt{3}}=36\lambda^2\sqrt{3}F^3=RHS.$$

$$3)\ \prod\left(m_bm_c+\lambda a^2\right)\geq 36\lambda^2\sqrt{3}F^3.$$

Soluție

$$LHS=\prod\left(m_bm_c+\lambda a^2\right)=\prod a^2\prod\left(\frac{m_bm_c}{a^2}+\lambda\right)\overset{HojooLee}{\geq}(abc)^2\cdot\frac{3}{4}\cdot\lambda^2\left(\sum\frac{\sqrt{m_bm_c}}{a}\right)^2\overset{AG}{\geq}$$

$$\overset{AG}{\geq}(abc)^2\cdot\frac{3\lambda^2}{4}\cdot\left(6F(abc)^{\frac{-2}{3}}\right)^2=27\lambda^2F^2(abc)^{\frac{2}{3}}\overset{Carlitz}{\geq}27\lambda^2F^2\cdot\frac{4F}{\sqrt{3}}=36\lambda^2\sqrt{3}F^3=RHS.$$

$$4).\prod\left(s_bs_c+\lambda a^2\right)\geq 36\lambda^2\sqrt{3}F^3.$$

Dezvoltări,Marin Chirciu

Soluție

$$LHS=\prod\left(s_bs_c+\lambda a^2\right)=\prod a^2\prod\left(\frac{s_bs_c}{a^2}+\lambda\right)\overset{HojooLee}{\geq}(abc)^2\cdot\frac{3}{4}\cdot\lambda^2\left(\sum\frac{\sqrt{s_bs_c}}{a}\right)^2\overset{AG}{\geq}$$

$$\overset{AG}{\geq}(abc)^2\cdot\frac{3\lambda^2}{4}\cdot\left(6F(abc)^{\frac{-2}{3}}\right)^2=27\lambda^2F^2(abc)^{\frac{2}{3}}\overset{Carlitz}{\geq}27\lambda^2F^2\cdot\frac{4F}{\sqrt{3}}=36\lambda^2\sqrt{3}F^3=RHS.$$

Problema671.

If $x,y,z>0,x+y+z=3$ then

$$\sum\frac{x}{x^2+4x+2}\leq\frac{3}{6+xyz}.$$

Konstantinos Geronikolas, Greece, Mathematical Inequalities, Problem(235) 8/25

Soluție

$$\sum\frac{x}{x^2+4x+2}=\sum\frac{x}{\left(x^2+1\right)+4x+1}\overset{AG}{\leq}\sum\frac{x}{2x+4x+1}=\sum\frac{x}{6x+1}\overset{Jensen}{\leq}\frac{3}{7}\overset{xyz\leq 1}{\leq}\frac{3}{6+xyz}.$$

Am folosit mai sus $\sum\frac{x}{6x+1}\overset{Jensen}{\leq}\frac{3}{7}$ și $xyz\leq 1$, vezi:

1). $f(x)=\frac{x}{6x+1},x>0,f'(x)=\frac{1}{(6x+1)^2}>0,f''(x)=\frac{-12}{(6x+1)^3}<0\Rightarrow f$ este concavă.

$$\sum\frac{x}{6x+1}=f(x)+f(y)+f(z)\overset{Jensen}{\leq}3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)=3f(1)=\frac{3}{7};$$

2). $3=x+y+z\overset{AG}{\geq}3\sqrt[3]{xyz}\Rightarrow xyz\leq 1$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1$.

Remarcă.

1).If $x,y,z>0,x+y+z=3$ and $\lambda\geq 1$ then

$$\sum\frac{x}{x^2+4x+\lambda}\leq\frac{3}{\lambda+4+xyz}.$$

Soluție

$$LHS=\sum\frac{x}{x^2+4x+\lambda}=\sum\frac{x}{\left(x^2+1\right)+4x+\lambda-1}\overset{AG}{\leq}\sum\frac{x}{2x+4x+\lambda-1}=\sum\frac{x}{6x+\lambda-1}\overset{Jensen}{\leq}$$

$$\overset{Jensen}{\leq}\frac{3}{\lambda+5}\overset{xyz\leq 1}{\leq}\frac{3}{\lambda+4+xyz}=RHS.$$

2). If $x,y,z>0,x+y+z=3$ then

$$\sum\frac{x}{x^2+4x+1}\leq\frac{3}{5+xyz}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție

Cazul $\lambda=1$ în inegalitatea de mai sus.

Problema672.

If $x,y,z\geq 0,x+y+z=1$ then

$$\sum\frac{1}{1+x}\leq\frac{5}{2};$$

Soluție

Folosim pqr -Method.

Notăm $p=\sum x=1, q=\sum xy, r=xyz$.

$$LHS=\sum\frac{1}{1+x}=\frac{\sum(1+y)(1+z)}{\prod(1+x)}=\frac{3+2p+q}{1+p+q+r}\overset{p=1}{=}\frac{5+q}{2+q+r}\overset{(1)}{\le}\frac{5}{2}=RHS$$, unde

$$\frac{5+q}{2+q+r}\overset{(1)}{\le}\frac{5}{2}\Leftrightarrow 2(5+q)\le 5(2+q+r)\Leftrightarrow 3q+5r\ge 0$$, evident.

Remarcă.

1). If $x,y,z>0, xy+yz+zx=3$ then

$$\sum\frac{1}{1+x}\ge\frac{3}{2}.$$

Soluție

Folosim pqr -Method.

Notăm $p=\sum x, q=\sum xy=3, r=xyz$.

$$LHS=\sum\frac{1}{1+x}=\frac{\sum(1+y)(1+z)}{\prod(1+x)}=\frac{3+2p+q}{1+p+q+r}\overset{q=3}{=}\frac{6+2p}{4+p+r}\overset{(1)}{\ge}\frac{3}{2}=RHS$$, unde

$$\frac{6+2p}{4+p+r}\overset{(1)}{\ge}\frac{3}{2}\Leftrightarrow 2(6+2p)\ge 3(4+p+r)\Leftrightarrow p\ge 3r$$, care rezultă din : $r\le 1$,vezi

$$3=q=\sum xyz\overset{AG}{\ge}3\sqrt[3]{(xyz)^2}=3\sqrt[3]{r^2}\Rightarrow r\le 1.$$

Este suficient să arătăm că:

$p\ge 3$, care rezultă din $p^2=\left(\sum x\right)^2\ge 3\sum xy=3\cdot 3=9\Rightarrow p\ge 3$.

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $x=y=z=1$.

2). If $x,y,z>0, xy+yz+zx=3$ and $0\le\lambda\le 2$ then

$$\sum\frac{1}{\lambda+x}\ge\frac{3}{\lambda+1}.$$

3). If $x,y,z>0, xy+yz+zx=3$ then

$$\sum\frac{1}{2+x}\ge 1.$$

Soluție

Cazul $\lambda=2$ în inegalitatea de mai sus.

4). In ΔABC

$$\sum\frac{1}{1+\sqrt{3}\tan\frac{A}{2}}\ge\frac{3}{2}.$$

Lema.

If $x,y,z>0, xy+yz+zx=3$ then

$$\sum\frac{1}{1+x}\ge\frac{3}{2}.$$

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=1\Leftrightarrow\sum\sqrt{3}\tan\frac{A}{2}\cdot\sqrt{3}\tan\frac{B}{2}=3$.

Folosind **Lema** pentru $(x,y,z)=\left(\sqrt{3}\tan\frac{A}{2},\sqrt{3}\tan\frac{B}{2},\sqrt{3}\tan\frac{C}{2}\right)$ obținem:

$$\sum\frac{1}{1+\sqrt{3}\tan\frac{A}{2}}\ge\frac{3}{2}.$$

5). In acute ΔABC

$$\sum\frac{1}{1+\sqrt{3}\cot A}\ge\frac{3}{2}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Lema.

If $x,y,z>0$, $xy+yz+zx=3$ then

$$\sum\frac{1}{1+x}\ge\frac{3}{2}.$$

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum\cot A\cot B=1\Leftrightarrow\sum\sqrt{3}\cot A\cdot\sqrt{3}\cot B=3$.

Folosind **Lema** pentru $(x,y,z)=\left(\sqrt{3}\cot A,\sqrt{3}\cot B,\sqrt{3}\cot C\right)$ obținem:

$$\sum\frac{1}{1+\sqrt{3}\cot A}\ge\frac{3}{2}.$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema673.

If $a,b,c>0$, $a^2+b^2+c^2+abc=4$ then

$$\text{a). } \prod(2+a)\ge27\prod(2-a);$$

$$\text{b). } \sum\sqrt{\frac{2-a}{2+a}}\ge\sqrt{3}.$$

Nguyen Viet Hung, Vietnam, Mathematical Inequalities 8/2025

Soluție

Cu substituția $(a,b,c)=(2\cos A,2\cos B,2\cos C)$, ΔABC acute obținem:

a). $\prod(2+2\cos A)\ge27\prod(2-2\cos A)\Leftrightarrow\prod\frac{1+\cos A}{1-\cos A}\ge27\Leftrightarrow\prod\frac{\cos^2\frac{A}{2}}{\sin^2\frac{A}{2}}\ge27\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\prod\cot^2\frac{A}{2}\ge27\Leftrightarrow\frac{p^2}{r^2}\ge27$, care ezultă din inegalitatea lui Mitrinovic $p\ge3r\sqrt{3}$.

b). $\sum\sqrt{\frac{2-2\cos A}{2+2\cos A}}\ge\sqrt{3}\Leftrightarrow\sum\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}\ge\sqrt{3}\Leftrightarrow\sum\sqrt{\frac{2\sin^2\frac{A}{2}}{2\cos^2\frac{A}{2}}}\ge\sqrt{3}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sum\sqrt{\tan^2\frac{A}{2}}\ge\sqrt{3}\Leftrightarrow\sum\tan\frac{A}{2}\ge\sqrt{3}$, care rezultă din $\sum\tan\frac{A}{2}=\frac{4R+r}{p}\overset{Doucet}{\ge}\sqrt{3}$.

Remarcă.

1). If $a,b,c>0$, $a^2+b^2+c^2+abc=4$ then

$$\sum\sqrt{\frac{2+a}{2-a}}\ge3\sqrt{3}.$$

2). If $a,b,c>0$, $a^2+b^2+c^2+abc=4$ then

$$\sum\frac{2+a}{2-a}\geq 9.$$

Soluție

Cu substituția $(a,b,c)=(2\cos A,2\cos B,2\cos C)$, ΔABC acute obținem:

$$LHS=\sum\frac{2+a}{2-a}=\sum\frac{2+2\cos A}{2-2\cos A}=\sum\frac{1+\cos A}{1-\cos A}=\sum\frac{2\cos^2\frac{A}{2}}{2\sin^2\frac{A}{2}}=\sum\cot^2\frac{A}{2}=\frac{p^2-2r^2-8Rr}{r^2}\overset{Gerretsen}{\geq}$$

$$\overset{Gerretsen}{\geq}\frac{16Rr-5r^2-2r^2-8Rr}{r^2}=\frac{8Rr-7r^2}{r^2}=\frac{8R-7r}{r}\overset{Euler}{\geq}9=RHS.$$

3). If $a,b,c>0$, $a^2+b^2+c^2+abc=4$ then

$$\sum\frac{2-a}{2+a}\geq 1.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema674.

In ΔABC

$$\sum\left(\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)^{\frac{a}{b+c}}\geq 2.$$

Dorin Marghidanu, Corabia, Olt, Mathematical Inequalities8/25

Soluție

În ΔABC avem $\frac{a}{b+c},\frac{b}{c+a},\frac{c}{a+b}\in(0,1)$ și folosim

Lema.(Dorin Marghidanu).

If $u>0, v\in(0,1)$ then $u^v>\frac{u}{u+v}$.

$$LHS=\sum\left(\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)^{\frac{a}{b+c}}\overset{Lema}{\geq}\frac{\sum\left(\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)}{\sum\frac{a}{b+c}}=\frac{2\sum\frac{a}{b+c}}{\sum\frac{a}{b+c}}=2=RHS.$$

Remarcă.

In ΔABC

$$\sum\left(\frac{b}{c+a}+\lambda\frac{c}{a+b}\right)^{\frac{a}{b+c}}\geq 2,\lambda\geq 0.$$

Marin Chirciu

Problema675.

In ΔABC

$$\sum\frac{a}{b+c}+\prod\frac{a}{b+c}\geq\frac{13}{8}.$$

Adil Abdullayev, Azerbaijan,RMM 8/25

Soluție

$$LHS=\sum\frac{a}{b+c}+\prod\frac{a}{b+c}=\frac{2(p^2-r^2-Rr)}{p^2+r^2+2Rr}+\frac{2Rr}{p^2+r^2+2Rr}=\frac{2(p^2-r^2)}{p^2+r^2+2Rr}\overset{(1)}{\geq}\frac{13}{8}=RHS,$$

unde $\frac{2(p^2-r^2)}{p^2+r^2+2Rr} \overset{(1)}{\geq} \frac{13}{8} \Leftrightarrow 16(p^2-r^2) \geq 13(p^2+r^2+2Rr) \Leftrightarrow 3p^2 \geq 26Rr+29r^2$,

care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen: $p^2 \geq 16Rr-5r^2$.

Rămâne să arătăm că:

$3(16Rr-5r^2) \geq 26Rr+29r^2 \Leftrightarrow R \geq 2r$,(Euler).

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

1). In ΔABC

$$\sum\frac{a}{b+c}+\lambda\prod\frac{a}{b+c} \geq \frac{\lambda+12}{8}, \lambda \leq 4.$$

Soluţie

$$LHS=\sum\frac{a}{b+c}+\lambda\prod\frac{a}{b+c}=\frac{2(p^2-r^2-Rr)}{p^2+r^2+2Rr}+\lambda\frac{2Rr}{p^2+r^2+2Rr}=$$

$$=\frac{2(p^2-r^2-Rr+\lambda Rr)}{p^2+r^2+2Rr} \overset{(1)}{\geq} \frac{\lambda+12}{8}=RHS,$$

2). In ΔABC

$$\sum\frac{a}{b+c}+4\prod\frac{a}{b+c} \geq 2.$$

Soluţie

Cazul $\lambda=4$ în inegalitatea de mai sus.

Remarcă.

3). In ΔABC

$$\sum\frac{a}{b+c}-4\prod\frac{a}{b+c} \geq 1.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluţie

Cazul $\lambda=-4$ în inegalitatea de mai sus.

Problema676.

In ΔABC

$$\sum\frac{r_a}{r_b} \geq \sqrt[3]{\frac{\sum a^2}{\sum ab}}.$$

Adil Abdullayev, Azerbaijan, RMM 8/25

Soluţie

$$LHS=\sum\frac{r_a}{r_b}+\frac{2r}{R}=\sum\frac{r_a^2}{r_ar_b} \overset{CS}{\geq} \frac{\left(\sum r_a\right)^2}{\sum r_ar_b}=\frac{(4R+r)^2}{p^2} \overset{Gerretsen}{\geq} \frac{(4R+r)^2}{\frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}}=\frac{2(2R-r)}{R}=4-\frac{2r}{R}.$$

$RHS=3\sqrt[3]{\frac{\sum a^2}{\sum ab}} \leq 4-\frac{2r}{R}$, unde

$$3\sqrt[3]{\frac{\sum a^2}{\sum ab}} \leq 4-\frac{2r}{R} \Leftrightarrow 27\frac{\sum a^2}{\sum ab} \leq \left(4-\frac{2r}{R}\right)^3 \Leftrightarrow 27\cdot\frac{2(p^2-r^2-4Rr)}{p^2+r^2+4Rr} \leq 64-\frac{96r}{R}+\frac{48r^2}{R^2}-\frac{8r^3}{R^3}$$

$\Leftrightarrow 27\cdot\frac{2\left(p^2-r^2-4Rr\right)}{p^2+r^2+4Rr}\le 64-\frac{96r}{R}+\frac{48r^2}{R^2}-\frac{8r^3}{R^3}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(p^2+r^2+4Rr\right)\left(32R^3-48R^2r+24Rr^2-4r^3\right)\ge 27R^3\left(p^2-r^2-4Rr\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p^2\left(5R^3-48R^2r+24Rr^2-4r^3\right)+r\left(236R^4-133R^3r^2+48R^2r^3+8Rr^4-4r^5\right)\ge 0$.

Distingem cazurile:

Cazul1). Dacă $\left(5R^3-48R^2r+24Rr^2-4r^3\right)\ge 0$ inegalitatea este evidentă.

Cazul2). Dacă $\left(5R^3-48R^2r+24Rr^2-4r^3\right)<0$ inegalitatea se rescrie:

$r\left(236R^4-133R^3r^2+48R^2r^3+8Rr^4-4r^5\right)\ge p^2\left(-5R^3+48R^2r-24Rr^2+4r^3\right)$,

care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen: $p^2\le 4R^2+4Rr+3r^2$.

Rămâne să arătăm că:

$r\left(236R^4-133R^3r+48R^2r^2+8Rr^3-4r^4\right)\ge\left(4R^2+4Rr+3r^2\right)\left(-5R^3+48R^2r-24Rr^2+4r^3\right)$

$\Leftrightarrow 10R^5+32R^4-107R^3r^2-88R^2r^3+32Rr^4-8r^5\ge 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(R-2r\right)\left(10R^4+52R^3r-3R^2r^2-14Rr^3+4r^4\right)\ge 0$, vezi $R\ge 2r$,(Euler).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

In ΔABC

$$\frac{\sum a^2}{\sum ab}\le\frac{1}{27}\left(4-\frac{2r}{R}\right)^3.$$

Marin Chirciu

Soluție

$27\frac{\sum a^2}{\sum ab}\le\left(4-\frac{2r}{R}\right)^3\Leftrightarrow 27\cdot\frac{2\left(p^2-r^2-4Rr\right)}{p^2+r^2+4Rr}\le 64-\frac{96r}{R}+\frac{48r^2}{R^2}-\frac{8r^3}{R^3}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 27\cdot\frac{2\left(p^2-r^2-4Rr\right)}{p^2+r^2+4Rr}\le 64-\frac{96r}{R}+\frac{48r^2}{R^2}-\frac{8r^3}{R^3}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(p^2+r^2+4Rr\right)\left(32R^3-48R^2r+24Rr^2-4r^3\right)\ge 27R^3\left(p^2-r^2-4Rr\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p^2\left(5R^3-48R^2r+24Rr^2-4r^3\right)+r\left(236R^4-133R^3r^2+48R^2r^3+8Rr^4-4r^5\right)\ge 0$.

Problema677.

If $x,y,z>0$, $x^2+y^2+z^2=3$ then

$$\sum\frac{x^4}{1+3x+x^2}\ge\frac{3}{5}.$$

Nguyen Van Hoa , Vietnam, Mathematical Inequalities 8/25

Soluție

Lema.

If $x>0$ then

$$\frac{x^4}{1+3x+x^2}\ge\frac{3x^2-1}{10}.$$

Demonstrtie

$\frac{x^4}{1+3x+x^2}\ge\frac{3x^2-1}{10}\Leftrightarrow 7x^4-9x^3-2x^2+3x+1\ge 0\Leftrightarrow\left(x-1\right)^2\left(7x^2+5x+1\right)\ge 0$.

$$LHS=\sum\frac{x^4}{1+3x+x^3}\overset{Lema}{\geq}\sum\frac{3x^2-1}{10}=\frac{3\sum x^2-3}{10}=\frac{3\cdot3-3}{10}=\frac{3}{5}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $x=y=z=1$.

Remarcă.

1). If $x,y,z>0, x^2+y^2+z^2=3$ and $\lambda\geq 0$ then

$$\sum\frac{x^4}{\lambda+3x+x^2}\geq\frac{3}{\lambda+4}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Lema.

If $x>0$ and $\lambda\geq 0$ then

$$\frac{x^4}{\lambda+3x+x^2}\geq\frac{(4\lambda+11)x^2-2\lambda-3}{2(\lambda+4)^2}.$$

Demonstrtie

$$\frac{x^4}{\lambda+3x+x^2}\geq\frac{(4\lambda+11)x^2-2\lambda-3}{2(\lambda+4)^2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(2\lambda^2+12\lambda+21)x^4-3(4\lambda+11)x^3+(-4\lambda^2-9\lambda+3)x^2+3(2\lambda+3)x+2\lambda^2+3\lambda\geq 0\Leftrightarrow$$

$$(x-1)^2\left[(2\lambda^2+12\lambda+21)x^2+(4\lambda^2+12\lambda+9)x+2\lambda^2+3\lambda\right]\geq 0.$$

$$LHS=\sum\frac{x^4}{\lambda+3x+x^2}\overset{Lema}{\geq}\sum\frac{(4\lambda+11)x^2-2\lambda-3}{2(\lambda+4)^2}=\frac{(4\lambda+11)\sum x^2-3(2\lambda+3)}{2(\lambda+4)^2}=$$

$$=\frac{(4\lambda+11)\cdot3-3(2\lambda+3)}{2(\lambda+4)^2}=\frac{3}{\lambda+4}=RHS$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $x=y=z=1$.

2). If $x,y,z>0, x^2+y^2+z^2=3$ and then

$$\sum\frac{x^3}{3+x}\geq\frac{3}{4}.$$

Soluție

Cazul $\lambda=0$ în inegalitatea de mai sus.

3). If $x,y,z>0, x^2+y^2+z^2=3$ then

$$\sum\frac{x^5}{1+3x+x^3}\geq\frac{3}{5}.$$

Soluție

Lema.

If $x>0$ then

$$\frac{x^5}{1+3x+x^3}\geq\frac{19x^2-9}{50}.$$

$$LHS=\sum\frac{x^5}{1+3x+x^3}\overset{Lema}{\geq}\sum\frac{19x^2-9}{50}=\frac{19\sum x^2-27}{50}=\frac{19\cdot3-27}{50}=\frac{30}{50}=\frac{3}{5}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $x=y=z=1$.

4). If $x,y,z>0, x^2+y^2+z^2=3$ and $\lambda\geq 0$ then

$$\sum \frac{x^5}{\lambda+3x+x^3} \geq \frac{3}{\lambda+4}.$$

Soluție

Lema.

If $x>0$ and $\lambda \geq 0$ then

$$\frac{x^5}{\lambda+3x+x^3} \geq \frac{(5\lambda+14)x^2-3(\lambda+2)}{2(\lambda+4)^2}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1$.

5). If $x,y,z>0, x+y+z=3$ then

$$\sum \frac{x^2}{3+x} \geq \frac{3}{4}.$$

Soluție

Cazul $\lambda=0$ în inegalitatea de mai sus.

6).If $x,y,z>0, x^2+y^2+z^2=3$ then

$$\sum \frac{x^8}{x^6+x+1} \geq 1.$$

Soluție

Lema.

If $x>0$ then

$$\frac{x^8}{x^6+x+1} \geq \frac{17x^2-11}{18}.$$

7).If $x,y,z>0, x^2+y^2+z^2=3$ and $\lambda \geq 1$ then

$$\sum \frac{x^8}{x^6+x+\lambda} \geq \frac{3}{\lambda+2}.$$

Soluție

Lema.

If $x>0$ and $\lambda \geq 1$ then

$$\frac{x^8}{x^6+x+\lambda} \geq \frac{(8\lambda+9)x^2-6\lambda-5}{2(\lambda+2)^2}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1$.

8).If $x,y,z>0, x^2+y^2+z^2=3$ then

$$\sum \frac{x^7}{x^5+x+1} \geq 1.$$

Soluție

Lema.

If $x>0$ then

$$\frac{x^7}{x^5+x+1} \geq \frac{5x^2-3}{6}.$$

$$LHS = \sum \frac{x7}{x^5+x+1} \overset{Lema}{\geq} \sum \frac{5x^2-3}{6} = \frac{5\sum x^2-9}{6} = \frac{5\cdot 3-9}{6} = \frac{6}{6} = 1 = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1$.

9). If $x,y,z>0, x^2+y^2+z^2=3$ and $\lambda \geq 0$ then

$$\sum \frac{x^7}{x^5+x+\lambda} \geq \frac{3}{\lambda+2}.$$

Soluție

Lema.

If $x>0$ then

$$\frac{x^7}{x^5+x+\lambda} \geq \frac{(7\lambda+8)x^2-5\lambda-4}{2(\lambda+2)^2}.$$

10). If $x,y,z>0$, $x^3+y^3+z^3=3$ then

$$\sum \frac{x^6}{x^3+x+1} \geq 1.$$

Soluție

Lema.

If $x>0$ then

$$\frac{x^6}{x^3+x+1} \geq \frac{14x^3-5}{27}.$$

$$LHS = \sum \frac{x^6}{x^3+x+1} \overset{Lema}{\geq} \sum \frac{14x^3-5}{27} = \frac{14\sum x^3-15}{27} = \frac{14\cdot 3-5}{27} = \frac{27}{27} = 1 = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1$.

11). If $x,y,z>0$, $x^3+y^3+z^3=3$ and $\lambda \geq 0$ then

$$\sum \frac{x^6}{x^3+x+\lambda} \geq \frac{3}{\lambda+2}.$$

Soluție

Lema.

If $x>0$ and $\lambda \geq 0$ then

$$\frac{x^6}{x^3+x+\lambda} \geq \frac{(6\lambda+8)x^3-3\lambda-2}{3(\lambda+2)^2}.$$

12). If $x,y,z>0$, $x^3+y^3+z^3=3$ then

$$\sum \frac{x^5}{x^2+1} \geq \frac{3}{2}.$$

Soluție

Cazul $\lambda=0$ în inegalitatea de mai sus.

13). If $x,y,z>0$, $x^3+y^3+z^3=3$ and $\lambda \geq 0$ then

$$\sum \frac{x^5}{x^2+\lambda} \geq \frac{3}{\lambda+1}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție

Lema.

If $x>0$ and $\lambda \geq 0$ then

$$\frac{x^5}{x^2+\lambda} \geq \frac{(5\lambda+3)x^3-2\lambda}{3(\lambda+1)^2}.$$

$$LHS = \sum \frac{x^5}{x^2+1} \overset{Lema}{\geq} \sum \frac{4x^3-1}{6} = \frac{4\sum x^3-3}{6} = \frac{4\cdot 3-3}{6} = \frac{3}{2} = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1$.

Problema678.

If $x, y, z > 0, x + y + z = 3$ then

$$\sum \frac{x^2}{\sqrt{z(x+y)}} \geq \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Crăciun Gheorghe, Mathematical Inequalities 8/25

Soluție

$$LHS = \sum \frac{x^2}{\sqrt{z(x+y)}} \overset{CS}{\geq} \frac{\left(\sum x\right)^2}{\sum \sqrt{z(x+y)}} \overset{CBS}{\geq} \frac{\left(\sum x\right)^2}{\sqrt{3\sum z(x+y)}} = \frac{\left(\sum x\right)^2}{\sqrt{3 \cdot 2\sum xy}} \overset{SOS}{\geq} \frac{\left(\sum x\right)^2}{\sqrt{2\left(\sum x\right)^2}} =$$

$$= \frac{\sum x}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = 1$.

Remarcă.

If $x, y, z > 0, x + y + z = 3$ and $\lambda \geq 0$ then

$$\sum \frac{x^2}{\sqrt{z(x+\lambda y)}} \geq \frac{3}{\sqrt{\lambda + 1}}.$$

Marin Chirciu

Problema679.

In ΔABC

$$\sum \frac{r_a}{\sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}} \geq 9r.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam, RMM 8/25

Soluție

$$LHS = \sum \frac{r_a}{\sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}} \overset{Cebyshev}{\geq} \frac{1}{3}\sum r_a \sum \frac{1}{\sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}} \overset{CS}{\geq} \frac{1}{3} \cdot 9r \frac{9}{\sum\left(\sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right)} =$$

$$= 3r \cdot \frac{9}{2\sum \sin\frac{A}{2}} \overset{Jensen}{\geq} 3r \cdot \frac{9}{2 \cdot \frac{3}{2}} = 9r = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

In ΔABC

$$\sum \frac{r_b + r_c}{\sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}} \geq 18r.$$

Marin Chirciu

Soluție

Problema680.

If $M \in Int(\Delta ABC), d_a, d_b, d_c$ -distances of the point M to the sides BC, CA, AB and $x, y \in (0, \infty)$ then

$$\sum \frac{ab^2}{xh_a + yd_a} \geq \frac{24}{3x + y} F.$$

D.M.Bătinețu-Giurgiu, Claudia Nănuți, Problema 203, RMM 8/2025

Soluție

$$LHS=\sum\frac{ab^2}{xh_a+yd_a}=\sum\frac{a^2b^2}{xah_a+yad_a}=\sum\frac{a^2b^2}{x\cdot 2F+y\cdot 2F_1}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum ab\right)^2}{\sum\left(x\cdot 2F+y\cdot 2F_1\right)}\overset{Gordon}{\geq}\frac{\left(4F\sqrt{3}\right)^2}{6xF+2yF}=$$

$$=\frac{48F^2}{2F\left(3x+y\right)}=\frac{24}{3x+y}F=RHS.$$

Remarcă.

1). If $M\in Int\left(\Delta ABC\right), d_a, d_b, d_c$ -distances of the point M to the sides BC, CA, AB and $x, y\in\left(0,\infty\right)$ then

$$\sum\frac{a^nb^{n+1}}{xh_a+yd_a}\geq\frac{2^{2n+1}3^{\frac{3-n}{2}}}{3x+y}F^n, n\in\mathbf{N}.$$

2). If $M\in Int\left(\Delta ABC\right), d_a, d_b, d_c$ -distances of the point M to the sides BC, CA, AB and $x, y\in\left(0,\infty\right)$ then

$$\sum\frac{b}{xh_a+yd_a}\geq\frac{6\sqrt{3}}{3x+y}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema681.

In ΔABC

$$\frac{\sum h_a^2}{\sum h_ah_b}\leq\frac{R}{2r}.$$

Adil Abdullayev, Azerbaijan, RMM 8/2025

Soluție

Folosind $h_a^2\leq w_a^2\leq r_br_c$ obținem $\sum h_a^2\leq\sum r_br_c=p^2$ și $\sum h_ah_b=\frac{2rp^2}{R}$.

$$LHS=\frac{\sum h_a^2}{\sum h_ah_b}\leq\frac{p^2}{\frac{2rp^2}{R}}=\frac{R}{2r}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

In ΔABC

$$\frac{\sum h_a^4}{\sum h_ah_b}\leq\frac{R}{2r}\left(2R-r\right)^2.$$

Marin Chirciu

Soluție

Folosind $h_a^2\leq w_a^2\leq r_br_c$ obținem $\sum h_a^4\leq\sum r_b^2r_c^2=p^2\left(p^2-2r^2-8Rr\right)$ și $\sum h_ah_b=\frac{2rp^2}{R}$.

$$LHS=\frac{\sum h_a^4}{\sum h_a h_b}\le\frac{p^2\left(p^2-2r^2-8Rr\right)}{\frac{2rp^2}{R}}=\frac{R\left(p^2-2r^2-8Rr\right)}{2r}\overset{Gerretsen}{\le}$$

$$\overset{Gerretsen}{\le}\frac{R\left(4R^2+4Rr+3r^2-2r^2-8Rr\right)}{2r}=\frac{R\left(4R^2-4Rr+r^2\right)}{2r}=\frac{R(2R-r)^2}{2r}=RHS.$$

Problema682.

In ΔABC

$$\sum\frac{m_a}{h_a}\ge\frac{\sum a^2}{\sum ab}+2.$$

Adil Abdullayev, Azerbaijan, RMM 8/2025

Soluție

Folosind $\frac{\sum a^2}{\sum ab}+2=\frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum ab}=\frac{4p^2}{p^2+r^2+4Rr}$ inegalitatea se scrie: $\sum\frac{m_a}{h_a}\ge\frac{4p^2}{p^2+r^2+4Rr}$,

$$\sum\frac{m_a}{h_a}\overset{Tereshin}{\ge}\sum\frac{\frac{b^2+c^2}{4R}}{\frac{bc}{2R}}=\sum\frac{b^2+c^2}{2bc}=\frac{p^2+r^2-2Rr}{4Rr}\overset{(1)}{\ge}\frac{4p^2}{p^2+r^2+4Rr},$$

unde $\frac{p^2+r^2-2Rr}{4Rr}\overset{(1)}{\ge}\frac{4p^2}{p^2+r^2+4Rr}\Leftrightarrow\left(p^2+r^2-2Rr\right)\left(p^2+r^2+4Rr\right)\ge16Rrp^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p^2\left(p^2+2r^2-14Rr\right)\ge r^2\left(8R^2-2Rr-r^2\right)$, vezi $p^2\ge16Rr-5r^2$ (Gerretsen).

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

In ΔABC

$$\sum\frac{m_a}{h_a}\ge\frac{7}{2}-\frac{r}{R}.$$

Marin Chirciu

Soluție

$$\sum\frac{m_a}{h_a}\overset{Tereshin}{\ge}\sum\frac{\frac{b^2+c^2}{4R}}{\frac{bc}{2R}}=\sum\frac{b^2+c^2}{2bc}=\frac{p^2+r^2-2Rr}{4Rr}\overset{Gerretsen}{\ge}\frac{7}{2}-\frac{r}{R}$$

Problema683.

In ΔABC

$$\sum\frac{a}{\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}}\ge6\sqrt{3}r.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam, RMM 8/2025

Soluție

$$LHS=\sum\frac{a}{\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}}\overset{Cebyshev}{\ge}\frac{1}{3}\sum a\sum\frac{1}{\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}}\overset{CS}{\ge}\frac{1}{3}\cdot2p\frac{9}{\sum\left(\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)}=$$

$$=\frac{2p}{3}\cdot\frac{9}{2\sum\sin\frac{A}{2}}\overset{Mitrinovic\&Jensen}{\ge}\frac{2\cdot3r\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{9}{2\cdot\frac{3}{2}}=6\sqrt{3}r=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

In ΔABC

$$\sum \frac{b+c}{\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}} \geq 12\left(\frac{F}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Marin Chirciu

Soluție

$$LHS=\sum \frac{b+c}{\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}} \overset{AG}{\geq} 3\sqrt[3]{\prod \frac{b+c}{\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}}} = \frac{3\sqrt[3]{\prod(b+c)}}{\sqrt[3]{\prod\left(\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)}} \overset{AG\&Cesaro}{\geq}$$

$$\overset{AG\&Cesaro}{\geq} \frac{3\sqrt[3]{8abc}}{\frac{\sum\left(\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)}{3}} = \frac{18(abc)^{\frac{1}{3}}}{2\sum \sin\frac{A}{2}} \overset{Carlitz\&Jensen}{\geq} \frac{9\left(\frac{4F}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}}}{\frac{3}{2}} = 6\left(\frac{4F}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Problema684.

In ΔABC

$$\sum \frac{m_b m_c}{r_a^2} \geq 3.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam, RMM 8/2025

Soluție

$$LHS=\sum \frac{m_b m_c}{r_a^2} \overset{AG}{\geq} 3\sqrt[3]{\prod \frac{m_b m_c}{r_a^2}} = 3\sqrt[3]{\left(\frac{m_a m_b m_c}{r_a r_b r_c}\right)^2} \overset{m_a m_b m_c \geq r_a r_b r_c}{\geq} 3 = RHS.$$

Remarcă.

In ΔABC

$$\sum \frac{m_b^n m_c^n}{r_a^{2n}} \geq 3,\, n \in \mathbf{N}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Pentru $n=0$ se obține egalitatea3=3.

În continuare fie $n \in \mathbf{N}^*$.

$$LHS=\sum \frac{m_b^n m_c^n}{r_a^{2n}} \overset{AG}{\geq} 3\sqrt[3]{\prod \frac{m_b^n m_c^n}{r_a^{2n}}} = 3\sqrt[3]{\left(\frac{m_a m_b m_c}{r_a r_b r_c}\right)^{2n}} \overset{m_a m_b m_c \geq r_a r_b r_c}{\geq} 3 = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema685.

In ΔABC

$$\sum r_a \sec\frac{A}{2} \geq 6\sqrt{3}r.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam, RMM 8/2025

Soluție

$$LHS=\sum r_a \sec\frac{A}{2} \overset{Chebyshev}{\geq} \frac{1}{3}\sum r_a \sum \sec\frac{A}{2} \overset{Jensen}{\geq} \frac{1}{3}(4R+r)\cdot 2\sqrt{3} \overset{Jensen}{\geq} \frac{1}{3}\cdot 9r\cdot 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}r = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

In ΔABC

$$\sum (r_b + r_c)\sec\frac{A}{2} \le \frac{2Rp}{3r}.$$

Marin Chirciu

Soluţie

$$LHS = \sum (r_b + r_c)\sec\frac{A}{2} \overset{Chebyshev}{\le} \frac{1}{3}\sum (r_b + r_c)\sum \sec\frac{A}{2} = \frac{1}{3}\cdot 2\sum r_a \sum \sec\frac{A}{2} \le \frac{2}{3}(4R+r)\cdot\frac{2p}{3r} \overset{Euler}{\le}$$

$$\overset{Euler}{\le} \frac{2}{3}\cdot\frac{9R}{2}\cdot\frac{2p}{3r} = \frac{2Rp}{3r} = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă triunghiul este echilateral

Problema686.

If $a,b,c>0$ then

$$\sum \frac{a^3}{b+c} \ge \frac{1}{2}\sum a^2.$$

Ermal Feleqi, Mathematical Inequalities 8/2025

Soluţie

$$LHS = \sum \frac{a^3}{b+c} = \sum \frac{a^4}{a(b+c)} \overset{CS}{\ge} \frac{\left(\sum a^2\right)^2}{\sum a(b+c)} = \frac{\left(\sum a^2\right)^2}{2\sum ab} \overset{(1)}{\ge} \frac{1}{2}\sum a^2 = RHS,$$

unde $\frac{\left(\sum a^2\right)^2}{2\sum ab} \overset{(1)}{\ge} \frac{1}{2}\sum a^2 \Leftrightarrow \sum a^2 \ge \sum ab \Leftrightarrow \sum (a-b)^2 \ge 0$.

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a=b=c$.

Remarcă.

If $a,b,c>0$ and $\lambda \ge 0$ then

$$\sum \frac{a^3}{b+\lambda c} \ge \frac{1}{\lambda+1}\sum a^2$$

Marin Chirciu

Problema687.

In ΔABC

$$\sum \frac{ab^2}{r+h_a} \ge 6F.$$

D.M.Bătineţu-Giurgiu, Claudia Nănuţi, RMM 8/2025

Soluţie

$$LHS = \sum \frac{ab^2}{r+h_a} = \sum \frac{a^2b^2}{ar+ah_a} = \sum \frac{a^2b^2}{ar+2F} \overset{CS}{\ge} \frac{\left(\sum ab\right)^2}{\sum (ar+2F)} \overset{Gordon}{\ge} \frac{\left(4F\sqrt{3}\right)^2}{r\sum a + 6F} = \frac{48F^2}{r\cdot 2p + 6F} =$$

$$= \frac{48F^2}{2F+6F} = \frac{48F^2}{8F} = 6F = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

1). In ΔABC

$$\sum \frac{a^n b^{n+1}}{r+h_a} \ge 2^{2n-1} 3^{\frac{3-n}{2}} F^n, n \in \mathbf{N}.$$

Marin Chirciu

Remarcă.

2). In ΔABC

$$\sum \frac{a}{r+h_b} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție

$$LHS = \sum \frac{a}{r+\frac{2F}{b}} = \sum \frac{ab}{br+2F} \overset{CS}{\geq} \frac{\left(\sum \sqrt{ab}\right)^2}{\sum (br+2F)} \overset{AG}{\geq} \frac{\left(3\sqrt[3]{abc}\right)^2}{r\sum b+6F} = \frac{9(abc)^{\frac{2}{3}}}{r\cdot 2p+6F} \overset{Carlitz}{\geq} \frac{9\frac{4F}{\sqrt{3}}}{2F+6F} =$$

$$= \frac{9\frac{4F}{\sqrt{3}}}{8F} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema688.

If $x,y,z>0, x+y+z=1$ then

$$\sum \sqrt[7]{x^3y^2z} \leq \sqrt[7]{3}.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam, RMM 8/2025

Soluție

$$\sum \sqrt[7]{x^3y^2z} \leq \sqrt[7]{3} \Leftrightarrow \sum \sqrt[7]{\frac{x^3y^2z}{3}} \leq 1.$$

$$LHS = \sum \sqrt[7]{x^3y^2z\cdot\frac{1}{3}} \overset{AG}{\leq} \sum \frac{3x+2y+z+\frac{1}{3}}{7} = \frac{6\sum x+1}{7} = \frac{6\cdot 1+1}{7} = 1 = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Remarcă.

If $x,y,z>0, x+y+z=1$ and $n\in\mathbf{N}$ then

$$\sum \sqrt[3n+4]{x^{n+2}y^{n+1}z^n} \leq \sqrt[3n+4]{3}.$$

Marin Chirciu

Problema689.

If $a,b,c>0, ab+bc+ca=3$ then

$$\sum \sqrt{\frac{bc}{a^4+7}} \leq \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam, RMM 8/2025

Soluție

Lema.

If $a,b,c>0, ab+bc+ca=3$ then

$$\sum \sqrt{\frac{bc}{a^4+7}} \leq \sqrt{\frac{bc}{2(a+b)(a+c)}}.$$

Demonstrație.

$$a^4+7 = (a^4+1)+6 \overset{AG}{\geq} 2a^2+6 = 2(a^2+3) = 2(a^2+ab+bc+ca) = 2(a+b)(a+b) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{bc}{a^4+7}} \le \sqrt{\frac{bc}{2(a+b)(a+c)}}.$$

$$LHS = \sum \sqrt{\frac{bc}{a^4+7}} \overset{Lema}{\le} \sum \sqrt{\frac{bc}{2(a+b)(a+c)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum \sqrt{\frac{b}{a+b} \cdot \frac{c}{a+c}} \overset{AG}{\le} \frac{1}{\sqrt{2}} \sum \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a+b} + \frac{c}{a+c}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4} = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a=b=c=1$.

Remarcă.

If $a,b,c>0$, $ab+bc+ca=3$ and $\lambda \ge \frac{1}{2}$ then

$$\sum \sqrt{\frac{bc}{a^4+2(\lambda-1)a^3+10\lambda-3}} \le \frac{3}{2\sqrt{3\lambda-1}}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Lema.

If $a,b,c>0$, $ab+bc+ca=3$ and $\lambda \ge \frac{1}{2}$ then

$$\sum \sqrt{\frac{bc}{a^4+2(\lambda-1)a^3+10\lambda-3}} \le \sqrt{\frac{bc}{(3\lambda-1)(a+b)(a+c)}}.$$

Demonstrație.

$$a^4+2(\lambda-1)a^3+10\lambda-3 \overset{SOS}{\ge} (3\lambda-1)a^2+3(3\lambda-1) = (3\lambda-1)(a^2+3) = (3\lambda-1)(a^2+ab+bc+ca) =$$

$$= (3\lambda-1)(a+b)(a+b) \Rightarrow \sum \sqrt{\frac{bc}{a^4+2(\lambda-1)a^3+10\lambda-3}} \le \sqrt{\frac{bc}{(3\lambda-1)(a+b)(a+c)}}.$$

Am folosit mai sus $a^4+2(\lambda-1)a^3+10\lambda-3 \overset{SOS}{\ge} (3\lambda-1)a^2+3(3\lambda-1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a-1)^2(a^2+2\lambda a+\lambda) \ge 0$.

$$LHS = \sum \sqrt{\frac{bc}{a^4+2(\lambda-1)a^3+10\lambda-3}} \overset{Lema}{\le} \sum \sqrt{\frac{bc}{(3\lambda-1)(a+b)(a+c)}} = \frac{1}{\sqrt{3\lambda-1}} \sum \sqrt{\frac{b}{a+b} \cdot \frac{c}{a+c}} \overset{AG}{\le}$$

$$\overset{AG}{\le} \frac{1}{\sqrt{3\lambda-1}} \sum \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a+b} + \frac{c}{a+c}\right) = \frac{1}{\sqrt{3\lambda-1}} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2\sqrt{3\lambda-1}} = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a=b=c=1$.

Problema690.

If $x,y,z>0$, $\sum xy^3 = 3$ then

$$\sum \frac{x^5}{y} \ge 3.$$

Crăciun Gheorghe, Mathematical Inequalities 5/2025

Remarcă.

If $x,y,z>0$, $\sum xy^3 = 3$ and $n \in \mathbf{N}$ then

$$\sum \frac{x^{2n+1}}{y} \ge 3.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Pentru $n=0$ obținem $\sum \frac{x}{y} \geq 3$, vezi AM-GM.

Pentru $n \in \mathbf{N}^*$ folosim inegalitatea lui Holder.

$$LHS = \sum \frac{x^{2n+1}}{y} = \sum \frac{x^{2n+2}}{xy} \overset{Holder}{\geq} \frac{\left(\sum x^2\right)^{n+1}}{3^{n-1}\sum xy} \overset{SOS}{\geq} \frac{\left(\sum x^2\right)^{n+1}}{3^{n-1}\sum x^2} = \frac{1}{3^{n-1}}\left(\sum x^2\right)^n \overset{Vasc}{\geq} \frac{1}{3^{n-1}}\left(\sqrt{3\sum xy^3}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{3^{n-1}}\left(\sqrt{3\cdot 3}\right)^n = \frac{1}{3^{n-1}}\cdot 3^n = 3 = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1$.

Problema691.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=xyz$ then

$$\sum \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq \frac{3}{2}.$$

Sampas Theodoros, Greece, MathAtelier, 8/2025

Soluție

Avem $\sum \cot\frac{A}{2} = \prod \cot\frac{A}{2} = \frac{p}{r}$.

Cu substituția $(x,y,z) = \left(\cot\frac{A}{2}, \cot\frac{B}{2}, \cot\frac{C}{2}\right)$ inegalitatea se scrie:

$$\sum \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\frac{A}{2}}} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \sum \sin\frac{A}{2} \leq \frac{3}{2}, \text{(Jensen)}.$$

Remarcă.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=xyz$ then

$$\sum \frac{1}{1+x^2} \geq \frac{3}{4}.$$

Marin Chirciu

Problema692.

If $a,b>0$, $a+b=2$ then

$$ab + \frac{1}{a^2+b^2+1} - \frac{1}{a^3+b^3+1} + \frac{1}{a^4+b^4+1} \leq \frac{4}{3}.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam, RMM 8/2025

Soluție

$2 = a+b \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow ab \leq 1$;

$a^2+b^2 \overset{CS}{\geq} \frac{(a+b)^2}{2} = \frac{2^2}{2} = 2$;

$a^4+b^4 \overset{CS}{\geq} \frac{(a+b)^4}{2^3} = \frac{2^4}{2^3} = 2$;

$a^3+b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) = 2^3 - 3ab\cdot 2 = 8-6ab$.

$$LHS = ab + \frac{1}{a^2+b^2+1} - \frac{1}{a^3+b^3+1} + \frac{1}{a^4+b^4+1} \leq ab + \frac{1}{2+1} - \frac{1}{8-6ab+1} + \frac{1}{2+1} =$$

$= ab + \frac{2}{3} - \frac{1}{9-6ab} \overset{(1)}{\leq} \frac{4}{3} = RHS$,

unde $ab + \frac{2}{3} - \frac{1}{9-6ab} \overset{(1)}{\leq} \frac{4}{3} \overset{ab=t\leq 1}{\Leftrightarrow} t + \frac{2}{3} - \frac{1}{9-6t} \leq \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{9t-6t^2-1}{9-6t} \leq \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{9t-6t^2-1}{3-2t} \leq 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6t^2 - 13t + 7 \geq 0 \Leftrightarrow (t-1)(6t-7) \geq 0$, vezi $t \leq 1 < \frac{7}{6}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = 1$.

Remarcă.

If $a, b > 0$, $a + b = 2$ and $\lambda \geq \frac{1}{2}$ then

$$ab + \frac{1}{a^2+b^2+\lambda} - \frac{1}{a^3+b^3+\lambda} + \frac{1}{a^4+b^4+\lambda} \leq \frac{\lambda+3}{\lambda+2}.$$

Marin Chirciu

Problema693.

Solve $x^{\frac{1}{e}} e^x = \log_{\frac{1}{e}} x$, $x \in (0, \infty)$.

Panagiotis Danousis, Greece, MathAtelier 8/2025

Soluție

$x^{\frac{1}{e}} e^x = \log_{\frac{1}{e}} x \Leftrightarrow x^{\frac{1}{e}} e^x + \ln x = 0$, $f(x) = x^{\frac{1}{e}} e^x + \ln x$, $x \in (0, \infty)$ este funcție strict crescătoare și

$f\left(\frac{1}{e}\right) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{e}$ este soluția unică a ecuației.

Deducem că $S = \left\{\frac{1}{e}\right\}$.

Remarcă.

1). Let be $\lambda > 0$ fixed. Solve $(\lambda x)^{\frac{1}{e}} e^{\lambda x} = \log_{\frac{1}{e}}(\lambda x)$, $x \in (0, \infty)$.

Soluție

$(\lambda x)^{\frac{1}{e}} e^{\lambda x} = \log_{\frac{1}{e}}(\lambda x) \Leftrightarrow (\lambda x)^{\frac{1}{e}} e^{\lambda x} + \ln(\lambda x) = 0$, $f(x) = (\lambda x)^{\frac{1}{e}} e^{\lambda x} + \ln(\lambda x)$, $x \in (0, \infty)$, $\lambda > 0$

este funcție strict crescătoare și $f\left(\frac{1}{\lambda e}\right) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{\lambda e}$ este soluția unică a ecuației.

Deducem că $S = \left\{\frac{1}{\lambda e}\right\}$.

2). Let be $\lambda > 0$ fixed. Solve $\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\frac{1}{e}} e^{\frac{x}{\lambda}} = \log_{\frac{1}{e}}\left(\frac{x}{\lambda}\right)$, $x \in (0, \infty)$.

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție

$\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\frac{1}{e}} e^{\frac{\lambda}{x}} = \log_{\frac{1}{e}}\left(\frac{x}{\lambda}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\frac{1}{e}} e^{\frac{x}{\lambda}} + \ln\frac{x}{\lambda} = 0$, $f(x) = \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\frac{1}{e}} e^{\frac{x}{\lambda}} + \ln\frac{x}{\lambda}$, $x \in (0, \infty)$, $\lambda > 0$ este

funcție strict crescătoare și $f\left(\frac{\lambda}{e}\right) = 0 \Rightarrow x = \frac{\lambda}{e}$ este soluția unică a ecuației.

Deducem că $S=\left\{\frac{\lambda}{e}\right\}$.

Problema694.

If $a,b,c>0$, $abc=1$ then

$$\left(\sum\frac{a}{b}\right)^2\geq 3\sum a^2.$$

Nguyen Ngoc Phuc, Vietnam, Mathematical Inequalities 8/2025

Soluție

Avem $\frac{a^2}{b^2}+\frac{a}{c}+\frac{a}{c}\overset{AG}{\geq}3\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{a}{c}\cdot\frac{a}{c}}=3\sqrt[3]{\frac{a^4}{b^2c^2}}=3a^2$ și analoagele.

$$\sum\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{a}{c}+\frac{a}{c}\right)\geq\sum 3a^2\Leftrightarrow\sum\frac{a^2}{b^2}+2\sum\frac{b}{a}\geq\sum 3a^2\Leftrightarrow\left(\sum\frac{a}{b}\right)^2\geq 3\sum a^2.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarcă.

1). If $a,b,c>0$, $abc=1$ then

$$\left(\sum\frac{a}{b}\right)^2\geq 3\sum ab.$$

2). If $a,b,c>0$, $abc=1$ then

$$\sum\frac{a}{b}\geq\sum a.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema695.

If $a,b,c>0$, $abc=1$ then

$$\prod(a+b)\geq 4(a+b+c-1).$$

Kunihiko Chikaya, Japan, Mathematical Inequalities 8/2025

Soluție

Folosim pqr -Method.

Notăm $p=\sum a, q=\sum ab, r=abc=1$.

Avem $\prod(a+b)=pq-r$, $r=1\Rightarrow\prod(a+b)=pq-1$.

Inegalitatea se scrie:

$pq-1\geq 4(p-1)\Leftrightarrow pq+3\geq 4p\Leftrightarrow q+\frac{3}{p}\geq 4$, care rezultă din inegalitatea mediilor:

$$q+\frac{3}{p}=\frac{q}{3}+\frac{q}{3}+\frac{q}{3}+\frac{3}{p}\overset{AG}{\geq}4\sqrt[4]{\frac{q}{3}\cdot\frac{q}{3}\cdot\frac{q}{3}\cdot\frac{3}{p}}=4\sqrt[4]{\frac{q^3}{9p}}\overset{(1)}{\geq}4,$$

unde(1) $\Leftrightarrow\frac{q^3}{9p}\geq 1\Leftrightarrow q^3\geq 9p$, care rezultă din $q^2\geq 3p$ și $q\geq 3$, vezi

$$q^2=\left(\sum ab\right)^2\geq 3abc\sum a=3rp\overset{r=1}{=}3p \text{ și } q=\sum ab\overset{AG}{\geq}3\sqrt[3]{(abc)^2}=3.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarcă.

If $a,b,c>0$, $abc=1$ then

$$\prod(a+b)+\sum\frac{1}{a}\geq 4(a+b+c)-1.$$

Marin Chirciu

Problema696.

In ΔABC

$$\sum m_a \le \sum r_a .$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam, RMM 8/2025

Soluție

$LHS = \sum m_a \overset{Leuenberger}{\le} 4R + r = \sum r_a = RHS .$

Remarcă.

1).In ΔABC

$$\sum (m_a + m_b) \le 2\sum r_a .$$

2).In ΔABC

$$\sum (m_a + \lambda m_b) \le (1+\lambda)\sum r_a .$$

Dezvotări, Marin Chirciu

Problema697.

In ΔABC

$$a^4 + b^4 + c^4 + abc(a+b+c) \ge 32F^2 .$$

D.M.Bătinețu-Giurgiu, Claudia Nănuți, RMM 8/2025

Soluție

$LHS = a^4 + b^4 + c^4 + abc(a+b+c) \overset{Goldner}{\ge} 16F^2 + 4Rrp\cdot 2p \overset{Euler}{\ge} 16F^2 + 4\cdot 2r\cdot rp\cdot 2p =$

$= 16F^2 + 16F^2 = 32F^2 = RHS .$

Remarcă.

In ΔABC

$$a^4 + b^4 + c^4 + \lambda abc(a+b+c) \ge 16(\lambda+1)F^2 , \lambda \ge 0 .$$

Marin Chirciu

Problema698.

If $x, y > 0$, $x + \frac{1}{y} = 3\left(y + \frac{1}{x}\right)$ then find

$$\frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 - xy + y^2} .$$

Sanong Huayrerai, Math 8/2025

Soluție

$x + \frac{1}{y} = 3\left(y + \frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow \frac{xy+1}{y} = \frac{3(xy+1)}{x} \Leftrightarrow (xy+1)(3y-x) = 0$ $x, y > 0 \Leftrightarrow x = 3y .$

Obținem $\frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 - xy + y^2} \overset{x=3y}{=} \frac{9y^2 + 3y^2 + y^2}{9y^2 - 3y^2 + y^2} = \frac{13}{7} .$

Remarcă.

If $x, y, \lambda > 0$, $x + \frac{1}{y} = \lambda\left(y + \frac{1}{x}\right)$ then find

$$\frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 - xy + y^2} .$$

Marin Chirciu

Soluție

Deducem că $\frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}=\frac{\lambda^2+\lambda+1}{\lambda^2-\lambda+1}$.

Problema699.

In ΔABC

$$\frac{\sum w_a^2}{\sum w_a w_b}\le\frac{R}{2r}.$$

Adil Abdullayev, Azerbaijan, RMM 8/2025

Soluție

Folosind $w_a^2\le r_b r_c$ obținem $\sum w_a^2\le\sum r_b r_c=p^2$ și $\sum w_a w_b\ge\sum h_a h_b=\frac{2rp^2}{R}$.

$$LHS=\frac{\sum w_a^2}{\sum w_a w_b}\le\frac{p^2}{\frac{2rp^2}{R}}=\frac{R}{2r}=RHS.$$

Remarcă.

In ΔABC

$$\frac{\sum w_a^4}{\sum w_a w_b}\le\frac{R}{2r}(2R-r)^2.$$

Marin Chirciu

Soluție

Folosind $w_a^2\le r_b r_c$ obținem $\sum w_a^4\le\sum r_b^2 r_c^2=p^2\left(p^2-2r^2-8Rr\right)$ și $\sum w_a w_b\ge\sum h_a h_b=\frac{2rp^2}{R}$.

$$LHS=\frac{\sum w_a^4}{\sum w_a w_b}\le\frac{p^2\left(p^2-2r^2-8Rr\right)}{\frac{2rp^2}{R}}=\frac{R\left(p^2-2r^2-8Rr\right)}{2r}\overset{Gerretsen}{\le}$$

$$\overset{Gerretsen}{\le}\frac{R\left(4R^2+4Rr+3r^2-2r^2-8Rr\right)}{2r}=\frac{R\left(4R^2-4Rr+r^2\right)}{2r}=\frac{R(2R-r)^2}{2r}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema700.

In ΔABC

$$\sum\frac{r_a}{r_b}+\frac{2r}{R}\ge 4.$$

Adil Abdullayev, Azerbaijan, RMM 8/2025

Soluție

$$LHS=\sum\frac{r_a}{r_b}+\frac{2r}{R}=\sum\frac{r_a^2}{r_a r_b}+\frac{2r}{R}\overset{CS}{\ge}\frac{\left(\sum r_a\right)^2}{\sum r_a r_b}+\frac{2r}{R}=\frac{(4R+r)^2}{p^2}+\frac{2r}{R}\overset{Gerretsen}{\ge}\frac{(4R+r)^2}{\frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}}+\frac{2r}{R}=$$

$$=\frac{2(2R-r)}{R}+\frac{2r}{R}=4=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

1). In ΔABC

$$\left(\sum\frac{r_a}{r_b}\right)^2+\frac{4r(4R-r)}{R^2}\ge 16.$$

2). In ΔABC

$$\sum \frac{h_a}{h_b} + \frac{27(3R+r)}{2(4R+r)} \geq \frac{27}{2}.$$

3). In ΔABC

$$\left(\sum \frac{h_a}{h_b}\right)^2 + \frac{9r}{R+r} \geq 12.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema701.

If $f\left(x+\frac{1}{x}\right) = x^3 + \frac{1}{x^3}$ then find $f(4)$.

Sanong Huayrerai, Math 8/2025

Soluție

$f\left(x+\frac{1}{x}\right) = x^3 + \frac{1}{x^3} \Leftrightarrow f\left(x+\frac{1}{x}\right) = \left(x+\frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x+\frac{1}{x}\right), x+\frac{1}{x} = 4 \Rightarrow$

$f(4) = 4^3 - 3\cdot 4 = 64 - 12 = 52$.

Remarcă.

1). If $f\left(x+\frac{1}{x}\right) = x^3 + \frac{1}{x^3}$ then find $f(\lambda), \lambda \geq 2$.

Soluție

Deducem că $f(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda$.

2). If $f\left(x+\frac{1}{x}\right) = x^4 + \frac{1}{x^4}$ then find $f(\lambda), \lambda \geq 2$.

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție

Deducem că $f(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^2 + 2$.

Problema702.

If $a,b,c > 0$, $a+b+c+2 = abc$ then

$$\sum \frac{1}{\sqrt{a+7}} \leq 1.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam, RMM 8/2025

Soluție

Cu substituția $(a,b,c) = \left(\frac{y+z}{x}, \frac{z+x}{y}, \frac{x+y}{z}\right)$ obținem:

$$LHS = \sum \frac{1}{\sqrt{a+7}} = \sum \frac{1}{\sqrt{\frac{y+z}{x}+7}} = \sum \sqrt{\frac{x}{7x+y+z}} \overset{\sum x=p}{=} \sum \sqrt{\frac{x}{6x+p}} \overset{CBS}{\leq} \sqrt{3\sum \frac{x}{6x+p}} \overset{(1)}{\leq}$$

$$\overset{(1)}{\leq} \sqrt{3\cdot\frac{1}{3}} = 1 = RHS,$$

unde $\sum \frac{x}{6x+p} \leq \frac{1}{3} \overset{reverse}{\Leftrightarrow} \sum \frac{1}{6x+p} \geq \frac{1}{p}$, care rezultă din:

$$\sum\frac{1}{6x+p}\overset{CS}{\geq}\frac{9}{\sum(6x+p)}=\frac{9}{6\sum x+3p}=\frac{9}{6p+3p}=\frac{1}{p}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=2$,

Remarcă.

If $a,b,c>0$, $a+b+c+2=abc$ and $\lambda\geq 1$ then

$$\sum\frac{1}{\sqrt{a+\lambda}}\leq\frac{3}{\sqrt{\lambda+2}}.$$

Marin Chirciu

Problema703.

If $a,b,c>0$, $abc=1$ then

$$\sum\frac{a^3}{\sqrt{a+3}}\geq\frac{3}{2}.$$

Konstantinos Geronikolas, Greece, Mathematical inequalities 8/2025

Soluție

$$LHS=\sum\frac{a^3}{\sqrt{a+3}}\overset{Holder}{\geq}\frac{\left(\sum a\right)^3}{3\sum\sqrt{a+3}}\overset{CBS}{\geq}\frac{\left(\sum a\right)^3}{3\sqrt{3\sum(a+3)}}=\frac{\left(\sum a\right)^3}{3\sqrt{3\left(\sum a+9\right)}}=\frac{p^3}{3\sqrt{3p+27}}\overset{(1)}{\geq}\frac{3}{2}=RHS,$$

unde $\frac{p^3}{3\sqrt{3p+27}}\overset{(1)}{\geq}\frac{3}{2}\Leftrightarrow 2p^3\geq 3\sqrt{3p+27}\Leftrightarrow 4p^6\geq 9(3p+27)\Leftrightarrow 4p^6-243p-2187\geq 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(p-3)\left(4p^5+12p^4+36p^3+108p^2+324p+729\right)\geq 0\Leftrightarrow p\geq 3$, vezi

$p=a+b+c\overset{AG}{\geq}3\sqrt[3]{abc}=3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$,

Remarcă.

If $a,b,c>0$, $abc=1$ and $\lambda\geq 0$ then

$$\sum\frac{a^3}{\sqrt{a+\lambda}}\geq\frac{3}{\sqrt{\lambda+1}}.$$

Marin Chirciu

Problema704.

If $a,b,c,d>0$, $abcd=1$ then

$$\sum a^5\geq\sum a.$$

Crăciun Gheorghe, Mathematical inequalities 8/2025

Soluție

$$LHS=\sum a^5\overset{Chebyshev}{\geq}\frac{1}{4}\sum a\sum a^4\overset{AG}{\geq}\sum a\cdot\sqrt[4]{a^4b^4c^4d^4}=\sum a=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=d=1$,

Remarcă.

If $a_1,a_2,...,a_n>0$, $a_1a_2...a_n=1$ and $n\in\mathbf{N}, n\geq 2$ then

$$a_1^{n+1}+a_2^{n+1}+...+a_n^{n+1}\geq a_1+a_2+...+a_n.$$

.

Marin Chirciu

Soluție

$$LHS=\sum a_1^{n+1}\overset{Chebyshev}{\geq}\frac{1}{n}\sum a_1\sum a_1^n\overset{AG}{\geq}\sum a_1\cdot\sqrt[n]{\prod a_1^n}=\sum a_1=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=d=1$,

Problema705.

Rezolvați în **R** ecuația:

$$\sqrt{2+\sqrt{3x+1}}+\sqrt{2-\sqrt{3x+1}}=\frac{4}{\sqrt{2+\sqrt{3x+1}}}.$$

Konstantinos Geronikolas, Greece, Math, Problem(234) 8/25

Soluție

Condiții de existență: $x\in\left[-\frac{1}{3},1\right]=D$.

Cu substituția $\sqrt{3x+1}=t\geq 0$ ecuația se scrie $\sqrt{2+t}+\sqrt{2-t}=\frac{4}{\sqrt{2+t}}\Leftrightarrow 2+t+\sqrt{4-t^2}=4\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sqrt{4-t^2}=2-t\Leftrightarrow 4-t^2=(2-t)^2\Leftrightarrow 2t^2-4t=0\Leftrightarrow t\in\{0,2\}\Leftrightarrow\sqrt{3x+1}\in\{0,2\}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in\left\{\frac{-1}{3},1\right\}$.

Deducem că mulțimea soluțiilor ecuației este $S=\left\{\frac{-1}{3},1\right\}$.

Remarcă.

Fie $\lambda\geq 0$ fixat.

Rezolvați în **R** ecuația:

$$\sqrt{\lambda+\sqrt{(\lambda+1)x+1}}+\sqrt{\lambda-\sqrt{(\lambda+1)x+1}}=\frac{2\lambda}{\sqrt{\lambda+\sqrt{(\lambda+1)x+1}}}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Deducem că mulțimea soluțiilor ecuației este $S=\left\{-\frac{1}{\lambda+1},\lambda-1\right\}$.

Problema706.

In ΔABC

$$\sum\cos^6\frac{A}{2}=\frac{(4R+r)^3-3p^2(2R+r)}{32R^3}.$$

Adil Abdullayev, Baku, Azerbaijan, RMM 8/2025

Remarcă.

In ΔABC

$$\frac{81r}{32R}\leq\sum\cos^6\frac{A}{2}\leq\frac{81R}{128r}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Folosim inegalitatea lui Gerretsen în $\sum\cos^6\frac{A}{2}=\frac{(4R+r)^3-3p^2(2R+r)}{32R^3}$

Problema707.

In ΔABC

$$\sum\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}\leq\frac{4R}{r}-2.$$

Adil Abdullayev, Baku, Azerbaijan, RMM 8/2025

Soluție

$$LHS=\sum\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}=\sum\frac{2\cos\frac{A}{2}}{\sin A}=\sum\frac{2\cos\frac{A}{2}}{\frac{a}{2R}}=4R\sum\frac{\cos\frac{A}{2}}{a}\overset{CBS}{\leq}4R\sqrt{\sum\frac{1}{a^2}\sum\cos^2\frac{A}{2}}\overset{Steinig}{\leq}$$

$$\overset{Steinig}{\leq}4R\sqrt{\frac{1}{4r^2}\cdot\frac{9}{4}}=4R\cdot\frac{3}{4r}=\frac{3R}{r}\overset{Euler}{\leq}\frac{4R}{r}-2=RHS.$$

Remarcă.

In ΔABC

$$6\leq\sum\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}\leq\frac{3R}{r}.$$

Marin Chirciu

Problema708.

If $f:(0,\infty)\times(0,\infty)\to(0,\infty)$ then :

$$\left(\frac{x^2}{\left(y+f(x+y)\right)^2}+2\right)\left(\frac{y^2}{\left(x+f(x+y)\right)^2}+2\right)\left(\frac{f^2(x+y)}{(x+y)^2}+2\right)\geq\frac{27}{4},\forall x,y,z\in(0,\infty).$$

D.M.Bătinețu-Giurgiu, Neculai Stanciu, RMM 8/2025

Soluție

Lema

If $a,b,c,t\geq 0$

$$\prod\left(a^2+t\right)\geq\frac{3}{4}(a+b+c)^2t^2.$$

Hojoo Lee Inequality

$$LHS=\left(\frac{x^2}{\left(y+f(x+y)\right)^2}+2\right)\left(\frac{y^2}{\left(x+f(x+y)\right)^2}+2\right)\left(\frac{f^2(x+y)}{(x+y)^2}+2\right)\overset{HojooLee}{\geq}$$

$$\overset{HojooLee}{\geq}\frac{3}{4}\cdot 4\left(\frac{x}{y+f(x+y)}+\frac{y}{x+f(x+y)}+\frac{f(x+y)}{x+y}\right)^2\overset{(1)}{\geq}\frac{27}{4},$$

unde $\frac{3}{4}\cdot 4\left(\frac{x}{y+f(x+y)}+\frac{y}{x+f(x+y)}+\frac{f(x+y)}{x+y}\right)^2\overset{(1)}{\geq}\frac{27}{4}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{x}{y+f(x+y)}+\frac{y}{x+f(x+y)}+\frac{f(x+y)}{x+y}\geq\frac{3}{2}$, care rezultă din:

$$\frac{x}{y+f(x+y)}+\frac{y}{x+f(x+y)}+\frac{f(x+y)}{x+y}=\frac{x}{y+a}+\frac{y}{x+a}+\frac{a}{x+y}=$$

$$=\frac{x^2}{xy+xa}+\frac{y^2}{xy+ya}+\frac{a^2}{xa+ya}\overset{CS}{\geq}\frac{(x+y+a)^2}{2xy+2xa+2ya}\overset{(2)}{\geq}\frac{3}{2},$$

unde $\frac{(x+y+z)^2}{2xy+2xa+2ya}\overset{(2)}{\geq}\frac{3}{2}\Leftrightarrow(x+y+a)^2\geq 3(xy+xa+ya)$, $a=f(x,y)$,adevărat,

cu egal pentru $x=y=f(x+y)$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă:

$\frac{x}{y+f(x,y)}=\frac{y}{x+f(x,y)}=\frac{f(x,y)}{x+y}=\frac{2}{\sqrt{2}}$ și $x=y=f(x+y)$, contradicție.

Remarcă.

If $f:(0,\infty)\times(0,\infty)\to(0,\infty)$ then :

$$\left(\frac{x^2}{(y+f(x+y))^2}+\lambda\right)\left(\frac{y^2}{(x+f(x+y))^2}+\lambda\right)\left(\frac{f^2(x+y)}{(x+y)^2}+\lambda\right)\geq\frac{27}{16}\cdot\lambda^2,\forall x,y,z\in(0,\infty).$$

Marin Chirciu

Problema709.

If $0<x,y,z<1$ then

$$\sum\frac{x^2}{\sin y}>\sin(x+y+z).$$

Crăciun Gheorghe, Mathematical Inequalities 8/2025

Soluție

$$LHS=\sum\frac{x^2}{\sin y}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum x\right)^2}{\sum\sin y}\overset{y>\sin y}{>}\frac{\left(\sum x\right)^2}{\sum y}=\frac{\left(\sum x\right)^2}{\sum x}=\sum x\overset{p>\sin p}{>}\sin\sum x=RHS.$$

Remarcă.

If $0<x,y,z<1$ and $n\in\mathbf{N}$ then

$$\sum\frac{x^{n+1}}{\sin y}>3\left(\frac{\sin\sum x}{3}\right)^n.$$

Marin Chirciu

Problema710.

Solve in $\mathbf{R}$ the equation:

If $a,b,c>0$, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=a+b+c$ then find max of

$$P=\sum\frac{1}{(2a+b+c)^2}.$$

Kunihiko Chikaya, Japan, Mathematical Inequalities 8/2025

Soluție

$$2a+b+c=(a+b)+(a+c)\overset{AG}{\geq}2\sqrt{(a+b)(a+c)}\Rightarrow\frac{1}{(2a+b+c)^2}\leq\frac{1}{4(a+b)(a+c)}.$$

$$P=\sum\frac{1}{(2a+b+c)^2}\leq\sum\frac{1}{4(a+b)(a+c)}=\frac{1}{4}\frac{\sum(b+c)}{\prod(b+c)}=\frac{1}{4}\frac{2\sum a}{\prod(b+c)}=$$

$$=\frac{\sum a}{2\prod(b+c)}\overset{Lema 8/9}{\leq}\frac{\sum a}{2\cdot\frac{8}{9}\sum a\sum bc}=\frac{9}{16\sum bc}\overset{\sum bc\geq3}{\leq}\frac{9}{16\cdot3}=\frac{3}{16}.$$

Am folosit mai sus $\sum bc\geq3$, care rezultă din:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=a+b+c\Leftrightarrow\frac{\sum bc}{abc}=\sum a\Leftrightarrow\sum bc=abc\sum a$$

Din $\left(\sum bc\right)^2\geq3abc\sum a$ și $\sum bc=abc\sum a\Rightarrow\left(\sum bc\right)^2\geq3\sum bc\Leftrightarrow\sum bc\geq3$.

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a=b=c=1$.

Din $P\le\frac{3}{16}$, cu egal pentru $a=b=c=1$, deducem că $\max P=\frac{3}{16}$ pentru $a=b=c=1$.

Remarcă.

If $a,b,c>0$, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=a+b+c$ then find max of

$$P=\sum\frac{1}{(a+b)(a+c)}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Deducem că $\max P=\frac{3}{16}$ pentru $a=b=c=1$.

Problema711.

If $a,b,c>0$, $a+b+c+2=abc$ then

$$\sum\sqrt{a}\le\frac{3}{2}\sqrt{abc}.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam, RMM 8/2025

Soluție

$\sum\sqrt{a}\le\frac{3}{2}\sqrt{abc}\Leftrightarrow\sum\frac{2}{\sqrt{bc}}\le 3$.

Cu substituția $(a,b,c)=\left(\frac{y+z}{x},\frac{z+x}{y},\frac{x+y}{z}\right)$ obținem:

$$\frac{2}{\sqrt{bc}}=2\sqrt{\frac{y}{z+x}\frac{z}{x+y}}=2\sqrt{\frac{z}{z+x}\frac{y}{x+y}}\overset{AG}{\le}\frac{z}{z+x}+\frac{y}{x+y}.$$

Rezultă $\sum\frac{2}{\sqrt{bc}}\le\sum\left(\frac{z}{z+x}+\frac{y}{x+y}\right)=3$.

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $x=y=z\Leftrightarrow a=b=c=2$.

Remarcă.

1). If $a,b,c>0$, $a+b+c+2=abc$ then

$$\sum\frac{1}{a}\ge\frac{3}{2}.$$

Soluție

Cu substituția $(a,b,c)=\left(\frac{y+z}{x},\frac{z+x}{y},\frac{x+y}{z}\right)$ obținem:

$$LHS=\sum\frac{1}{a}=\sum\frac{x}{y+z}\overset{Nesbitt}{\ge}\frac{3}{2}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $x=y=z\Leftrightarrow a=b=c=2$.

2). If $a,b,c>0$, $a+b+c+2=abc$ and $n\in\mathbf{N}$ then

$$\sum\frac{1}{a^n}\ge\frac{3}{2^n}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Pentru $n=0$ se obține egalitatea3=3.

Pentru $n=1$ avem $\sum \frac{1}{a} \geq \frac{3}{2}$, vezi mai jos.

În continuare fie $n \geq 2$.

Cu substituția $(a,b,c)=\left(\frac{y+z}{x},\frac{z+x}{y},\frac{x+y}{z}\right)$ obținem:

$$LHS=\sum \frac{1}{a^n} \overset{Holder}{\geq} \frac{\left(\sum \frac{1}{a}\right)^n}{3^{n-1}} = \frac{\left(\sum \frac{x}{y+z}\right)^n}{3^{n-1}} \overset{Nesbitt}{\geq} \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n}{3^{n-1}} = \frac{3}{2^n} = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z \Leftrightarrow a=b=c=2$.

3). If $a,b,c>0$, $a+b+c+2=abc$ then

$$\sum a \geq 6.$$

Soluție

Cu substituția $(a,b,c)=\left(\frac{y+z}{x},\frac{z+x}{y},\frac{x+y}{z}\right)$ obținem:

$$LHS=\sum a = \sum \frac{y+z}{x} \overset{AG}{\geq} 6 = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z \Leftrightarrow a=b=c=2$.

4). If $a,b,c>0$, $a+b+c+2=abc$ and $n \in \mathbf{N}$ then

$$\sum a^n \geq 3 \cdot 2^n.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție

Pentru $n=0$ se obține egalitatea 3=3.

Pentru $n=1$ avem $\sum a \geq 6$, vezi mai jos.

În continuare fie $n \geq 2$.

Cu substituția $(a,b,c)=\left(\frac{y+z}{x},\frac{z+x}{y},\frac{x+y}{z}\right)$ obținem:

$$LHS=\sum a^n \overset{Holder}{\geq} \frac{\left(\sum a\right)^n}{3^{n-1}} = \frac{\left(\sum \frac{y+z}{x}\right)^n}{3^{n-1}} \overset{AG}{\geq} \frac{6^n}{3^{n-1}} = 3 \cdot 2^n = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z \Leftrightarrow a=b=c=2$.

Problema712.

If $x,y,z>0$, $xy+yz+zx+2xyz=1$ then

$$\sum \sqrt{1-x^2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam, RMM 8/2025

Soluție

Lema.

If $x,y,z>0$, $xy+yz+zx+2xyz=1$ then

$$1).\ xyz \leq \frac{1}{8};$$

$$2).\ xy+yz+zx \geq \frac{3}{4};$$

$$3).\ x^2+y^2+z^2\geq\frac{3}{4}.$$

Demonstrație

1). $1=xy+yz+zx+2xyz\overset{AG}{\geq}4\sqrt[4]{xy\cdot yz\cdot zx\cdot 2xyz}=4\sqrt[4]{2(xyz)^3}\Rightarrow xyz\leq\frac{1}{8}$;

2). $xy+yz+zx+2xyz=1\Leftrightarrow xy+yz+zx=1-2xyz\overset{xyz\leq\frac{1}{8}}{\geq}1-2\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{4}$;

3). $x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx\geq\frac{3}{4}$.

$$LHS=\sum\sqrt{1-x^2}\overset{CBS}{\leq}\sqrt{3\sum(1-x^2)}=\sqrt{3\left(3-\sum x^2\right)}\overset{Lema}{\leq}\sqrt{3\left(3-\frac{3}{4}\right)}=\frac{3\sqrt{3}}{2}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=\frac{1}{2}$.

Remarcă.

If $x,y,z>0$, $xy+yz+zx+2xyz=1$ and $\lambda\geq\frac{1}{4}$ then

$$\sum\sqrt{\lambda-x^2}\leq\frac{3\sqrt{4\lambda-1}}{2}.$$

Marin Chirciu

Problema713.

Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația

$$2\left(x^2-3x+2\right)=3\sqrt{x^3+8}.$$

Matematika v škole, Concursul GM-1994

Soluție

Condiții de existență: $x^2-3x+2\geq0, x^3+8\geq0\Leftrightarrow x\in[-2,1]\cup[2,\infty)=D$.

Cu substituția $(a,b)=\left(x^2-2x+4,x+2\right)$ ecuația se scrie $2(a-b)=3\sqrt{ab}$, $a>0,b\geq0$.

Ridicând la pătrat $2(a-b)=3\sqrt{ab}$ obținem: $4(a-b)^2=9ab\Leftrightarrow4\left(a^2-2ab+b^2\right)=9ab\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4a^2-17ab+4b^2=0\Leftrightarrow\frac{a}{b}\in\left\{\frac{1}{4},4\right\}$.

Dacă $\frac{a}{b}=\frac{1}{4}$, atunci $\frac{x^2-2x+4}{x+2}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow4x^2-9x+14=0\Leftrightarrow x\notin\mathbf{R}$.

Dacă $\frac{a}{b}=4$, atunci $\frac{x^2-2x+4}{x+2}=4\Leftrightarrow x^2-6x-4=0\Leftrightarrow x=3\pm\sqrt{13}\in D$.

Deducem că mulțimea soluțiilor ecuației este $\left\{3-\sqrt{13},3+\sqrt{13}\right\}$.

Remarcă.

1). Fie $1\leq\lambda\leq8$ fixat. Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația:

$$2\left(x^2-(\lambda+1)x+\lambda^2-\lambda\right)=3\sqrt{x^3+\lambda^3}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Deducem că mulțimea soluțiilor ecuației este $\left\{\frac{\lambda+4\pm\sqrt{-3\lambda^2+24\lambda+16}}{2}\right\}$.

Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația:

$$2\left(x^2-2x\right)=3\sqrt{x^3+1}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Cazul $\lambda=1$ în problema de mai sus.

Problema714.

Să se calculeze suma

$$\frac{n+2}{n!}+\frac{2}{2!}+\frac{7}{3!}+\ldots+\frac{n^2-2}{n!},n\in\mathbf{N},n\geq 2.$$

GM-10/1977,Matematica v școle nr.3/1977, Concursul GM-1994

Soluție

$$S_n=\frac{n+2}{n!}+\frac{2}{2!}+\frac{7}{3!}+\ldots+\frac{n^2-2}{n!}=\frac{n+2}{n!}+\sum\frac{n^2}{n!}-\sum\frac{2}{n!}=\frac{n+2}{n!}+\sum\frac{n}{(n-1)!}-\sum\frac{2}{n!}=$$

$$=\frac{n+2}{n!}+\sum\frac{n-1+1}{(n-1)!}-\sum\frac{2}{n!}=\frac{n+2}{n!}+3+\sum\frac{n-1}{(n-1)!}+\sum\frac{1}{(n-1)!}-\sum\frac{2}{n!}=$$

$$=\frac{n+2}{n!}+3+\sum\frac{1}{(n-2)!}+\sum\frac{1}{(n-1)!}-\sum\frac{2}{n!}=\frac{n+2}{n!}+3-\frac{1}{(n-1)!}-\frac{2}{n!}=3+\frac{n+2-n-2}{n!}=3.$$

Problema715.

If $a_1,a_2,\ldots,a_n\in\mathbf{R}, a_1+2a_2+\ldots+na_n\geq\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ then

$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\geq\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Marin Chirciu, Concursul GM-1994

Soluție

$$\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right)\left(1^2+2^2+\ldots+n^2\right)\overset{CBS}{\geq}\left(a_1+2a_2+\ldots+na_n\right)^2\overset{ipoteza}{\geq}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)^2\Rightarrow$$

$$\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right)\left(1^2+2^2+\ldots+n^2\right)\geq\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right)\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)\geq\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\geq\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $\left(a_1,a_2,\ldots,a_n\right)=(1,2,\ldots,n)$.

Problema716.

In ΔABC

$$\sum\frac{r_a}{m_a}\geq 4-\frac{2r}{R}.$$

Konstantinos Geronikolas, Greece, RMM 8/2025

Soluție

$$LHS=\sum\frac{r_a}{m_a}\overset{Panaitopol}{\geq}\sum\frac{\frac{S}{p-a}}{\frac{Rp}{a}}=\frac{S}{Rp}\sum\frac{a}{p-a}=\frac{rp}{Rp}\cdot\frac{2(2R-r)}{r}=\frac{2(2R-r)}{R}=4-\frac{2r}{R}=RHS.$$

Remarcă.

In ΔABC

$$1).\ \sum\frac{r_b+r_c}{m_a}\geq 4\left(1+\frac{r}{R}\right).$$

$$2).\ \sum\frac{r_a}{m_b+m_c}\geq\frac{6r^2}{R^2}.$$

Soluție

$$LHS=\sum\frac{r_a}{m_b+m_c}\overset{Panaitopol}{\geq}\sum\frac{\frac{S}{p-a}}{\frac{Rp}{b}+\frac{Rp}{c}}=\frac{S}{Rp}\sum\frac{\frac{1}{p-a}}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}=\frac{rp}{Rp}\sum\frac{bc}{(b+c)(p-a)}=$$

$$=\frac{r}{R}\cdot\frac{p^4+p^2\left(32R^2+4Rr+2r^2\right)+r(4R+r)^3}{2p^2\left(p^2+r^2+2Rr\right)}\overset{(1)}{\geq}\frac{r}{R}\cdot\frac{6r}{R}=\frac{6r^2}{R^2}=RHS.$$

$$3).\ \sum\frac{r_b+r_c}{m_b+m_c}\geq\frac{6r}{R}.$$

$$4).\ \sum\frac{h_a}{m_a}\geq\frac{6r}{R}.$$

$$5).\ \sum\frac{h_b+h_c}{m_a}\geq 6\cdot\left(\frac{2r}{R}\right)^2.$$

$$6).\ \sum\frac{h_a}{m_b+m_c}\geq\frac{6r^2}{R^2}.$$

$$7)\ \sum\frac{h_b+h_c}{m_b+m_c}\geq\frac{6r}{R}$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

.**Problema717.**

In ΔABC

$$\sum\frac{\ln^2 a}{\ln(b+c-a)}\geq\ln(abc).$$

Crăciun Gheorghe, Mathematical Inequalities 8/2025

Remarca.

In ΔABC

$$\sum\frac{\ln^{k+1}a}{\ln(b+c-a)}\geq\frac{\ln^k(abc)}{3^{k-1}},k\in\mathbf{N}^*.$$

Marin Chirciu

Soluție

$$LHS=\sum\frac{\ln^{k+1}a}{\ln(b+c-a)}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum\ln a\right)^{k+1}}{3^{k-1}\sum\ln(b+c-a)}=\frac{\left(\ln(abc)\right)^{k+1}}{3^{k-1}\ln\prod(b+c-a)}=\frac{\left(\ln(abc)\right)^{k+1}}{3^{k-1}\ln\prod(b+c-a)}=$$

$$=\frac{\left(\ln(abc)\right)^{k+1}}{3^{k-1}\ln\prod(b+c-a)}\overset{(1)}{\geq}\frac{\ln^k(abc)}{3^{k-1}}=RHS\text{, unde }\frac{\left(\ln(abc)\right)^{k+1}}{3^{k-1}\ln\prod(b+c-a)}\overset{(1)}{\geq}\frac{\ln^k(abc)}{3^{k-1}}$$

$\Leftrightarrow \ln(abc)\geq\ln(8r^2p)\Leftrightarrow abc\geq 8r^2p\Leftrightarrow 4Rrp\geq 8r^2p\Leftrightarrow R\geq 2r$,(Euler).

Problema718.

In ΔABC

$$\sum\frac{a\cdot w_a^2}{p^2(p-a)}\leq 2.$$

Francz Adalbert, Arad, GM-8/1988

Soluție.

Lema.

In ΔABC

$$\sum\frac{a\cdot w_a^2}{p^2(p-a)}=16Rr\sum\frac{1}{(b+c)^2}.$$

$$LHS=\sum\frac{a\cdot w_a^2}{p^2(p-a)}=16Rr\sum\frac{1}{(b+c)^2}\overset{AG}{\leq}16Rr\sum\frac{1}{4bc}=4Rr\cdot\frac{2p}{4Rrp}=2.$$

Remarcă.

In ΔABC

$$54r^2\leq\sum\frac{a\cdot w_a^2}{p-a}\leq 2p^2.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosim inegalitatea lui Gerretsen și $\sum\frac{a\cdot w_a^2}{p^2(p-a)}=16Rr\sum\frac{1}{(b+c)^2}$

Problema719.

In ΔABC

$$\sum\frac{m_a^2}{r_br_c}\leq 1+\frac{R}{r}.$$

Adil Abdullayev, Azerbaijan, RMM 8/2025

Soluție

$$LHS=\sum\frac{m_a^2}{r_br_c}=\frac{p^2(R+4r)-r(4R+r)^2}{p^2r}=\frac{R+4r}{r}-\frac{(4R+r)^2}{p^2}\overset{Gerretsen}{\leq}\frac{R+4r}{r}-\frac{(4R+r)^2}{\frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}}=$$

$$=\frac{R+4r}{r}-\frac{2(2R-r)}{R}=\frac{R^2+2r^2}{Rr}=\frac{2r}{R}+\frac{R}{r}\overset{Euler}{\leq}1+\frac{R}{r}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

In ΔABC

$$3\leq\sum\frac{m_a^2}{r_br_c}\leq\frac{2r}{R}+\frac{R}{r}.$$

In ΔABC

$$1).\ \frac{6r}{R} \le \sum \frac{m_a^2}{h_b h_c} \le 3.$$

$$2),\ \sum \frac{m_a^2}{h_b h_c} \le 3 \le \sum \frac{m_a^2}{r_b r_c}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema720.
Solve in real numbers the equation:

$$x^2 = 2\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x^2-4}.$$

Amir Sofi, Kosovo,RMM 8/2025

Soluție

$$x^2 = 2\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x^2-4} \overset{CBS}{\le} \sqrt{\left(2^2+1^2\right)\left(x^2-1+x^2-4\right)} = \sqrt{5\left(2x^2-5\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 \le \sqrt{5\left(2x^2-5\right)} \Leftrightarrow x^4 \le 5\left(2x^2-5\right) \Leftrightarrow x^4 - 10x^2 + 25 \le 0 \Leftrightarrow \left(x^2-5\right)^2 \le 0 \Leftrightarrow x^2 = 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5}.$$

Mulțimea soluțiilor ecuației este $\left\{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right\}$.

Remarcă.
Solve in real numbers the equation:

$$x^2 = \lambda\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x^2-\lambda^2}.$$

Marin Chirciu

Mulțimea soluțiilor ecuației este $\left\{-\sqrt{\lambda^2+1}, \sqrt{\lambda^2+1}\right\}$.

Problema721.
If $x, y, z > 0$ then

$$\sum \frac{yz}{x} \ge \sqrt{3\sum x^2}.$$

Mathematical Inequalities 8/2025

Soluție

$$\sum \frac{yz}{x} \ge \sqrt{3\sum x^2} \Leftrightarrow \left(\sum \frac{yz}{x}\right)^2 \ge 3\sum x^2 \Leftrightarrow \frac{\left(\sum y^2z^2\right)^2}{x^2y^2z^2} \ge 3\sum x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum y^2z^2\right)^2 \ge 3x^2y^2z^2\sum x^2.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z$.

Problema722.
If $a, b, c \ge 0$ then

$$\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}} \le \sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}}.$$

Kunihiko Chikaya, Japan, Mathematical Inequalities 8/2025

Soluție

$$RHS = \sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}} \overset{Lema8/9}{\ge} \sqrt[3]{\frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{9}} \overset{(1)}{\ge} \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}} = LHS,$$

unde $\sqrt[3]{\frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{9}} \overset{(1)}{\ge} \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+b+c)^2(ab+bc+ca)^2}{81} \geq \frac{(ab+bc+ca)^3}{27} \Leftrightarrow (a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$$, adevărat.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

Problema723.

If $x^3+\frac{1}{x^3}=5$,then find $x^6+\frac{5}{x^3}$.

Chew-Seong Cheong, Math 8/2025

Soluție

Avem $x^6+\frac{5}{x^3}=x^6+\frac{x^3+\frac{1}{x^3}}{x^3}=x^6+1+\frac{1}{x^6}=\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)^2-2+1=5^2-1=24$.

Remarcă.

1). If $x^3+\frac{1}{x^3}=\lambda$ and $\lambda \geq 2$ then find $x^6+\frac{\lambda}{x^3}$.

Soluție

Avem $x^6+\frac{\lambda}{x^3}=x^6+\frac{x^3+\frac{1}{x^3}}{x^3}=x^6+1+\frac{1}{x^6}=\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)^2-2+1=\lambda^2-2+1=\lambda^2-1$.

2). If $x^n+\frac{1}{x^n}=\lambda$ and $\lambda \geq 2$, $n \in \mathbf{N}$ then find $x^{2n}+\frac{\lambda}{x^n}$.

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție

Avem $x^{2n}+\frac{\lambda}{x^n}=x^{2n}+\frac{x^n+\frac{1}{x^n}}{x^n}=x^{2n}+1+\frac{1}{x^{2n}}=\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)^2-2+1=\lambda^2-2+1=\lambda^2-1$.

Problema724.

If $\begin{cases} x+y+z=4 \\ x^2+y^2+z^2=6 \\ x^4+y^4+z^4=8 \end{cases}$,then find $x^3+y^3+z^3$.

Chew-Seong Cheong,Math 8/2025

Soluție

Avem $\sum xy=\frac{\left(\sum x\right)^2-\sum x^2}{2}=\frac{4^2-6}{2}=5$.

$\sum x^3=\sum x\sum x^2-\sum xy\sum x+3xyz=4\cdot 6-5\cdot 4+3xyz=4+3xyz \Leftrightarrow \sum x^3=4+3xyz$,(1).

$\sum x^4=\sum x\sum x^3-\sum xy\sum x^2+xyz\sum x \Leftrightarrow 8=4\sum x^3-5\cdot 6+4xyz \Leftrightarrow \sum x^3+xyz=\frac{19}{2}$,(2).

Din(1) și (2)$\Rightarrow \sum x^3=\frac{65}{8}$.

Remarcă.

1). Let be $\lambda \geq 0$ fixed. If $\begin{cases} x+y+z=\lambda \\ x^2+y^2+z^2=\lambda+2 \\ x^4+y^4+z^4=\lambda+4 \end{cases}$,then find $x^3+y^3+z^3$.

Soluție

Obținem: $\sum x^3 = \dfrac{-\lambda^4 + 6\lambda^3 + 9\lambda^2 - 6\lambda + 12}{8\lambda}$.

2). Let be $\lambda > 0$ fixed. If $\begin{cases} x+y+z=\lambda \\ x^2+y^2+z^2=2\lambda \\ x^4+y^4+z^4=4\lambda \end{cases}$, then find $x^3+y^3+z^3$.

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție

Obținem: $\sum x^3 = \dfrac{-\lambda^3 + 10\lambda^2 - 8\lambda + 24}{8}$.

Problema725.

In cubul $ABCDA'B'C'D'$ fie M mijlocul lui (BC) și N mijlocul lui $(C'D')$.

Arătați că $AM \perp B'N$.

Sorin Peligrad, Pitești, Concurs- GM-1994

Soluție

Fie P mijlocul lui (CD) și $\{E\} = AM \cap BP$.

Rezultă $\Delta ABM \equiv \Delta BCP \Rightarrow \sphericalangle AMB \equiv \sphericalangle BPC \Rightarrow MCPE$ este patrulater inscriptibil $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sphericalangle PEM = 90^\circ \Rightarrow AM \perp BP$, $BP \parallel B'N \Rightarrow AM \perp B'N$.

Problema726.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=3$ and $k>0$

$$\sum \frac{x}{\sqrt{x^2+k}} \le \frac{3}{\sqrt{k+1}}.$$

Konstantinos Geronikolas, Greece, Mathematical Inequalities 8/2025

Soluție

Aplicând inegalitatea lui Jensen pentru funcția concavă $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+k}}$, $x>0$ obținem:

$$LHS = \sum \frac{x}{\sqrt{x^2+k}} = f(x)+f(y)+f(z) \overset{Jensen}{\le} 3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) = 3f(1) = \frac{3}{\sqrt{k+1}} = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1$.

Remarcă.

In ΔABC

$$1).\ \sum \frac{1}{\sqrt{3r_a^2+9r^2}} \le \frac{1}{2r}.$$

Soluție.

Lema.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=3$

$$\sum \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} \le \frac{3}{2}.$$

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum \dfrac{r}{r_a} = 1 \Leftrightarrow \sum \dfrac{3r}{r_a} = 3$.

Folosind **Lema** pentru $(x,y,z)=\left(\frac{3r}{r_a},\frac{3r}{r_b},\frac{3r}{r_c}\right)$ obținem: $\sum\frac{1}{\sqrt{3r_a^2+9r^2}}\le\frac{1}{2r}$

$$2).\ \sum\frac{1}{\sqrt{3h_a^2+9r^2}}\le\frac{1}{2r}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Lema.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=3$

$$\sum\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}\le\frac{3}{2}.$$

Folosind **Lema** pentru $(x,y,z)=\left(\frac{3r}{h_a},\frac{3r}{h_b},\frac{3r}{h_c}\right)$ obținem: $\sum\frac{1}{\sqrt{3h_a^2+9r^2}}\le\frac{1}{2r}$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema727.

Solve in real numbers the equation:

$$\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+2=\sqrt[3]{16(x+y+2)}.$$

Panagiotis Danousis, Greece, MathAtelier 8/2025

Soluție

Lema.

If x,y

$$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\le\sqrt[3]{4(a+b)}.$$

Soluție

Cu substituția $\left(\sqrt[3]{a},\sqrt[3]{b}\right)=(u,v)$ avem $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\le\sqrt[3]{4(a+b)}\Leftrightarrow u+v\le\sqrt[3]{4\left(u^3+v^3\right)}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(u+v)^3\le4\left(u^3+v^3\right)\Leftrightarrow(u+v)^3\le4(u+v)\left(u^2-uv+v^2\right)\Leftrightarrow(u+v)^2\le4\left(u^2-uv+v^2\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(u-v)^2\ge0$, cu egal pentru $u=v\Leftrightarrow a=b$.

Folosind **Lema** pentru $(a,b)=(x,1)$ și $(a,b)=(y,1)$ obținem:

$\sqrt[3]{x}+1\le\sqrt[3]{4(x+1)}$, cu egal pentru $x=1$ și $\sqrt[3]{y}+1\le\sqrt[3]{4(y+1)}$, cu egal pentru $y=1\Rightarrow$

$\Rightarrow\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+2\le\sqrt[3]{4(x+1)}+\sqrt[3]{4(y+1)}\overset{Lema}{\le}\sqrt[3]{4\left(4(x+1)+4(y+1)\right)}=\sqrt[3]{16(x+y+2)}.$

Deducem că $(x,y)=(1,1)$ este soluția unică a ecuației.

Remarcă.

Solve in real numbers the equation:

$$\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}+\sqrt[3]{t}+4=4\sqrt[3]{x+y+z+t+4}.$$

Marin Chirciu

Deducem că $(x,y,z,t)=(1,1,1,1)$ este soluția unică a ecuației.

Problema728.

If $a,b,c>1$, $\begin{cases}a^3+2a^2+3a+4=0\\ b^3+2b^2+3b+4=0\\ c^3+2c^2+3c+4=0\end{cases}$, then find $\prod\left(1+\frac{2}{a-1}\right)$.

Sanong Huayrerai, Math 8/2025

Soluție

a,b,c sunt rădăcinile ecuației $x^3+2x^2+3x+4=0$.

Relațiile lui Viete $\sum a=-2, \sum ab=3, abc=-4$.

Calculăm $\prod\left(1+\frac{2}{a-1}\right)=\prod\frac{a+1}{a-1}=\frac{\prod(a+1)}{\prod(a-1)}=\frac{r+q+p+1}{r-q+p-1}=\frac{-4+3-2+1}{-4-3-2-1}=\frac{-2}{-10}=\frac{1}{5}$.

Remarcă.

Let be $\lambda\geq 0$ fixed. If $a,b,c>1$, $\begin{cases} a^3+\lambda a^2+(\lambda+1)a+\lambda+2=0 \\ b^3+\lambda b^2+(\lambda+1)b+\lambda+2=0 \\ c^3+\lambda c^2+(\lambda+1)c+\lambda+2=0 \end{cases}$, then find $\prod\left(1+\frac{2}{a-1}\right)$.

Marin Chirciu

Soluție

a,b,c sunt rădăcinile ecuației $x^3+\lambda x^2+(\lambda+1)x+\lambda+2=0$.

Relațiile lui Viete $\sum a=-\lambda, \sum ab=\lambda+1, abc=-\lambda-2$.

Deducem că $\prod\left(1+\frac{2}{a-1}\right)=\frac{\lambda}{3\lambda+4}$.

Problema729.

Solve in real numbers the equation:

$$\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{x+1}{x}}=5.$$

Sanong Huayrerai,Math 8/2025

Soluție

Cu substituția $\sqrt{\frac{x+1}{x}}=t\geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x}=t^2-1$ ecuația se scrie:

$t^2-1+t=5 \Leftrightarrow t^2+t-6=0 \Leftrightarrow (t-2)(t+3)=0 \Leftrightarrow t=2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x+1}{x}}=2 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$.

Deducem că ecuația admite soluția unică $x=\frac{1}{3}$.

Remarcă.

1). Let be $\lambda>0$ fixed. Solve in real numbers the equation: $\frac{\lambda}{x}+\sqrt{\frac{x+\lambda}{x}}=5$.

Soluție

Deducem că ecuația admite soluția unică $x=\frac{\lambda}{3}$.

2).Let be $\lambda>0$, $n>1$ fixed. Solve in real numbers the equation: $\frac{\lambda}{x}+\sqrt{\frac{x+\lambda}{x}}=n^2+n-1$.

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție

Deducem că ecuația admite soluția unică $x=\frac{\lambda}{n^2-1}$.

Problema730.

In ΔABC

$$\sum \frac{a}{\sqrt{b+c-a}} \geq \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\,.$$

Crăciun Gheorghe, Mathematical Inequalities 8/2025

Soluție

Folsind dualitatea $(a,b,c)=(y+z,z+x,x+y)$, $x,y,z>0$, inegalitatea se scrie:

$\sum \frac{y+z}{\sqrt{2x}} \geq \sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}+\sqrt{x+y}$, care rezultă din: $\sum \frac{y+z}{\sqrt{2x}} \overset{CS}{\geq} \frac{\left(\sum \sqrt{y+z}\right)^2}{\sum \sqrt{2x}} \overset{(1)}{\geq} \sum \sqrt{y+z}$,

unde $\frac{\left(\sum \sqrt{y+z}\right)^2}{\sum \sqrt{2x}} \overset{(1)}{\geq} \sum \sqrt{y+z} \Leftrightarrow \sum \sqrt{y+z} \geq \sum \sqrt{2x}$, vezi inegalitatea lui Minkowski:

$$\sum \sqrt{y+z} \overset{Minkowski}{\geq} \sqrt{\left(\sum \sqrt{y}\right)^2+\left(\sum \sqrt{z}\right)^2}=\sqrt{2\left(\sum \sqrt{x}\right)^2}=\sum \sqrt{2x}\,.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

In ΔABC

$$\sum \frac{b+c}{\sqrt{b+c-a}} \geq 6\sqrt{2r\sqrt{3}}\,.$$

Marin Chirciu

Problema731.

Sove in real numbers the equation:

$$x^4-4x^3+6x^2-4x+\sqrt{x^2-2x+17}=3\,.$$

Le Khanski, Mathematical Inequalities 8/2025

Soluție

Avem $\sqrt{x^2-2x+17} \geq 4 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$, cu egal pentru $x=1$.

Obținem $3=x^4-4x^3+6x^2-4x+\sqrt{x^2-2x+17} \geq x^4-4x^3+6x^2-4x+4=(x-1)^4+3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3 \geq (x-1)^4+3 \Leftrightarrow (x-1)^4 \leq 0 \Leftrightarrow x=1$.

Deducem că ecuația admite soluția unică $x=1$.

Remarcă.

1) Let be $\lambda \geq 0$ fixed. Sove in real numbers the equation:

$$x^4-4x^3+6x^2-4x+\sqrt{x^2-2x+\lambda^2+1}=\lambda-1\,.$$

Soluție

Avem $\sqrt{x^2-2x+\lambda^2+1} \geq \lambda \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$, cu egal pentru $x=1$.

Deducem că ecuația admite soluția unică $x=1$.

2) Sove in real numbers the equation:

$$x^4-4x^3+6x^2-4x+\sqrt{x^2-2x+37}=5\,.$$

Soluție

Cazul $\lambda=6$ în Problema de mai sus.

Deducem că ecuația admite soluția unică $x=1$.

3). Sove in real numbers the equation:

$$x^4-4x^3+6x^2-4x+\sqrt{x^2-2x+5}=1\,.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție

Cazul $\lambda=2$ în Problema de mai sus.
Deducem că ecuația admite soluția unică $x=1$.

Problema732.

If $a,b,c>0$, $abc=1$ then

$$5+\sum\frac{a}{b}\geq\prod(a+1).$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam, RMM 8/2025

Soluție

$$5+\sum\frac{a}{b}\geq\prod(a+1)\Leftrightarrow 5+\sum\frac{a}{b}\geq 1+abc+\sum a+\sum ab\overset{abc=1}{\Leftrightarrow}3+\sum\frac{a}{b}\geq\sum a+\sum ab.$$

Cu substituția $(a,b,c)=\left(\frac{x}{y},\frac{y}{z},\frac{z}{x}\right)$ inegalitatea se scrie $3+\sum\frac{yz}{x^2}\geq\sum\frac{x}{y}+\sum\frac{y}{x}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sum x^3y^3+3x^2y^2z^2\geq xyz\sum xy(x+y)$, care rezultă din inegalitatea lui Schur

$\sum a^3+3abc\geq\sum ab(a+b)$ pentru $(a,b,c)=(yz,zx,xy)$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarcă.

If $a,b,c>0$, $abc=1$ and $1\leq\lambda\leq 5$ then

$$\lambda+\sum\frac{a}{b}\geq\frac{\lambda+3}{8}\prod(a+1).$$

Marin Chirciu

Problema733

If $a,b,c>0$ then

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+1}+\frac{c}{a+1}+\frac{1}{a+b}\geq 2.$$

Crăciun Gheorghe, Mathematical Inequalities 8/2025

Soluție

$$LHS=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+1}+\frac{c}{a+1}+\frac{1}{a+b}=\frac{a^2}{ab+ac}+\frac{b^2}{bc+b}+\frac{c^2}{ca+c}+\frac{1^2}{a+b}\overset{CS}{\geq}$$

$$\overset{CS}{\geq}\frac{(a+b+c+1)^2}{ab+bc+2ca+a+2b+c}\overset{SOS}{\geq}2=RHS,$$

unde $\frac{(a+b+c+1)^2}{ab+bc+2ca+a+2b+c}\overset{SOS}{\geq}2\Leftrightarrow(a+b+c+1)^2\geq 2(ab+bc+2ca+a+2b+c)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+1-2ac-2b\geq 0\Leftrightarrow(a-c)^2+(b-1)^2\geq 0$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarcă.

1). If $a,b,c>0$ and $x,y,z\geq 0$ then

$$\left(\frac{xa}{b+c}+\frac{yb}{c+a}+\frac{zc}{a+b}\right)+\left(\frac{xb}{c+1}+\frac{yc}{a+1}+\frac{za}{b+1}\right)+\left(\frac{xc}{a+1}+\frac{ya}{b+1}+\frac{zb}{c+1}\right)+$$
$$+\left(\frac{x}{a+b}+\frac{y}{b+c}+\frac{z}{c+b}\right)\geq 2(x+y+z).$$

Soluție

Lema.

If $a,b,c>0$ then

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+1}+\frac{c}{a+1}+\frac{1}{a+b}\geq 2,(1).$$

Analog:

$$\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+1}+\frac{a}{b+1}+\frac{1}{b+c}\geq 2,(2) \text{și} \frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+1}+\frac{b}{c+1}+\frac{1}{a+b}\geq 2,(3).$$

Înmulțind inegalitatea (1) cu x, inegalitatea (2) cu y, inegalitatea (3) cu z și le adunăm.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

2).If $a,b,c>0$ then

$$\sum\left(\frac{a}{b+c}+\frac{2a}{b+1}+\frac{1}{a+b}\right)\geq 6$$

Dezvoltăări, Marin Chirciu

Problema734.

If $a,b,c>0$ and $p\geq 0$ then

$$\sum\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}\right)^p\geq 3.$$

Dorin Marghidanu, Corabia, Olt, Mathematical Inequalities 8/2025

Soluție

Lema.

If $a,b,c>0$ then

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}\geq\frac{a+b}{\sqrt{(b+c)(c+a)}}.$$

$$LHS=\sum\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}\right)^p\overset{AG}{\geq}3\sqrt[3]{\prod\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}\right)^p}\overset{Lema}{\geq}3\sqrt[3]{\left(\prod\frac{a+b}{\sqrt{(b+c)(c+a)}}\right)^p}=3\sqrt[3]{1^p}=$$

$=3=RHS$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$ sau $p=0$.

Problema735.

In ΔABC

$$\sum rr_a\sum\frac{1}{\cos^2\frac{A}{2}}\leq\frac{9R^3}{2r}.$$

Konstantinos Geronikolas, Greece, Mathematical Inequalities 8/2025

Soluție

Folosim $\sum rr_a=r(4R+r)$ și $\sum\frac{1}{\cos^2\frac{A}{2}}=\frac{p^2+(4R+r)^2}{p^2}$.

Remarcă.

1). In ΔABC

$$36r^2\leq\sum rr_a\sum\frac{1}{\cos^2\frac{A}{2}}\leq 9R^2.$$

$$2).\ 36r^2\leq\sum rh_a\sum\frac{1}{\cos^2\frac{A}{2}}\leq 9R^2.$$

Marin Chirciu

Soluție

$$3).108r^2 \le \sum rr_a \sum \frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}} \le \frac{27R^4}{4r^2}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Folosim $\sum rr_a = r(4R+r)$ și $\sum \frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}} = \frac{p^2+r^2-8Rr}{r^2}$.

$$4).\ 108r^2 \le \sum rh_a \sum \frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}} \le \frac{27R^4}{4r^2}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema736.

5046. If $x, y, z > 0$ then

$$\sum \frac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2} \ge \frac{2(x^2+y^2+z^2)}{x+y+z}.$$

Nguyen Viet Hung, Vietnam, Crux Math, May 2025

Soluție

Folosind $\sum \frac{x^3}{x^2+xy+y^2} = \sum \frac{y^3}{x^2+xy+y^2}$ rezultă $\sum \frac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2} = 2\sum \frac{x^3}{x^2+xy+y^2}$.

Obținem $2\sum \frac{x^3}{x^2+xy+y^2} \ge \frac{2(x^2+y^2+z^2)}{x+y+z} \Leftrightarrow \sum \frac{x^3}{x^2+xy+y^2} \ge \frac{x^2+y^2+z^2}{x+y+z}$, vezi:

$$\sum \frac{x^3}{x^2+xy+y^2} = \sum \frac{x^4}{x^3+x^2y+xy^2} \overset{CS}{\ge} \frac{\left(\sum x^2\right)^2}{\sum x^3 + \sum xy(x+y)} = \frac{\left(\sum x^2\right)^2}{\left(\sum x^2\right)\sum x} = \frac{\sum x^2}{\sum x}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z$.

Remarcă.

1). If $x, y, z > 0$, $x+y+z=3$ then

$$\sum \left(\frac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2}\right)^n \ge 3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Soluție

Pentru $n=0$ se obține egalitatea 3=3.

Pentru $n=1$ se obține Lema, vezi mai jos.

Pentru $n \ge 2$ se folosește inegalitatea lui Holder.

Lema.

If $x, y, z > 0$, $x+y+z=3$ and $n \in \mathbf{N}$ then

$$\sum \frac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2} \ge 2.$$

$$LHS=\sum\left(\frac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2}\right)^n\overset{Holder}{\geq}\frac{\left(\sum\frac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2}\right)^n}{3^{n-1}}\overset{Lema}{\geq}\frac{2^n}{3^{n-1}}=3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n=RHS$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $x=y=z$.

2). In ΔABC

$$\sum\frac{r_a^3+r_b^3}{r_ar_b\left(r_a^2+r_ar_b+r_b^2\right)}\geq\frac{2}{3r}.$$

Soluție

Lema.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=3$ then

$$\sum\frac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2}\geq 2.$$

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum\frac{r}{r_a}=1\Leftrightarrow\sum\frac{3r}{r_a}=3$.

Aplicând **Lema** pentru $(x,y,z)=\left(\frac{3r}{r_a},\frac{3r}{r_b},\frac{3r}{r_c}\right)$ obținem: $\sum\frac{r_a^3+r_b^3}{r_ar_b\left(r_a^2+r_ar_b+r_b^2\right)}\geq\frac{2}{3r}$

3). In ΔABC

$$\sum\frac{h_a^3+h_b^3}{h_ah_b\left(h_a^2+h_ah_b+h_b^2\right)}\geq\frac{2}{3r}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Lema.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=3$ then

$$\sum\frac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2}\geq 2.$$

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum\frac{r}{h_a}=1\Leftrightarrow\sum\frac{3r}{h_a}=3$.

Aplicând **Lema** pentru $(x,y,z)=\left(\frac{3r}{h_a},\frac{3r}{h_b},\frac{3r}{h_c}\right)$ obținem: $\sum\frac{h_a^3+h_b^3}{h_ah_b\left(h_a^2+h_ah_b+h_b^2\right)}\geq\frac{2}{3r}$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă triunghiul este echilateral.

4). If $x,y,z>0$ then

$$\sum\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}\geq x^2+y^2+z^2.$$

Soluție

Folosind $\sum\frac{x^4}{x^2+y^2}=\sum\frac{y^4}{x^2+y^2}$ rezultă $\sum\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}=2\sum\frac{x^4}{x^2+y^2}$.

5). If $x,y,z>0$ then

$$\sum\frac{x^2+y^2}{x+y}\geq x+y+z.$$

Soluție

Folosind $\frac{x^2+y^2}{x+y} \geq \frac{x+y}{2} \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0$ rezultă $\sum \frac{x^2+y^2}{x+y} \geq \sum \frac{x+y}{2} = \sum x$.

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $x = y = z$.

6). If $x, y, z > 0$, $x+y+z=3$, $n \in \mathbf{N}$ then

$$\sum\left(\frac{x^2+y^2}{x+y}\right)^n \geq 3.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție

Pentru $n=0$ se obține egalitatea 3=3.

Pentru $n=1$ se obține $\sum \frac{x^2+y^2}{x+y} \geq 3$, vezi mai jos.

Pentru $n \geq 2$ se folosește inegalitatea lui Holder.

$$LHS = \sum\left(\frac{x^2+y^2}{x+y}\right)^n \overset{Holder}{\geq} \frac{\left(\sum \frac{x^2+y^2}{x+y}\right)^n}{3^{n-1}} \overset{(1)}{\geq} \frac{3^n}{3^{n-1}} = 3 = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $x = y = z = 1$.

Problema737.

781. If $a, b, c > 0$ then

$$\sum a\sqrt{\frac{b^4+c^4}{2}} \geq \sum a^2(b+c) - 3abc.$$

Daniel Sitaru, Pentagon, 8/2025

Soluție

Lema.

If $x, y \geq 0$ then

$$x+y-\sqrt{xy} \geq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

Demonstrație

Notând $u=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$ şi $v=\sqrt{xy} \Rightarrow \begin{cases} 2u^2 = x^2+y^2 \\ v^2 = xy \end{cases} \Rightarrow 2u^2+2v^2 = x^2+y^2+2xy \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2u^2+2v^2 = (x+y)^2$.

Inegalitatea $x+y-\sqrt{xy} \geq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$ se scrie $x+y-v \geq u \Leftrightarrow x+y \geq u+v \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+y)^2 \geq (u+v)^2 \Leftrightarrow 2u^2+2v^2 \geq u^2+v^2+2uv \Leftrightarrow (u-v)^2 \geq 0$.

Folosind **Lema** pentru $(x,y) = \left(\frac{a}{b}, \frac{b}{a}\right)$ obținem:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}} \geq \sqrt{\frac{\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}}{2}} \Leftrightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{a}-1 \geq \sqrt{\frac{a^4+b^4}{2a^2b^2}} \Leftrightarrow \frac{a^2+b^2}{ab}-1 \geq \frac{1}{ab}\sqrt{\frac{a^4+b^4}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2 \geq ab+\sqrt{\frac{a^4+b^4}{2}} \Leftrightarrow c\left(a^2+b^2\right) \geq abc + c\sqrt{\frac{a^4+b^4}{2}}.$$

Sumând $c\left(a^2+b^2\right)\ge abc+c\sqrt{\frac{a^4+b^4}{2}}$ rezultă concluzia.
Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.
Remarcă.
If $a,b,c>0$, $a^2+b^2+c^2=3$ then

$$\sum\sqrt{\frac{a^4+b^4}{2}}+\sum ab\le 6.$$

Marin Chirciu

Soluție
Lema.
If $x,y\ge 0$ then

$$x+y-\sqrt{xy}\ge\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

Folosind **Lema** pentru $(x,y)=\left(\frac{a}{b},\frac{b}{a}\right)$ obținem:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}\ge\sqrt{\frac{\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}}{2}}\Leftrightarrow\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-1\ge\sqrt{\frac{a^4+b^4}{2a^2b^2}}\Leftrightarrow\frac{a^2+b^2}{ab}-1\ge\frac{1}{ab}\sqrt{\frac{a^4+b^4}{2}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2\ge ab+\sqrt{\frac{a^4+b^4}{2}}.$$

Sumând $a^2+b^2\ge ab+\sqrt{\frac{a^4+b^4}{2}}$ rezultă $\sum\left(a^2+b^2\right)\ge\sum ab+\sum\sqrt{\frac{a^4+b^4}{2}}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2\sum a^2\ge\sum ab+\sum\sqrt{\frac{a^4+b^4}{2}}\overset{\sum a^2=3}{\Leftrightarrow}2\cdot 3\ge\sum ab+\sum\sqrt{\frac{a^4+b^4}{2}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sum ab+\sum\sqrt{\frac{a^4+b^4}{2}}\le 6.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.
Problema738.
Sove in real numbers the equation:

$$\frac{1}{x^2+x+1}+\frac{1}{y^2+y+1}+\frac{1}{z^2+z+1}=4.$$

Panagiotis Danousis, Greece, MathAtelier 8/2025

Soluție
Lema.
If $x\in\mathbf{R}$ then

$$\frac{1}{x^2+x+1}\le\frac{4}{3}.$$

Demonstrațoie

$\frac{1}{x^2+x+1}\le\frac{4}{3}\Leftrightarrow 4x^2+4x+1\ge 0\Leftrightarrow(2x+1)^2\ge 0$, cu egal pentru $x=\frac{-1}{2}$.

$LHS=\sum\frac{1}{x^2+x+1}\overset{Lema}{\le}\sum\frac{4}{3}=3\cdot\frac{4}{3}=4=RHS$, cu egal pentru $x=y=z=\frac{-1}{2}$.

Deducem că ecuația admite soluția $(x,y,z)=\left(\frac{-1}{2},\frac{-1}{2},\frac{-1}{2}\right)$.

Remarcă.

1). Let be $\lambda>\frac{1}{4}$ fixed. Sove in real numbers the equation:

$$\frac{1}{x^2+x+\lambda}+\frac{1}{y^2+y+\lambda}+\frac{1}{z^2+z+\lambda}=\frac{12}{4\lambda-1}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Lema.

If $x\in\mathbf{R}$ and $\lambda>\frac{1}{4}$ then

$$\frac{1}{x^2+x+\lambda}\le\frac{4}{4\lambda-1}.$$

Demonstrațoie

$\frac{1}{x^2+x+\lambda}\le\frac{4}{4\lambda-1}\Leftrightarrow 4x^2+4x+1\ge 0\Leftrightarrow(2x+1)^2\ge 0$, cu egal pentru $x=\frac{-1}{2}$.

$LHS=\sum\frac{1}{x^2+x+\lambda}\overset{Lema}{\le}\sum\frac{4}{4\lambda-1}=3\cdot\frac{4}{4\lambda-1}=\frac{12}{4\lambda-1}=RHS$, cu egal pentru $x=y=z=\frac{-1}{2}$.

Deducem că ecuația admite soluția $(x,y,z)=\left(\frac{-1}{2},\frac{-1}{2},\frac{-1}{2}\right)$.

2). Sove in real numbers the equation:

$$\frac{1}{x^2+x+3}+\frac{1}{y^2+y+3}+\frac{1}{z^2+z+3}=\frac{12}{11}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Cazul $\lambda=3$ în Problema de mai sus.

Deducem că ecuația admite soluția $(x,y)=\left(\frac{-1}{2},\frac{-1}{2}\right)$.

3). Let be $\lambda>\frac{1}{4}$ fixed. Sove in real numbers the equation:

$$\frac{1}{x^2+x+\lambda}+\frac{1}{y^2+y+\lambda}=\frac{8}{4\lambda-1}.$$

Soluție

Lema.

If $x\in\mathbf{R}$ and $\lambda>\frac{1}{4}$ then

$$\frac{1}{x^2+x+\lambda}\le\frac{4}{4\lambda-1}.$$

$LHS=\sum\frac{1}{x^2+x+\lambda}\overset{Lema}{\le}\sum\frac{4}{4\lambda-1}=2\cdot\frac{4}{4\lambda-1}=\frac{8}{4\lambda-1}=RHS$, cu egal pentru $x=y=\frac{-1}{2}$.

Deducem că ecuația admite soluția $(x,y)=\left(\frac{-1}{2},\frac{-1}{2}\right)$.

4). Sove in real numbers the equation:

$$\frac{1}{x^2+x+2}+\frac{1}{y^2+y+2}=\frac{8}{7}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție

Cazul $\lambda=2$ în Problema de mai sus.

Deducem că ecuația admite soluția $(x,y)=\left(\frac{-1}{2},\frac{-1}{2}\right)$.

Problema739.

If $x,y,z>0$ then

$$\sum\frac{1}{x^2+2yz}\geq\frac{2}{\sum xy}+\frac{1}{\sum x^2}.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam, RMM 8/2025

Soluție

$$LHS=\sum\frac{1}{x^2+2yz}=\frac{\sum\left(y^2+2zx\right)\left(z^2+2xy\right)}{\prod\left(x^2+2yz\right)}=\frac{\sum xy\left(2\sum x^2+\sum xy\right)}{\prod\left(x^2+2yz\right)}.$$

$$\frac{\sum xy\left(2\sum x^2+\sum xy\right)}{\prod\left(x^2+2yz\right)}\geq\frac{2}{\sum xy}+\frac{1}{\sum x^2}\Leftrightarrow\frac{\sum xy\left(2\sum x^2+\sum xy\right)}{\prod\left(x^2+2yz\right)}\geq\frac{2\sum x^2+\sum xy}{\sum x^2\sum xy}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sum xy}{\prod\left(x^2+2yz\right)}\geq\frac{1}{\sum x^2\sum xy}\Leftrightarrow\sum x^2\left(\sum xy\right)^2\geq\prod\left(x^2+2yz\right)\Leftrightarrow\prod(x-y)^2\geq 0.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z$.

Remarcă.

1). If $x,y,z>0$ then

$$\sum\frac{1}{x^2+2yz}\geq\frac{9}{(x+y+z)^2}.$$

Soluție

$$LHS=\sum\frac{1}{x^2+2yz}\overset{CS}{\geq}\frac{9}{\sum\left(x^2+2yz\right)}=\frac{9}{(x+y+z)^2}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z$.

2). If $x,y,z>0$ and $\lambda\geq 0$ then

$$\sum\frac{1}{x^2+\lambda yz}\geq\frac{9}{(\lambda+1)\sum x^2}.$$

Soluție

$$LHS=\sum\frac{1}{x^2+\lambda yz}\overset{CS}{\geq}\frac{9}{\sum\left(x^2+\lambda yz\right)}=\frac{9}{\sum x^2+\lambda\sum yz}\overset{CS}{\geq}\frac{9}{\sum x^2+\lambda\sum x^2}=\frac{9}{(\lambda+1)\sum x^2}=RHS$$

.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z$.

3). If $x,y,z>0$ then

$$\sum\frac{1}{x^2+2yz}\leq\frac{1}{3}\sum\frac{1}{x^2}.$$

Marin Chirciu

Soluție

$$LHS=\sum\frac{1}{x^2+2yz}\overset{CS}{\le}\sum\frac{1}{9}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{yz}\right)=\frac{1}{9}\left(\sum\frac{1}{x^2}+2\sum\frac{1}{yz}\right)\overset{SOS}{\le}\frac{1}{9}\left(\sum\frac{1}{x^2}+2\sum\frac{1}{x^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\sum\frac{1}{x^2}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z$.

4). In ΔABC

$$\sum\frac{1}{r_a^2+2r_br_c}\ge\frac{2}{p^2}+\frac{1}{(4R+r)^2-2p^2}.$$

Lema.

If $x,y,z>0$ then

$$\sum\frac{1}{x^2+2yz}\ge\frac{9}{(x+y+z)^2}.$$

Folosind **Lema** pentru $(x,y,z)=(r_a,r_b,r_c)$ obținem:

$$\sum\frac{1}{r_a^2+2r_br_c}\ge\frac{9}{(r_a+r_b+r_c)^2}\Leftrightarrow\sum\frac{1}{r_a^2+2r_br_c}\ge\frac{9}{(4R+r)^2}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

5). In ΔABC

$$\sum\frac{1}{r_a^2+2r_br_c}\ge\frac{2}{p^2}+\frac{1}{(4R+r)^2-2p^2}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Lema.

If $x,y,z>0$ then

$$\sum\frac{1}{x^2+2yz}\ge\frac{2}{\sum xy}+\frac{1}{\sum x^2}.$$

Folosind **Lema** pentru $(x,y,z)=(r_a,r_b,r_c)$ obținem:

$$\sum\frac{1}{r_a^2+2r_br_c}\ge\frac{2}{\sum r_br_c}+\frac{1}{\sum r_a^2}\Leftrightarrow\sum\frac{1}{r_a^2+2r_br_c}\ge\frac{2}{p^2}+\frac{1}{(4R+r)^2-2p^2}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema740.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=3$ then

$$\sum\frac{y^2+z^2}{x^2+1}\ge 3.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam, RMM 8/2025

Soluție

$$\sum\frac{y^2+z^2}{x^2+1}\ge 3\Leftrightarrow\sum\left(\frac{y^2+z^2}{x^2+1}+1\right)\ge 6\Leftrightarrow\sum\frac{x^2+y^2+z^2+1}{x^2+1}\ge 6\Leftrightarrow\left(1+\sum x^2\right)\sum\frac{1}{x^2+1}\ge 6,$$

care rezultă din $\sum\frac{1}{x^2+1}\overset{CS}{\ge}\frac{9}{\sum(x^2+1)}=\frac{9}{3+\sum x^2}$.

$$\left(1+\sum x^2\right)\frac{9}{3+\sum x^2}\ge 6\Leftrightarrow\sum x^2\ge 3,\text{ vezi }\sum x^2\overset{CS}{\ge}\frac{\left(\sum x\right)^2}{3}=\frac{3^2}{3}=3.$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $x = y = z = 1$.

Remarcă.

1). If $x, y, z > 0$, $x + y + z = 3$ and $\lambda \ge 0$ then

$$\sum \frac{y^2 + z^2}{x^2 + \lambda} \ge \frac{6}{\lambda + 1}.$$

2). If $x, y, z > 0$, $x + y + z = 3$ and $\lambda \ge 0$, $n \in \mathbf{N}$ then

$$\sum \frac{y^n + z^n}{x^n + \lambda} \ge \frac{6}{\lambda + 1}.$$

3). In ΔABC

$$\sum \frac{r_a^2}{r_a^2 + 9r^2}\left(\frac{1}{r_b^2} + \frac{1}{r_c^2}\right) \ge \frac{1}{3r^2}.$$

Soluţie

Lema.

If $x, y, z > 0$, $x + y + z = 3$ then

$$\sum \frac{y^2 + z^2}{x^2 + 1} \ge 3.$$

Se cunoaşte identitatea în triunghi $\sum \frac{r}{r_a} = 1 \Leftrightarrow \sum \frac{3r}{r_a} = 3$.

Aplicând **Lema** pentru $(x, y, z) = \left(\frac{3r}{r_a}, \frac{3r}{r_b}, \frac{3r}{r_c}\right)$ obţinem:

$$\sum \frac{\frac{9r^2}{r_b^2} + \frac{9r^2}{r_c^2}}{\frac{9r^2}{r_a^2} + 1} \ge 3 \Leftrightarrow \sum \frac{\frac{1}{r_b^2} + \frac{1}{r_c^2}}{\frac{r_a^2 + 9r^2}{r_a^2}} \ge \frac{3}{9r^2} \Leftrightarrow \sum \frac{\frac{r_a^2}{r_b^2} + \frac{r_a^2}{r_c^2}}{r_a^2 + 9r^2} \ge \frac{1}{3r^2} \Leftrightarrow \sum \frac{r_a^2}{r_a^2 + 9r^2}\left(\frac{1}{r_b^2} + \frac{1}{r_c^2}\right) \ge \frac{1}{3r^2}.$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

4). In ΔABC

$$\sum \frac{h_a^2}{h_a^2 + 9r^2}\left(\frac{1}{h_b^2} + \frac{1}{h_c^2}\right) \ge \frac{1}{3r^2}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema741.

If $x, y, z > 0$, $x + y + z = 3$ then

$$\sum \frac{x^2}{yz(y+z) + 1} > \frac{12}{13}.$$

Crăciun Gheorghe, Mathematical Inequalities 8/2025

Soluţie

$$LHS = \sum \frac{x^2}{yz(y+z) + 1} = \sum \frac{x^3}{xyz(y+z) + x} \overset{xyz \le 1}{\ge} \sum \frac{x^3}{(y+z) + x} = \sum \frac{x^3}{3} = \frac{1}{3}\sum x^3 \overset{\sum x^3 \ge 3}{\ge} \frac{1}{3} \cdot 3 =$$

$$= 1 > \frac{12}{13} = RHS.$$

Am folosit mai sus: $xyz \le 1$, vezi $3 = x + y + z \ge 3\sqrt[3]{xyz} \Rightarrow xyz \le 1$ și $\sum x^3 \ge 3$, vezi

$\sum x^3 \overset{Holder}{\ge} \frac{\left(\sum x\right)^3}{9} = \frac{3^3}{9} = 3$.

Remarcă.

If $x, y, z > 0$, $x + y + z = 3$ and $n \in \mathbf{N}$ then

$$\sum \frac{x^n}{yz(y+z)+1} \ge 1.$$

Marin Chirciu

Problema742.

If $x > 0$, $x + \frac{1}{x} = 7$ then find

$$x\sqrt{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}}.$$

Sanong Huayrerai, Math 8/2025

Soluție

$\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = x + \frac{1}{x} + 2 = 7 + 2 = 9 \Rightarrow \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = 3$.

Din $x + \frac{1}{x} = 7$ și $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = 3 \Rightarrow$

$7 \cdot 3 = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \left(x\sqrt{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}}\right) + \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \left(x\sqrt{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}}\right) + 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow x\sqrt{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}} = 21 - 3 = 18$.

Remarcă.

Let be $\lambda \ge 2$ fixed. If $x > 0$, $x + \frac{1}{x} = \lambda^2 - 2$ then find

$$x\sqrt{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Deducem că $x\sqrt{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}} = \lambda^3 - 3\lambda$.

Problema743.

If $x, y, z > 0$, $x + y + z = 3$ then

$$\prod \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2} \ge 8.$$

George Apostolopoulos, Greece, Mathematical Inequalities /2024

Soluție

Lema.

If $x > 0$ then

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2} \ge 2^x.$$

Demonstrație

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}=\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right)^{x}\overset{Bernoulli}{\geq}\left(1+x\cdot\frac{1}{x}\right)^{x}=(1+1)^{x}=2^{x}.$$

$$LHS=\prod\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}\overset{Lema}{\geq}\prod 2^{x}=2^{\sum x}=2^{3}=8=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1$.

Remarcă.

1). If $x,y,z,t>0$, $x+y+z+t=4$ then

$$\prod\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}\geq 16.$$

Soluție

Lema.

If $x>0$ then

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}\geq 2^{x}.$$

$$LHS=\prod\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}\overset{Lema}{\geq}\prod 2^{x}=2^{\sum x}=2^{4}=16=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=t=1$.

2). If $x_1,x_2,...,x_n>0$, $x_1+x_2+...+x_n=n$ then

$$\prod\left(1+\frac{1}{x_1}\right)^{x_1^n}\geq 2^{n}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Lema.

If $x>0$ then

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}\geq 2^{x}.$$

$$LHS=\prod\left(1+\frac{1}{x_1}\right)^{x_1^n}\overset{Lema}{\geq}\prod 2^{x_1}=2^{\sum x_1}=2^{n}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x_1=x_2=...=x_n=1$.

3). In ΔABC

$$\prod\left(1+\frac{r_a}{3r}\right)^{\frac{9r^2}{r_a^2}}\geq 8.$$

Marin Chirciu

Soluție

Lema.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=3$ then

$$\prod\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}\geq 8.$$

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum\frac{r}{r_a}=1\Leftrightarrow\sum\frac{3r}{r_a}=3$

Folosind **Lema** pentru $(x,y,z)=\left(\frac{3r}{r_a},\frac{3r}{r_b},\frac{3r}{r_c}\right)$ obținem: $\prod\left(1+\frac{r_a}{3r}\right)^{\frac{9r^2}{r_a^2}}\geq 8$.

4). In ΔABC

$$\prod\left(1+\frac{h_a}{3r}\right)^{\frac{9r^2}{h_a^2}}\geq 8.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema744.

Solve for $x>0$ the equation:

$$x^4-x^2-2x+2=\ln\sqrt{\frac{2x}{x^2+1}}.$$

Sanong Huayrerai, Math 8/2025

Soluție

$x^4-x^2-2x+2=\ln\sqrt{\frac{2x}{x^2+1}} \Leftrightarrow (x-1)^2\left((x+1)^2+1\right)=\ln\sqrt{\frac{2x}{x^2+1}}$.

Din $(x-1)^2\left((x+1)^2+1\right)\geq 0 \Rightarrow \ln\sqrt{\frac{2x}{x^2+1}}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2+1}\geq 1 \Leftrightarrow (x-1)^2\leq 0 \Leftrightarrow x=1$.

Deducem că $x=1$ este soluția unică a ecuației.

Remarcă.

1). If $\lambda\geq 0$ fixed. Solve for $x>0$ the equation:

$$x^4+(\lambda-2)x^2-2\lambda x+\lambda+1=\ln\sqrt{\frac{2x}{x^2+1}}.$$

Soluție

Deducem că $x=1$ este soluția unică a ecuației.

2). If $\lambda\geq 0$ and $a>0$ fixed. Solve for $x>0$ the equation:

$$x^4+(\lambda-2)x^2-2\lambda x+\lambda+1=\ln\sqrt{\frac{2x}{x^2+1}}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Deducem că $x=a$ este soluția unică a ecuației.

Problema745

If $a,b,c,d>0$ then

$$\sum\frac{a^{2019}}{(b+c+d)^5}+\frac{5}{243}(a+b+c+d)\geq\frac{2}{81}\sum a^{\frac{673}{2}}.$$

Kunihiko Chikaya, Japan, Mathematical Inequalities 8/2025

Soluție

Lema.

If $a,b,c,d>0$ then

$$\frac{a^{2019}}{(b+c+d)^5}+\frac{5}{3^6}(b+c+d)\geq\frac{6}{3^5}a^{\frac{673}{2}}.$$

Demonstrație

$$\frac{a^{2019}}{(b+c+d)^5}+\frac{5}{3^6}(b+c+d)\overset{AG}{\geq}6\sqrt[6]{\frac{a^{2019}}{(b+c+d)^5}\cdot\left(\frac{1}{3^6}(b+c+d)\right)^5}=\frac{6}{3^5}a^{\frac{673}{2}}.$$

$$LHS=\sum\frac{a^{2019}}{(b+c+d)^5}+\frac{5}{243}(a+b+c+d)=\sum\left(\frac{a^{2019}}{(b+c+d)^5}+\frac{5}{3^6}(b+c+d)\right)\overset{Lema}{\geq}\sum\frac{6}{3^5}a^{\frac{673}{2}}=$$

$$=\frac{6}{3^5}\sum a^{\frac{673}{2}}\geq\frac{2}{81}\sum a^{\frac{673}{2}}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a=b=c=d=1$.

Remarcă.

If $a,b,c,d>0$ then

$$\sum\frac{a^n}{(b+c+d)^k}+\frac{k}{3^k}(a+b+c+d)\geq\frac{k+1}{3^k}\sum a^{\frac{n}{k+1}}.$$

Marin Chirciu

Problema746.

If $a,b,c>0$, $\frac{a^3}{c}+\frac{b^3}{a}+\frac{c^3}{b}=3$ then

$$\sum\frac{a}{c}(b+c)^2+12\geq 8\sum ab.$$

THCS 8/2025

Soluţie

Folosim pqr -Method.

Notăm $p=\sum a, q=\sum bc=3, r=abc$.

Avem $\prod(b+c)=pq-r$.

Obţinem $p\leq 3$, $q\leq 3$, $r\leq 1$, vezi $3=\frac{a^3}{c}+\frac{b^3}{a}+\frac{c^3}{b}\overset{Holder}{\geq}\frac{\left(\sum a\right)^3}{3\sum a}=\frac{\left(\sum a\right)^2}{3}=\frac{p^2}{3}\Rightarrow 3\geq\frac{p^2}{3}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow p\leq 3; q\leq\frac{1}{3}p^2\leq\frac{1}{3}3^2=3\Rightarrow q\leq 3; 3=\frac{a^3}{c}+\frac{b^3}{a}+\frac{c^3}{b}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{c}\cdot\frac{b^3}{a}\cdot\frac{c^3}{b}}=3\sqrt[3]{(abc)^2}=3\sqrt[3]{r^2}\Rightarrow$$

$r\leq 1$.

$$LHS=\sum\frac{a}{c}(b+c)^2+12\overset{AG}{\geq}3\sqrt[3]{\prod\frac{a}{c}(b+c)^2}+12=3\sqrt[3]{\prod(b+c)^2}+12=$$

$$=3\sqrt[3]{(pq-r)^2}+12\overset{(1)}{\geq}8q=RHS,$$

unde $3\sqrt[3]{(pq-r)^2}+12\overset{(1)}{\geq}8q\overset{r\leq 1}{\Leftrightarrow}3\sqrt[3]{(pq-1)^2}+12\geq 8q\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{(1-pq)^2}+12\geq 8q\overset{p,q\leq 3}{\Leftrightarrow}$

$$\overset{p,q\leq 3}{\Leftrightarrow}3\sqrt[3]{(1-3\cdot 3)^2}+12\geq 8q\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{8^2}+12\geq 8q\Leftrightarrow 12+12\geq 8q\Leftrightarrow q\leq 3.$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a=b=c=1$.

Remarcă.

If $a,b,c>0$, $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}=3$ and $\lambda\geq 0$ then

$$\sum\frac{a}{b}(a+b)^2+\lambda\geq\frac{\lambda+12}{3}\sum ab.$$

Marin Chirciu

Problema747.
If $m \geq 0$ then in ΔABC hods:

$$\sum \frac{a}{h_a^{2m+1}} \cot^{m+1} A \geq \frac{2}{3^m F^m}.$$

D.M.Bătinețu-Giurgiu, Mihaly Bencze, RMM 8/2025

Soluție
Lema
If $m \geq 0$ then in ΔABC hods:

$$\frac{a}{h_a^{2m+1}} \cot^{m+1} A = \frac{R^{m+1}}{2^m F^{m+1}} \frac{(a\cos A)^{m+1}}{F^m}.$$

Demonstrație

$$\frac{a}{h_a^{2m+1}} \cot^{m+1} A = \frac{a}{h_a^m} \frac{\cot^{m+1} A}{h_a^{m+1}} = \frac{a}{\left(\frac{2F}{a}\right)^m} \left(\frac{\cot A}{h_a}\right)^{m+1} = \frac{a^{m+1}}{(2F)^m} \left(\frac{\cos A}{h_a \sin A}\right)^{m+1} = \frac{1}{(2F)^m} \left(\frac{a\cos A}{h_a \sin A}\right)^{m+1} =$$

$$= \frac{1}{(2F)^m} \left(\frac{a\cos A}{\frac{2F}{bc}\sin A}\right)^{m+1} = \frac{1}{(2F)^m} \left(\frac{a\cos A}{\frac{2F}{2R}}\right)^{m+1} == \frac{1}{(2F)^m} \left(\frac{Ra\cos A}{F}\right)^{m+1} =$$

$$= \frac{R^{m+1}}{2^m F^{m+1}} \frac{(a\cos A)^{m+1}}{F^m}.$$

$$LHS = \sum \frac{a}{h_a^{2m+1}} \cot^{m+1} A \overset{Lema}{=} \frac{R^{m+1}}{2^m F^{m+1}} \sum \frac{(a\cos A)^{m+1}}{F^m} \overset{Radon}{\geq} \frac{R^{m+1}}{2^m F^{m+1}} \frac{\left(\sum a\cos A\right)^{m+1}}{\left(\sum F\right)^m} =$$

$$= \frac{R^{m+1}}{2^m F^{m+1}} \frac{\left(\frac{2F}{R}\right)^{m+1}}{(3F)^m} = \frac{2}{3^m F^m} = RHS.$$

Remarcă.
1). If $m \geq 0$ then in ΔABC hods:

$$\sum \frac{(a\cos A)^{m+1}}{h_a^m} \geq \frac{2F}{R} \left(\frac{2r}{R\sqrt{3}}\right)^m.$$

Soluție

$$LHS = \sum \frac{(a\cos A)^{m+1}}{h_a^m} \overset{Radon}{\geq} \frac{\left(\sum a\cos A\right)^{m+1}}{\left(\sum h_a\right)^m} \overset{\sum h_a \leq p\sqrt{3}}{\geq} \frac{\left(\frac{2pr}{R}\right)^{m+1}}{(p\sqrt{3})^m} = \frac{2F}{R} \left(\frac{2r}{R\sqrt{3}}\right)^m = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.
Remarcă.
If $m \geq 0$ then in ΔABC hods:

$$\sum \frac{(a\cos A)^{m+1}}{r_a^m} \geq \frac{2F}{R} \left(\frac{4F}{9R}\right)^m.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție

$$LHS=\sum\frac{(a\cos A)^{m+1}}{r_a^m}\overset{Radon}{\geq}\frac{\left(\sum a\cos A\right)^{m+1}}{\left(\sum r_a\right)^m}\overset{\sum r_a\leq\frac{9R}{2}}{\geq}\frac{\left(\frac{2F}{R}\right)^{m+1}}{\left(\frac{9R}{2}\right)^m}=\frac{2F}{R}\left(\frac{4F}{9R}\right)^m=RHS.$$

Problema748.

In ΔABC

$$\sum\sqrt{\frac{a}{b+c-a}}\geq 3.$$

Konstantinos Geronikolas, Greece, Mathematical Inequalities 8/2025

Soluție

Lema.

In ΔABC

$$\sqrt{\frac{a}{b+c-a}}\geq\frac{2a}{b+c}.$$

Demonstrație

$$\sqrt{\frac{b+c-a}{a}\cdot 1}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{b+c-a}{a}+1\right)=\frac{b+c}{2a}\Rightarrow\sqrt{\frac{a}{b+c-a}}\geq\frac{2a}{b+c}.$$

$$LHS=\sum\sqrt{\frac{a}{b+c-a}}\overset{Lema}{\geq}\sum\frac{2a}{b+c}\overset{Nesbitt}{\geq}2\cdot\frac{3}{2}=3=RHS.$$

Remarcă.

In ΔABC

$$\sum\sqrt{\frac{b+c-a}{a}}\leq\frac{3R}{2r}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Lema.

In ΔABC

$$\sqrt{\frac{b+c-a}{a}}\leq\frac{b+c}{2a}.$$

Demonstrație

$$\sqrt{\frac{b+c-a}{a}\cdot 1}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{b+c-a}{a}+1\right)=\frac{b+c}{2a}.$$

$$LHS=\sum\sqrt{\frac{b+c-a}{a}}\overset{Lema}{\leq}\sum\frac{b+c}{2a}=\frac{1}{2}\sum\frac{b+c}{a}=\frac{1}{2}\cdot\frac{p^2+r^2-2Rr}{2Rr}\overset{Gerretsen}{\leq}$$

$$\overset{Gerretsen}{\leq}\frac{4R^2+4Rr+3r^2+r^2-2Rr}{4Rr}=\frac{4R^2+2Rr+4r^2}{4Rr}=\frac{2R^2+Rr+2r^2}{2Rr}\overset{Euler}{\leq}\frac{3R^2}{2Rr}=\frac{3R}{2r}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

Problema749.

If $x,y,z>0$, $xy+yz+zx=3$ then

$$2\sum x^3+3xyz\geq 9.$$

THCS 8/2025

Soluție

Folosim pqr -Method.

Notăm $p=\sum x, q=\sum xy=3, r=xyz$.
Avem $\sum x^3=p^3-3pq+3r, q=3 \Rightarrow \sum x^3=p^3-9p+3r$.
Inegalitatea se scrie: $2\left(p^3-9p+3r\right)+3r\geq 9 \Leftrightarrow 2p^3-18p+9r\geq 9$.
Folosind inegalitatea lui Schur $p^3+9r\geq 4pq, q=3 \Rightarrow p^3+9r\geq 12p \Leftrightarrow 9r\geq 12p-p^3$ este suficient să arătăm că:
$2p^3-18p+12p-p^3\geq 9 \Leftrightarrow p^3-6p-9\geq 0 \Leftrightarrow (p-3)\left(p^2-3\right)\geq 0$, care rezultă din $p\geq 3$, vezi $p^2=\left(\sum x\right)^2\geq 3\sum xy=3\cdot 3=9 \Rightarrow p\geq 3$.
Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $x=y=z=1$.

Remarcă.
1). If $x,y,z>0$, $xy+yz+zx=3$ and $6\lambda\geq n>0$ then
$$\lambda\sum x^3+nxyz\geq 3\lambda+n.$$
Soluție
2). If $x,y,z>0$, $xy+yz+zx=3$ and $\lambda\geq\frac{1}{6}$ then
$$\lambda\sum x^3+xyz\geq 3\lambda+1.$$

3). In ΔABC
$$2\sum\tan^3\frac{A}{2}+\frac{3r}{p}\geq\sqrt{3}.$$
Soluție
Lema.
If $x,y,z>0$, $xy+yz+zx=3$ then
$$2\sum x^3+3xyz\geq 9.$$
Se cunoaşte identitatea în triunghi $\sum\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=1 \Leftrightarrow \sum\sqrt{3}\tan\frac{B}{2}\cdot\sqrt{3}\tan\frac{C}{2}=3$.
Folosind **Lema** pentru $(x,y,z)=\left(\sqrt{3}\tan\frac{A}{2},\sqrt{3}\tan\frac{B}{2},\sqrt{3}\tan\frac{C}{2}\right)$ obținem:
$$2\sum\left(\sqrt{3}\tan\frac{A}{2}\right)^3+3\cdot\sqrt{3}\tan\frac{A}{2}\cdot\sqrt{3}\tan\frac{B}{2}\cdot\sqrt{3}\tan\frac{C}{2}\geq 9 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\sum 3\sqrt{3}\tan^3\frac{A}{2}+9\cdot\sqrt{3}\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\geq 9 \Leftrightarrow 2\sum 3\sqrt{3}\tan^3\frac{A}{2}+9\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{r}{p}\geq 9 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sum\tan^3\frac{A}{2}+3\sqrt{3}\cdot\frac{r}{p}\geq 3 \Leftrightarrow 2\sum\tan^3\frac{A}{2}+\frac{3r}{p}\geq\sqrt{3}.$$
Remarcă.
4). In acute ΔABC
$$2\sum\cot^3 A+3\cdot\frac{p^2-(2R+r)^2}{2pr}\geq\sqrt{3}.$$
Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție
Lema.
If $x,y,z>0$, $xy+yz+zx=3$ then

$$2\sum x^3+3xyz\geq 9.$$

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum \cot B\cot C=1\Leftrightarrow \sum \sqrt{3}\cot B\cdot\sqrt{3}\cot C=3$.

Folosind **Lema** pentru $(x,y,z)=\left(\sqrt{3}\cot A,\sqrt{3}\cot B,\sqrt{3}\cot C\right)$ obținem:

$$2\sum\left(\sqrt{3}\cot A\right)^3+3\cdot\sqrt{3}\cot A\cdot\sqrt{3}\cot B\cdot\sqrt{3}\cot C\geq 9\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sum 3\sqrt{3}\cot^3 A+9\cdot\sqrt{3}\cot A\cot B\cot C\geq 9\Leftrightarrow 2\sum 3\sqrt{3}\cot^3 A+9\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{p^2-(2R+r)^2}{2pr}\geq 9$$

$$\Leftrightarrow\ 2\sum\sqrt{3}\cot^3 A+3\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{p^2-(2R+r)^2}{2pr}\geq 3\Leftrightarrow 2\sum\cot^3 A+3\cdot\frac{p^2-(2R+r)^2}{2pr}\geq\sqrt{3}.$$

Problema750.

If $m\geq 0$ then in ΔABC hods:

$$\prod\left(a^m+2\right)\geq 2^m\left(\sqrt[4]{3}\right)^{12-m}F^{\frac{m}{2}}.$$

D.M.Bătinețu-Giurgiu, Claudia Nănuți, RMM 8/2025

Soluție

Lema

If $a,b,c,t\geq 0$

$$\prod\left(a^2+t\right)\geq\frac{3}{4}(a+b+c)^2t^2.$$

Hojoo Lee Inequality

$$LHS=\prod\left(a^m+2\right)\overset{HojooLee}{\geq}\frac{3}{4}\cdot 4\left(\sum\sqrt{a^m}\right)^2\overset{AG}{\geq}3\cdot\left(3\sqrt[3]{\sqrt{(abc)^m}}\right)^2=3\cdot 9(abc)^{\frac{m}{3}}\overset{Carlitz}{\geq}27\left(\frac{4F}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{3}{2}\cdot\frac{m}{3}}=$$

$$=27\left(\frac{4F}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{m}{2}}=2^m\left(\sqrt[4]{3}\right)^{12-m}F^{\frac{m}{2}}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=\frac{2}{\sqrt{2}}$.

Remarcă.

If $m\geq 0$ and $t>0$ then in ΔABC hods:

$$\prod\left(a^m+t\right)\geq 2^{m-\frac{1}{2}}3^{3-\frac{m}{4}}t^2F^{\frac{m}{2}}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Lema

If $a,b,c,t\geq 0$

$$\prod\left(a^2+t\right)\geq\frac{3}{4}(a+b+c)^2t^2.$$

Hojoo Lee Inequality

$$LHS=\prod\left(a^m+t\right)\overset{HojooLee}{\geq}\frac{3}{4}\cdot t^2\left(\sum\sqrt{a^m}\right)^2\overset{AG}{\geq}\frac{3t^2}{4}\cdot\left(3\sqrt[3]{\sqrt{(abc)^m}}\right)^2=\frac{3t^2}{4}\cdot 9(abc)^{\frac{m}{3}}\overset{Carlitz}{\geq}\frac{27t^2}{4}\left(\frac{4F}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{3}{2}\cdot\frac{m}{3}}=$$

$$=\frac{27t^2}{4}\left(\frac{4F}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{m}{2}}=2^{m-\frac{1}{2}}3^{3-\frac{m}{4}}t^2F^{\frac{m}{2}}.$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a=b=c=\frac{t}{\sqrt{2}}$.

Problema751.
In ΔABC hods:

$$\sum\left(a^2+t^2\right)^3\geq 27\sqrt{3}t^4F\,.$$

D.M.Bătineţu-Giurgiu, Claudia Nănuţi, RMM 8/2025

Soluţie
Lema
If $a,b,c,t\geq 0$

$$\prod\left(a^2+t\right)\geq\frac{3}{4}(a+b+c)^2t^2\,.$$

$$LHS=\sum\left(a^2+t^2\right)^3\overset{AG}{\geq}3\prod\left(a^2+t^2\right)\overset{HojooLee}{\geq}3\cdot\frac{3}{4}\cdot t^4\left(\sum a\right)^2=\frac{9}{4}\cdot t^4\cdot 4p^2\overset{Hadwigwer}{\geq}9\cdot t^4\cdot 3F\sqrt{3}=$$
$$=27\sqrt{3}t^4F=RHS\,.$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a=b=c=\frac{t^2}{\sqrt{2}}$.

Remarcă.
In ΔABC hods:

$$\sum\left(a^{2n}+t^2\right)^3\geq 3^{4-\frac{n}{2}}\cdot 4^{n-1}t^4F^n\,,n\in\mathbf{N}^*\,.$$

Marin Chirciu

Soluţie

$$LHS=\sum\left(a^{2n}+t^2\right)^3\overset{AG}{\geq}3\prod\left(a^{2n}+t^2\right)\overset{HojooLee}{\geq}3\cdot\frac{3}{4}\cdot t^4\left(\sum a^n\right)^2\overset{Holder}{\geq}\frac{9}{4}\cdot t^4\left(\frac{\left(\sum a\right)^n}{3^{n-1}}\right)^2\overset{Hadwigwer}{\geq}$$
$$=\frac{9}{4}\cdot t^4\frac{\left(\sum a\right)^{2n}}{3^{2(n-1)}}\overset{Hadwigwer}{\geq}\frac{9}{4}\cdot t^4\frac{\left(12F\sqrt{3}\right)^n}{3^{2(n-1)}}=3^{4-\frac{n}{2}}\cdot 4^{n-1}t^4F^n\,.$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a=b=c=\frac{t^2}{\sqrt{2}}$.

Problema752.
If $a,b,c>0$, $abc=1$ then

$$\sum\frac{1}{\sqrt{a^3+3}}\leq\frac{3}{2}\,.$$

Nguyen Minh Tho, Vietnam, Mathematical Inequalities 8/2025

Soluţie

$$LHS=\sum\frac{1}{\sqrt{a^3+3}}\overset{CBS}{\leq}\sqrt{3\sum\frac{1}{a^3+3}}\overset{(1)}{\leq}\frac{3}{2}=RHS\,,$$

unde $\sqrt{3\sum\frac{1}{a^3+3}}\overset{(1)}{\leq}\frac{3}{2}\Leftrightarrow 3\sum\frac{1}{a^3+3}\leq\frac{9}{4}\Leftrightarrow\sum\frac{1}{a^3+3}\leq\frac{3}{4}\Leftrightarrow$

$$4\sum\left(a^3+3\right)\left(b^3+3\right)\leq 3\prod\left(a^3+3\right)\Leftrightarrow 4\left(\sum a^3b^3+6\sum a^3+27\right)\leq 3\left(28+3\sum a^3b^3+9\sum a^3\right)$$

$\Leftrightarrow 5\sum a^3b^3+3\sum a^3\geq 24$, care rezultă din $\sum a^3b^3\geq 3$ şi $\sum a^3\geq 3$, veziAM-GM şi $abc=1$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarcă.

1). If $a,b,c>0$, $abc=1$ and $\lambda\geq 2$ then

$$\sum\frac{1}{\sqrt{a^3+\lambda^2-1}}\leq\frac{3}{\lambda}.$$

2). If $a,b,c>0$, $abc=1$ and $\lambda\geq 2$ then

$$\sum\frac{1}{\sqrt{a+\lambda^2-1}}\leq\frac{3}{\lambda}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema753.

If $x,y,z>0$, $xy+yz+zx=3$ then

$$\frac{1}{xyz}\geq\frac{2}{3}\sum\sqrt{x}-1.$$

Kunihiko Chikaya, Japan, Mathematical Inequalities 8/2025

Soluție

Folosind $\sum a^2\geq\sum bc$ pentru $(x,y,z)=\left(\sqrt{yz},\sqrt{zx},\sqrt{xy}\right)$ obținem:

$$\sum yz\geq\sqrt{xyz}\sum x,\ \sum yz=3\Rightarrow 3\geq\sqrt{xyz}\sum x\Leftrightarrow\sum x\leq\frac{3}{\sqrt{xyz}}.$$

$$\frac{1}{xyz}\geq\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{\sqrt{xyz}}-1\Leftrightarrow\frac{1}{xyz}\geq\frac{2}{\sqrt{xyz}}-1\Leftrightarrow\frac{1}{xyz}-\frac{2}{\sqrt{xyz}}+1\geq 0\Leftrightarrow\left(\frac{1}{\sqrt{xyz}}-1\right)^2\geq 0.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1$.

Remarcă.

1). In ΔABC

$$\frac{p}{\sqrt{3}r}\geq 2\sum\sqrt{\sqrt{3}\tan\frac{A}{2}}-1.$$

Soluție

Lema.

If $x,y,z>0$, $xy+yz+zx=3$ then

$$\frac{1}{xyz}\geq\frac{2}{3}\sum\sqrt{x}-1.$$

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=1\Leftrightarrow\sum\sqrt{3}\tan\frac{B}{2}\cdot\sqrt{3}\tan\frac{C}{2}=3$.

Folosind **Lema** pentru $(x,y,z)=\left(\sqrt{3}\tan\frac{A}{2},\sqrt{3}\tan\frac{B}{2},\sqrt{3}\tan\frac{C}{2}\right)$ obținem:

$$\frac{1}{\sqrt{3}\tan\frac{A}{2}\cdot\sqrt{3}\tan\frac{B}{2}\cdot\sqrt{3}\tan\frac{C}{2}}\geq\frac{2}{3}\sum\sqrt{\sqrt{3}\tan\frac{A}{2}}-1\Leftrightarrow\frac{p}{\sqrt{3}r}\geq 2\sum\sqrt{\sqrt{3}\tan\frac{A}{2}}-1.$$

2). In acute ΔABC

$$\frac{pr}{\sqrt{3}\left(p^2-(2R+r)^2\right)}\geq\sum\sqrt{\sqrt{3}\cot A}-1.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție

Lema.

If $x,y,z>0$, $xy+yz+zx=3$ then

$$\frac{1}{xyz}\geq\frac{2}{3}\sum\sqrt{x}-1.$$

Se cunoaşte identitatea în triunghi $\sum\cot B\cot C=1\Leftrightarrow\sum\sqrt{3}\cot B\cdot\sqrt{3}\cot C=3$.

Folosind **Lema** pentru $(x,y,z)=\left(\sqrt{3}\cot A,\sqrt{3}\cot B,\sqrt{3}\cot C\right)$ obţinem:

$$\frac{1}{\sqrt{3}\cot A\cdot\sqrt{3}\cot B\cdot\sqrt{3}\cot C}\geq\frac{2}{3}\sum\sqrt{\sqrt{3}\cot A}-1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{3\sqrt{3}\cot A\cot B\cot C}\geq\frac{2}{3}\sum\sqrt{\sqrt{3}\cot A}-1\Leftrightarrow\frac{1}{3\sqrt{3}\,\frac{p^2-(2R+r)^2}{2pr}}\geq\frac{2}{3}\sum\sqrt{\sqrt{3}\cot A}-1\Leftrightarrow$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema754.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=3$ then

$$\sum\frac{x^2y}{2x+y}\leq 1.$$

Kunihiko Chikaya, Japan, Mathematical Inequalities8/2025

Soluţie

$$LHS=\sum\frac{x^2y}{2x+y}\overset{CS}{\leq}\sum\frac{x^2y}{9}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{9}\sum\left(2xy+x^2\right)=\frac{1}{9}(x+y+z)^2=\frac{1}{9}(3)^2=1=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $x=y=z=1$.

Remarcă.

1). If $x,y,z>0$, $x^2+y^2+z^2=3$ then

$$\sum\frac{x^2y}{3x+y}\leq\frac{3}{4}.$$

2). If $x,y,z>0$, $x^2+y^2+z^2=3$ and $\lambda\geq 0$ then

$$\sum\frac{x^2y}{\lambda x+y}\leq\frac{3}{\lambda+1}.$$

Soluţie

3), In ΔABC

$$\sum\frac{1}{r_a^2+2r_ar_b}\leq\frac{1}{9r^2}.$$

Soluţie

Lema.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=3$ then

$$\sum\frac{x^2y}{2x+y}\leq 1.$$

Se cunoaşte identitatea în triunghi $\sum\frac{r}{r_a}=1\Leftrightarrow\sum\frac{3r}{r_a}=3$.

Folosind Lema pentru $(x,y,z)=\left(\frac{3r}{r_a},\frac{3r}{r_b},\frac{3r}{r_c}\right)$ obţinem: $\sum\frac{1}{r_a^2+2r_ar_b}\leq\frac{1}{9r^2}$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă triunghiul este echilateral.

4). In ΔABC

$$\sum \frac{1}{h_a^2 + 2h_a h_b} \leq \frac{1}{9r^2}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema755.

If $x, y, z > 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ then

$$\sum \frac{x^5}{x^3 + x + 1} \geq 1.$$

Nguyen Van Hoa, Vietnam, Mathematical Inequalities8/2025

Soluție

Lema.

If $x > 0$ then

$$\frac{x^5}{x^3 + x + 1} \geq \frac{11x^2 - 5}{18}.$$

Demonstrație

$$\frac{x^5}{x^3 + x + 1} \geq \frac{11x^2 - 5}{18} \Leftrightarrow 7x^5 - 6x^3 - 11x^2 + 5x + 5 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 (7x^3 + 14x^2 + 15x + 5) \geq 0.$$

$$LHS = \sum \frac{x^5}{x^3 + x + 1} \overset{Lema}{\geq} \sum \frac{11x^2 - 5}{18} = \frac{11\sum x^2 - 15}{18} = \frac{11 \cdot 3 - 15}{18} = 1 = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $x = y = z = 1$.

Remarcă.

If $x, y, z > 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ and $\lambda \geq 0$ then

$$\sum \frac{x^5}{x^3 + x + \lambda} \geq \frac{3}{\lambda + 2}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Lema.

If $x > 0$ and $\lambda \geq 0$ then

$$\frac{x^5}{x^3 + x + \lambda} \geq \frac{(5\lambda + 6)x^2 - 3\lambda - 2}{2(\lambda + 2)^2}.$$

Demonstrație

$$\frac{x^5}{x^3 + x + \lambda} \geq \frac{(5\lambda + 6)x^2 - 3\lambda - 2}{2(\lambda + 2)^2} \Leftrightarrow$$

$$(2\lambda^2 + 3\lambda + 2)x^5 - 2(\lambda + 2)x^3 - \lambda(5\lambda + 6)x^2 + (3\lambda + 2)x + 3\lambda^2 + 2\lambda \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 \left[(2\lambda^2 + 3\lambda + 2)x^3 + 2(2\lambda^2 + 3\lambda + 2)x^2 + (6\lambda^2 + 7\lambda + 2)x + 3\lambda^2 + 2\lambda \right] \geq 0.$$

$$LHS = \sum \frac{x^5}{x^3 + x + \lambda} \overset{Lema}{\geq} \sum \frac{(5\lambda + 6)x^2 - 3\lambda - 2}{2(\lambda + 2)^2} = \frac{(5\lambda + 6)\sum x^2 - 3(3\lambda + 2)}{2(\lambda + 2)^2} =$$

$$= \frac{(5\lambda + 6) \cdot 3 - 3(3\lambda + 2)}{2(\lambda + 2)^2} = \frac{3(2\lambda + 4)}{2(\lambda + 2)^2} = \frac{3}{\lambda + 2} = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $x = y = z = 1$.

Problema756.

In ΔABC hods:

$$\prod\left(\frac{a}{h_b}+2\right)\geq 18\sqrt{3}.$$

D.M.Bătinețu-Giurgiu, Claudia Nănuți, RMM 8/2025

Soluție

$$LHS=\prod\left(\frac{a}{h_b}+2\right)\overset{HojooLee}{\geq}\frac{3}{4}\cdot 4\left(\sum\sqrt{\frac{a}{h_b}}\right)^2\overset{AG}{\geq}3\left(3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{abc}{h_ah_bh_c}}}\right)^2=3\left(3\sqrt[6]{\frac{abc}{h_ah_bh_c}}\right)^2=$$

$$=3\left(3\sqrt[6]{\frac{4Rrp}{\frac{2r^2p^2}{R}}}\right)^2=3\left(3\sqrt[6]{\frac{2R^2}{rp}}\right)^2\overset{Mitrinovic}{\geq}3\left(3\sqrt[6]{\frac{2R^2}{r\cdot\frac{3R\sqrt{3}}{2}}}\right)^2=3\left(3\sqrt[6]{\frac{4R}{r\cdot 3\sqrt{3}}}\right)^2\overset{Euler}{\geq}3\left(3\sqrt[6]{\frac{4\cdot 2r}{r\cdot 3\sqrt{3}}}\right)^2=$$

$$=3\left(3\sqrt[6]{\frac{8}{3\sqrt{3}}}\right)^2=3\left(3\sqrt[6]{\frac{2^3}{\left(\sqrt{3}\right)^3}}\right)^2=3\left(3\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}\right)^2=3\left(9\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=18\sqrt{3}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $\sqrt{\frac{a}{h_b}}=\sqrt{\frac{b}{h_c}}=\sqrt{\frac{c}{h_a}}=\frac{2}{\sqrt{2}}$.

Remarcă.

In ΔABC hods:

1). $$\prod\left(\frac{a}{h_b}+\lambda\right)\geq\frac{9\sqrt{3}\lambda^2}{2},\lambda>0.$$

Marin Chirciu

2). $$\prod\left(\frac{a}{r_b}+\lambda\right)\geq\frac{9\sqrt{3}\lambda^2}{2},\lambda>0.$$

Marin Chirciu

Problema757.

If $a,b,c>0$ then

$$\sum a^3+\sum\frac{a}{(b+c)^2}\geq a+b+c.$$

D.M.Bătinețu-Giurgiu,Neculai Stanciu

Soluție

$$LHS=\sum a^3+\sum\frac{a}{(b+c)^2}=\sum a^3+\sum\frac{a^3}{a^2(b+c)^2}=\sum a^3\left(1+\frac{1}{a^2(b+c)^2}\right)\overset{AG}{\geq}$$

$$\overset{AG}{\geq}\sum a^3\cdot 2\sqrt{1\cdot\frac{1}{a^2(b+c)^2}}=\sum\frac{2a^3}{a(b+c)}=\sum\frac{2a^2}{b+c}\overset{AG}{\geq}\frac{2\left(\sum a\right)^2}{\sum(b+c)}=\frac{2\left(\sum a\right)^2}{2\sum a}=\sum a=RHS.$$

În inegalitatea mediilor egalitatea are loc pentru $1=\frac{1}{a^2(b+c)^2}$ și analoagele.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Remarcă.

If $a,b,c>0$ and $n\in\mathbf{N}$ then

$$\sum a^{n+2}+\sum\frac{a^n}{(b+c)^2}\ge 3\left(\frac{\sum a}{3}\right)^n.$$

Marin Chirciu

Problema758.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=3$ then

$$xyz\sum x^2\le 3.$$

Kunihiko Chikaya, Japan, Mathematical Inequalities 8/2025

Soluție

Folosim pqr -Method.

Notăm $p=x+y+z=3, q=xy+yz+zx, r=xyz$.

Avem $q^2\ge 3pr$, vezi $q^2=\left(\sum xy\right)^2\ge 3xyz\sum x=3pr$.

Obținem $p^2=\left(\sum x\right)^2=\sum x^2+2\sum xy=\sum x^2+2q=\sum x^2+q+q\overset{AG}{\ge}3\sqrt[3]{\sum x^2\cdot q\cdot q}=$

$=3\sqrt[3]{\sum x^2\cdot q^2}\overset{q^2\ge 3pr}{\ge}3\sqrt[3]{\sum x^2\cdot 3pr}$.

Rezultă $p^2\ge 3\sqrt[3]{\sum x^2\cdot 3pr}$, $p=3\Rightarrow 9\ge 3\sqrt[3]{\sum x^2\cdot 9r}\Leftrightarrow 3\ge\sqrt[3]{\sum x^2\cdot 9r}\Leftrightarrow 27\ge\sum x^2\cdot 9r\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\ge r\sum x^2\Leftrightarrow 3\ge xyz\sum x^2$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1$.

Remarcă.

In ΔABC

$$1).\ \sum\frac{9r^2}{r_a^2}\le\frac{p^2}{9r^2}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Lema.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=3$ then

$$xyz\sum x^2\le 3.$$

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum\frac{r}{r_a}=1\Leftrightarrow\sum\frac{3r}{r_a}=3$.

Folosind **Lema** pentru $(x,y,z)=\left(\frac{3r}{r_a},\frac{3r}{r_b},\frac{3r}{r_c}\right)$ obținem: $\sum\frac{9r^2}{r_a^2}\le\frac{p^2}{9r^2}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

$$2).\ \sum\frac{9r^2}{h_a^2}\le\frac{2p^2}{9Rr}.$$

Marin Chirciu

Problema759.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=3$ then

$$\sum\frac{x^3}{y^3+8}\ge\frac{1}{9}+\frac{2}{27}\sum xy.$$

Kunihiko Chikaya, Japan, Mathematical Inequalities8/2025

Soluție

$$LHS=\sum\frac{x^3}{y^3+8}=\sum\frac{x^4}{xy^3+8x}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum x^2\right)^2}{\sum xy^3+8\sum x}\overset{Vasc}{\geq}\frac{\left(\sum x^2\right)^2}{\frac{1}{3}\left(\sum x^2\right)^2+8\cdot\frac{1}{3}\left(\sum x^2\right)^2}=\frac{1}{\frac{1}{3}+\frac{8}{3}}=$$

$$=\frac{1}{3}\geq\frac{1}{9}+\frac{2}{27}\sum xy=RHS.$$

Am folosit mai sus $\sum x\leq\frac{1}{3}\left(\sum x^2\right)^2$, vezi $\sum x=3$ și $\sum x^2\geq 3$; $\sum xy\leq 3$, vezi

$\sum xy\leq\frac{1}{3}\left(\sum x\right)^2=\frac{1}{3}(3)^2=3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1$.

Remarcă.

1). If $x,y,z>0$, $x+y+z=3$ and $\lambda\geq 0$ then

$$\sum\frac{x^3}{y^3+\lambda}\geq\frac{1}{\lambda+1}\left(1+\frac{2}{3}\sum xy\right).$$

2). In ΔABC

$$\sum\frac{1}{r_a^3\left(\frac{27r^3}{r_b^3}+8\right)}\geq\frac{1}{81r^3}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Lema.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=3$ then

$$\sum\frac{x^3}{y^3+8}\geq\frac{1}{9}+\frac{2}{27}\sum xy.$$

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum\frac{r}{r_a}=1\Leftrightarrow\sum\frac{3r}{r_a}=3$.

Folosind Lema pentru $(x,y,z)=\left(\frac{3r}{r_a},\frac{3r}{r_b},\frac{3r}{r_c}\right)$ obținem: $\sum\frac{1}{r_a^3\left(\frac{27r^3}{r_b^3}+8\right)}\geq\frac{1}{81r^3}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

3). In ΔABC

$$\sum\frac{1}{h_a^3\left(\frac{27r^3}{h_b^3}+8\right)}\geq\frac{1}{81r^3}.$$

Marin Chirciu

Problema760.

If $a,b>0$ then

$$\frac{4\left(a^4+b^4\right)}{a^2+b^2}-\frac{1}{2}(a+b)^2+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\geq 4.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam,RMM8/2025

Soluție

$$LHS=\frac{4\left(a^4+b^4\right)}{a^2+b^2}-\frac{1}{2}(a+b)^2+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\overset{CS}{\geq}\frac{2\left(a^2+b^2\right)^2}{a^2+b^2}-\frac{1}{2}(a+b)^2+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=$$

$$=2\left(a^2+b^2\right)^2-\frac{1}{2}(a+b)^2+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\overset{CS}{\geq}(a+b)^2-\frac{1}{2}(a+b)^2+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{2}(a+b)^2+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\overset{Radon}{\geq}$$

$$\overset{Radon}{\geq}\frac{1}{2}(a+b)^2+\frac{(1+1)^3}{(a+b)^2}=\frac{1}{2}(a+b)^2+\frac{8}{(a+b)^2}\overset{AG}{\geq}2\sqrt{\frac{1}{2}(a+b)^2\cdot\frac{8}{(a+b)^2}}=2\cdot 2=4=RHS\ .$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=1$.

Remarcă.

If $a,b>0$, $a+b\geq 2$ and $0\leq\lambda\leq 1$ then

$$\frac{4\left(a^4+b^4\right)}{a^2+b^2}-\frac{1}{2}(a+b)^2+\lambda\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\geq 2(\lambda+1).$$

Marin Chirciu

Soluție

Problema761.

If $x,y,z>0$ then in ΔABC hods

$$\prod\left(x^2a^4+2\right)\geq 48\sum xyF^2\ .$$

D.M.Bătinețu-Giurgiu, Claudia Nănuți, RMM 8/2025

Soluție

Lema

If $a,b,c,t\geq 0$

$$\prod\left(a^2+t\right)\geq\frac{3}{4}(a+b+c)^2t^2.$$

Hojoo Lee Inequality

$$LHS=\prod\left(x^2a^4+2\right)\overset{HojooLee}{\geq}\frac{3}{4}\cdot 4\left(\sum xa^2\right)^2\overset{Oppenheim}{\geq}3\left(4F\sqrt{\sum xy}\right)^2=48\sum xyF^2=RHS\ .$$

Am folosit mai sus inegalitatea lui Oppenheim $xa^2+yb^2+zc^2\geq 4F\sqrt{xy+yz+zx}$, $x,y,z>0$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral și $x=y=z$.

Remarcă.

If $x,y,z,\lambda>0$ then in ΔABC hods

$$\prod\left(x^2a^4+\lambda\right)\geq 12\lambda^2\sum xy\cdot F^2.$$

Marin Chirciu

Soluție

$$LHS=\prod\left(x^2a^4+\lambda\right)\overset{HojooLee}{\geq}\frac{3}{4}\cdot\lambda^2\left(\sum xa^2\right)^2\overset{Oppenheim}{\geq}\frac{3}{4}\cdot\lambda^2\left(4F\sqrt{\sum xy}\right)^2=$$

$$=\frac{3\lambda^2}{4}\cdot 16F^2\sum xy=12\lambda^2\cdot F^2\sum xy=RHS\ .$$

Problema762.

If $x\in D$ then

$$\frac{\tan 3x-2\tan 2x+\tan x}{4\left(\tan 3x-\tan 2x\right)}=\sin^2 x\,.$$

Math 8/2025

Soluție

Folosind $\tan 3x=\frac{3t-t^3}{1-3t^2}$, $\tan 2x=\frac{2t}{1-t^2}$, $\tan x=t$ obținem:

$$\frac{\tan 3x-2\tan 2x+\tan x}{4(\tan 3x-\tan 2x)}=\frac{\frac{3t-t^3}{1-3t^2}-2\frac{2t}{1-t^2}+t}{4\left(\frac{3t-t^3}{1-3t^2}-\frac{2t}{1-t^2}\right)}=\frac{t^2}{t^2+1}=\sin^2 x.$$

Remarcă.

Solve in $[0,2\pi]$ the equation:

$$\frac{\tan 3x-2\tan 2x+\tan x}{\tan 3x-\tan 2x}=0.$$

Marin Chirciu

Soluție

Folosind $\tan 3x=\frac{3t-t^3}{1-3t^2}$, $\tan 2x=\frac{2t}{1-t^2}$, $\tan x=t$ obținem:

$$\frac{\tan 3x-2\tan 2x+\tan x}{\tan 3x-\tan 2x}=\frac{\frac{3t-t^3}{1-3t^2}-2\frac{2t}{1-t^2}+t}{\frac{3t-t^3}{1-3t^2}-\frac{2t}{1-t^2}}=\frac{4t^2}{t^2+1}=4\sin^2 x.$$

Ecuația se scrie $4\sin^2 x=0$, $\tan 3x-\tan 2x\neq 0$.
Deducem că ecuația nu are soluții.

Problema762.

If $a,b>0$ then

$$e^{\frac{1}{\sqrt{a}}}+b\ln b\geq b+\frac{b}{\sqrt{a}}.$$

Panagiotis Danousis, Greece, MathAtelier8/2025

Soluție

Lema.

If $x\in\mathbf{R}$ then

$$e^x\geq x+1.$$

Demonstrație

Considerăm funcția $f(x)=e^x-x-1, x\in\mathbf{R}$, $f'(x)=e^x-1$, $f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$.
$f(x)\geq f(0)=0$, cu egal pentru $x=0$.

Folosind **Lema** pentru $x=\frac{1}{\sqrt{a}}-\ln b$ obținem:

$e^{\frac{1}{\sqrt{a}}-\ln b}\geq\frac{1}{\sqrt{a}}-\ln b+1\Leftrightarrow e^{\frac{1}{\sqrt{a}}}+b\ln b\geq b+\frac{b}{\sqrt{a}}$,cu egal pentru $x=\frac{1}{\sqrt{a}}-\ln b=0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{a}}=\ln b\Leftrightarrow b=e^{\frac{1}{\sqrt{a}}}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $b=e^{\frac{1}{\sqrt{a}}}$.

Remarcă.

1). If $a,b>0$ then

$$e^{\frac{1}{a}}+b\ln b\geq b+\frac{b}{a}.$$

Soluție

Folosind **Lema** pentru $x=\frac{1}{a}-\ln b$ obținem:

$e^{\frac{1}{a}-\ln b}\geq\frac{1}{a}-\ln b+1\Leftrightarrow e^{\frac{1}{a}}+b\ln b\geq b+\frac{b}{a}$,cu egal pentru $x=\frac{1}{a}-\ln b=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{1}{a}=\ln b\Leftrightarrow b=e^{\frac{1}{a}}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $b=e^{\frac{1}{a}}$.

2). If $a,b>0$ and $n\in\mathbf{N}^*$ then

$$e^{\frac{1}{\sqrt[n]{a}}}+b\ln b\geq b+\frac{b}{\sqrt[n]{a}}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție

Folosind **Lema** pentru $x=\frac{1}{\sqrt[n]{a}}-\ln b$ obținem:

$e^{\frac{1}{\sqrt[n]{a}}-\ln b}\geq\frac{1}{\sqrt[n]{a}}-\ln b+1\Leftrightarrow e^{\frac{1}{\sqrt[n]{a}}}+b\ln b\geq b+\frac{b}{\sqrt[n]{a}}$,cu egal pentru $x=\frac{1}{\sqrt[n]{a}}-\ln b=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt[n]{a}}=\ln b\Leftrightarrow b=e^{\frac{1}{\sqrt[n]{a}}}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $b=e^{\frac{1}{\sqrt[n]{a}}}$.

Problema763.

In ΔABC

$$4\leq\sum\sec^2\frac{A}{2}\leq\left(\frac{R}{r}\right)^2.$$

George Apostolopoulos, Greece, RMM5/2017

Soluție

Lema.

In ΔABC

$$\sum\sec^2\frac{A}{2}=1+\frac{(4R+r)^2}{p^2}.$$

Folosim inegalitatea lui Gerretsen.

Remarcă.

1). In ΔABC

$$4\leq 5-\frac{2r}{R}\leq\sum\sec^2\frac{A}{2}\leq 2+\frac{R}{r}\leq\left(\frac{R}{r}\right)^2.$$

2). In ΔABC

$$5-\frac{2r}{R}\leq\sum\sec^2\frac{A}{2}\leq 2+\frac{R}{r}.$$

Marin Chirciu

3). In ΔABC

$$4 \le 5 - \frac{2r}{R} \le \sum \sec^2 \frac{A}{2} \le 2 + \frac{R}{r} \le \left(\frac{R}{r}\right)^2 .$$

Problema764.
If $x, y, z \in \mathbf{R}$ then

$$\sum \frac{1+e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}} \le 3\sqrt{2} .$$

Marin Chirciu, IneMath8/2025

Soluție
Lema.
If $x \in \mathbf{R}$ then

$$\frac{1+e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}} \le \sqrt{2} .$$

Demonstrație
$\frac{1+e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}} \le \sqrt{2} \Leftrightarrow \left(1+e^x\right)^2 \le 2\left(1+e^{2x}\right) \Leftrightarrow 1+2e^x+e^{2x} \le 2+2e^{2x} \Leftrightarrow \left(e^x-1\right)^2 \ge 0$.

$LHS = \sum \frac{1+e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}} \overset{Lema}{\le} \sum \sqrt{2} = 3\sqrt{2} = RHS$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = 0$.

Problema765.
In ΔABC

$$\frac{15}{2} + \sum \frac{\sin^2 A}{\sin^2 B + \sin^2 C} \le 9\left(\frac{R}{2r}\right)^2 .$$

Konstantinos Geronikolas, Greece, Mathematical Inequalities8/2025

Soluție
$LHS = \frac{15}{2} + \sum \frac{\sin^2 A}{\sin^2 B + \sin^2 C} = \frac{15}{2} + \sum \frac{a^2}{b^2+c^2} \overset{AG}{\le} \frac{15}{2} + \sum \frac{a^2}{2bc} = \frac{15}{2} + \frac{1}{2}\sum \frac{a^3}{abc} =$

$= \frac{15}{2} + \frac{1}{2} \frac{2p\left(p^2-3r^2-6Rr\right)}{4Rrp} = \frac{15}{2} + \frac{p^2-3r^2-6Rr}{4Rr} \overset{Gerretsen}{\le} \frac{15}{2} + \frac{4R^2+4Rr+3r^2-3r^2-6Rr}{4Rr} =$

$= \frac{15}{2} + \frac{4R^2-2Rr}{4Rr} = \frac{15}{2} + \frac{2R-r}{2r} = \frac{R+7r}{r} = 7 + \frac{R}{r} \overset{Euler}{\le} 9\left(\frac{R}{2r}\right)^2$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.
1). In ΔABC

$$\frac{3}{2} \le \sum \frac{\sin^2 A}{\sin^2 B + \sin^2 C} \le \frac{R}{r} - \frac{1}{2} .$$

2). In ΔABC

$$\frac{3}{2} \le \sum \frac{a^2}{b^2+c^2} \le \frac{R}{r} - \frac{1}{2} .$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema614.
In ΔABC

$$\sum \left(\cot B + \cot C\right) \tan \frac{A}{2} \ge 2 .$$

Zaza Mzhavanadze, Georgia, RMM 5/2025

Soluție.

$$LHS=\sum(\cot B+\cot C)\tan\frac{A}{2}\overset{Chebyshev}{\geq}\frac{1}{3}\sum(\cot B+\cot C)\sum\tan\frac{A}{2}=\frac{1}{3}\cdot 2\sum\cot A\sum\tan\frac{A}{2}=$$

$$=\frac{2}{3}\sum\cot A\sum\tan\frac{A}{2}\geq\frac{2}{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=2,$$ vezi $\sum\cot A\geq\sqrt{3}$ și $\sum\tan\frac{A}{2}\geq\sqrt{3}$.

Remarcă.

In ΔABC

$$\sum(\cot B+\cot C)\cot\frac{A}{2}\leq\frac{R^3}{4r^3}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS=\sum(\cot B+\cot C)\cot\frac{A}{2}\overset{Chebyshev}{\leq}\frac{1}{3}\sum(\cot B+\cot C)\sum\cot\frac{A}{2}=\frac{1}{3}\cdot 2\sum\cot A\sum\cot\frac{A}{2}=$$

$$=\frac{2}{3}\sum\cot A\sum\tan\frac{A}{2}\leq\frac{2}{3}\cdot\frac{2R^2+r^2}{pr}\cdot\frac{4R+r}{p}=\frac{2(2R^2+r^2)(4R+r)}{3rp^2}\overset{Gerretsen\&Mitrinovic}{\leq}$$

$$\overset{Gerretsen\&Mitrinovic}{\leq}\frac{2\left(2R^2+\frac{R^2}{4}\right)\left(4R+\frac{R}{2}\right)}{3r\cdot 27r^2}=\frac{R^3}{4r^3}.$$

Am folosit mai sus:

$$\sum\cot A=\frac{p^2-r^2-4Rr}{2pr}\overset{Gerretsen}{\leq}\frac{4R^2+4Rr+3r^2-r^2-4Rr}{2pr}=\frac{4R^2+2r^2}{2pr}=\frac{2R^2+r^2}{pr}.$$

Problema766.

In ΔABC

$$\sum\cos A-2\sum\cos^2 A\geq 0.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam, RMM 8/2025

Soluție

$$LHS=\sum\cos A-2\sum\cos^2 A=1+\frac{r}{R}-2\cdot\frac{p^2+r^2-4R^2}{4R^2}\overset{Gerretsen}{\geq}1+\frac{r}{R}-2\cdot\frac{4R^2+4Rr+3r^2+r^2-4R^2}{4R^2}=$$

$$=\frac{R^2-Rr-2r^2}{R^2}=\frac{(R-2r)(R+r)}{R^2}\overset{Euler}{\geq}0=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

1). In ΔABC

$$\sum\cos A-\lambda\sum\cos^2 A\geq\frac{3}{4}(2-\lambda),\lambda\geq\frac{2}{3}.$$

2). In ΔABC

$$\sum\cos A-\frac{2}{3}\sum\cos^2 A\geq 1.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție

Cazul $\lambda\geq\frac{2}{3}$ în inegalitatea de mai sus.

Problema767.

If $x,y,z>1, x+y+z=8$ then

$$\sum \frac{x^2}{\sqrt{y-1}} \geq 16.$$

Crăciun Gheorghe, Mathematical Inequalities8/2025

Soluție

$$LHS = \sum \frac{x^2}{\sqrt{y-1}} \overset{CS}{\geq} \frac{\left(\sum x\right)^2}{\sum \sqrt{y-1}} \overset{CBS}{\geq} \frac{\left(\sum x\right)^2}{\sqrt{3\sum (y-1)}} = \frac{\left(\sum x\right)^2}{\sqrt{3\left(\sum x - 3\right)}} = \frac{8^2}{\sqrt{3(8-3)}} = \frac{64}{\sqrt{15}} > 16 = RHS.$$

Remarcă.

1). If $x, y, z > \lambda > 0$, $x + y + z = 6\lambda$ then

$$\sum \frac{x^2}{\sqrt{y-\lambda}} \geq 12\lambda\sqrt{\lambda}.$$

2). If $x, y, z > \lambda > 0$, $x + y + z = 6\lambda$ and $n \in \mathbf{N}$ then

$$\sum \frac{x^n}{\sqrt{y-\lambda}} \geq 3 \cdot 2^n \lambda^{n-1}\sqrt{\lambda}.$$

Remarcă.

If $x, y, z > \lambda > 0$, $x + y + z = 6\lambda$ then

$$\sum \frac{x}{\sqrt{y-\lambda}} \geq 6\sqrt{\lambda}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție

Cazul $n = 1$ în inegalitatea de mai sus.

Problema768.

If $a, b, c > 0$, $\sum \frac{1}{\sqrt{a^2 + 3b^2}} = \frac{3}{2}$ then

$$\sum \frac{1}{a} \geq 3.$$

Mathematical Inequalities8/2025

Soluție

$$\frac{3}{2} = \sum \frac{1}{\sqrt{a^2 + 3b^2}} \overset{SOS}{\leq} \sum \frac{1}{\frac{a+3b}{2}} = \sum \frac{2}{a+3b} \overset{CS}{\leq} \frac{2}{(1+3)^2} \sum \left(\frac{1}{a} + \frac{3}{b}\right) = \frac{2}{16} \cdot 4 \sum \frac{1}{a} = \frac{1}{2} \sum \frac{1}{a}.$$

Din $\frac{3}{2} \leq \frac{1}{2} \sum \frac{1}{a} \Rightarrow \sum \frac{1}{a} \geq 3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = 1$.

Remarcă.

If $a, b, c > 0$ and $\lambda \in \mathbf{N}$, $\sum \frac{1}{\sqrt{a^2 + \lambda b^2}} = \frac{3}{\sqrt{\lambda + 1}}$ then

$$\sum \frac{1}{a} \geq 3.$$

Marin Chirciu

Problema769.

In ΔABC then

$$\sum \frac{\sin^2 \frac{A}{2}}{\sin^2 \frac{B}{2}} \geq (2R-r)\sqrt[3]{\frac{2}{Rr^2}}.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam,RMM 8/2025

Soluție

Lema.

If $x, y, z > 0$ then

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x} \geq \frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}.$$

Aplicând **Lema** pentru $(x, y, z)=\left(\sin^2 \frac{A}{2}, \sin^2 \frac{B}{2}, \sin^2 \frac{C}{2}\right)$ obținem:

$$LHS=\sum \frac{\sin^2 \frac{A}{2}}{\sin^2 \frac{B}{2}} \overset{Lema}{\geq} \frac{\sum \sin^2 \frac{A}{2}}{\sqrt[3]{\prod \sin^2 \frac{A}{2}}}=\frac{1-\frac{r}{2R}}{\sqrt[3]{\frac{r^2}{16R^2}}}=\frac{2R-r}{2R}\sqrt[3]{\frac{16R^2}{r^2}}=\frac{2R-r}{R}\sqrt[3]{\frac{2R^2}{r^2}}=$$

$$=(2R-r)\sqrt[3]{\frac{2}{Rr^2}}=RHS.$$

Remarcă.

1). In ΔABC then

$$\sum \frac{\cos^2 \frac{A}{2}}{\cos^2 \frac{B}{2}} \geq (2R-r)\sqrt[3]{\frac{2}{Rp^2}}.$$

Soluție

Aplicăm **Lema** pentru $(x, y, z)=\left(\cos^2 \frac{A}{2}, \cos^2 \frac{B}{2}, \cos^2 \frac{C}{2}\right)$

2). In ΔABC then

$$\sum \frac{\tan^2 \frac{A}{2}}{\tan^2 \frac{B}{2}} \geq \frac{(4R+r)^2-2p^2}{p\sqrt[3]{pr^2}}.$$

Soluție

Aplicăm **Lema** pentru $(x, y, z)=\left(\tan^2 \frac{A}{2}, \tan^2 \frac{B}{2}, \tan^2 \frac{C}{2}\right)$.

Remarcă.

3). In ΔABC then

$$\sum \frac{\cot^2 \frac{A}{2}}{\cot^2 \frac{B}{2}} \geq \frac{p^2-2r^2-8Rr}{r\sqrt[3]{rp^2}}.$$

Soluție

Aplicăm **Lema** pentru $(x, y, z)=\left(\cot^2 \frac{A}{2}, \cot^2 \frac{B}{2}, \cot^2 \frac{C}{2}\right)$.

4). In ΔABC then

$$\sum \frac{m_a^2}{m_b^2} \geq \frac{3\left(p^2 - r^2 - 4Rr\right)}{p\sqrt[3]{2pR^2}}.$$

Soluție

Aplicăm **Lema** pentru $(x,y,z) = \left(m_a^2, m_b^2, m_c^2\right)$.

5). In ΔABC then

$$\sum \frac{a^2}{b^2} \geq \frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{\sqrt[3]{2R^2 r^2 p^2}}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție

Aplicăm **Lema** pentru $(x,y,z) = \left(a^2, b^2, c^2\right)$.

Problema770.

In ΔABC then

$$\sum \frac{\tan\frac{A}{2}}{\tan\frac{B}{2}} \geq \frac{4R + r}{\sqrt[3]{rp^2}}.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam, RMM 8/2025

Soluție

Lema.

If $x, y, z > 0$ then

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq \frac{x + y + z}{\sqrt[3]{xyz}}.$$

Demonstrație.

Avem: $\frac{x}{y} + \frac{x}{y} + \frac{y}{z} \overset{AM-GM}{\geq} 3\sqrt[3]{\frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z}} = 3\sqrt[3]{\frac{x^2}{yz}} = \frac{3x}{\sqrt[3]{xyz}}$.

Se scriu și celelalte două inegalități analoage și se adună.

Aplicând **Lema** pentru $(x,y,z) = \left(\tan\frac{A}{2}, \tan\frac{B}{2}, \tan\frac{C}{2}\right)$ obținem:

$$LHS = \sum \frac{\tan\frac{A}{2}}{\tan\frac{B}{2}} \overset{Lema}{\geq} \frac{\sum \tan\frac{A}{2}}{\sqrt[3]{\prod \tan\frac{A}{2}}} = \frac{\frac{4R + r}{p}}{\sqrt[3]{\frac{r}{p}}} = \frac{4R + r}{\sqrt[3]{rp^2}} = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

1) In ΔABC

$$\sum \frac{\cot\frac{A}{2}}{\cot\frac{B}{2}} \geq \sqrt[3]{\frac{p^2}{r^2}}.$$

Marin Chirciu

Aplicăm **Lema** pentru $(x,y,z) = \left(\cot\frac{A}{2}, \cot\frac{B}{2}, \cot\frac{C}{2}\right)$.

$$LHS=\sum\frac{\cot\frac{A}{2}}{\cot\frac{B}{2}}\overset{Lema}{\geq}\frac{\sum\cot\frac{A}{2}}{\sqrt[3]{\prod\cot\frac{A}{2}}}=\frac{\frac{p}{r}}{\sqrt[3]{\frac{p}{r}}}=\sqrt[3]{\frac{p^2}{r^2}}=RHS.$$

2). In ΔABC

$$\sum\frac{\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}}\geq\frac{6r}{R}\sqrt[3]{\frac{R}{2r}}.$$

Soluție

Aplicăm **Lema** pentru $(x,y,z)=\left(\sin\frac{A}{2},\sin\frac{B}{2},\sin\frac{C}{2}\right)$.

3). In ΔABC

$$\sum\frac{\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}}\geq 2\sqrt[3]{\frac{p^2}{2R^2}}.$$

Soluție

Aplicăm **Lema** pentru $(x,y,z)=\left(\cos\frac{A}{2},\cos\frac{B}{2},\cos\frac{C}{2}\right)$.

4). In ΔABC then

$$\sum\frac{m_a}{m_b}\geq 9r\sqrt[3]{\frac{2}{Rp^2}}.$$

Soluție
Lema.
Aplicăm **Lema** pentru $(x,y,z)=(m_a,m_b,m_c)$.

5). In ΔABC then

$$\sum\frac{w_a}{w_b}\geq\frac{9r}{\sqrt[3]{rp^2}}.$$

Soluție

Aplicăm **Lema** pentru $(x,y,z)=(w_a,w_b,w_c)$.

6).In ΔABC then

$$\sum\frac{h_a}{h_b}\geq\frac{9r}{\sqrt[3]{rp^2}}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Aplicăm **Lema** pentru $(x,y,z)=(h_a,h_b,h_c)$.

$$LHS=\sum\frac{h_a}{h_b}\overset{Lema}{\geq}\frac{\sum h_a}{\sqrt[3]{\prod h_a}}\geq\frac{9r}{\sqrt[3]{rp^2}}=RHS.$$

7). In ΔABC then

$$\sum \frac{s_a}{s_b} \geq 9r\sqrt[3]{\frac{2}{Rp^2}}.$$

Soluție

Aplicăm **Lema** pentru $(x,y,z)=(h_a,h_b,h_c)$.

8). In ΔABC then

$$\sum \frac{r_a}{r_b} \geq \frac{4R+r}{\sqrt[3]{rp^2}}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Aplicăm **Lema** pentru $(x,y,z)=(r_a,r_b,r_c)$.

9). In ΔABC then

$$\sum \frac{a}{b} \geq \frac{2p}{\sqrt[3]{4Rrp}}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție

Aplicăm **Lema** pentru $(x,y,z)=(a,b,c)$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema771.

In ΔABC then

$$\sum am_a \leq \frac{9\sqrt{3}}{2}R^2.$$

Sarkhan Adgozalov, Georgia, RMM 8/2025

Soluție

$$LHS=\sum am_a \overset{CBS}{\leq} \sqrt{\sum a^2 \sum m_a^2} \overset{Leibniz}{\leq} \sqrt{9R^2 \cdot \frac{3}{4}9R^2} = \frac{9R^2}{2}\sqrt{3} = \frac{9\sqrt{3}}{2}R^2 = RHS.$$

Remarcă.

1). In ΔABC then

$$\sum (b+c)m_a \leq 9R^2\sqrt{3}.$$

Marin Chirciu

Soluție

$$LHS=\sum (b+c)m_a \overset{CBS}{\leq} \sqrt{\sum (b+c)^2 \sum m_a^2} \overset{Leibniz}{\leq} \sqrt{36R^2 \cdot \frac{3}{4}9R^2} = 9R^2\sqrt{3} == RHS.$$

2). In ΔABC

$$\sum (b+\lambda c)m_a \leq 9(\lambda+1)\frac{\sqrt{3}}{2}R^2, \lambda \geq 0.$$

Marin Chirciu

Problema772.

If $x,y,z>0$ then

$$\prod \left(\left(\frac{x}{y+z} \right)^2 + 2 \right) \geq \frac{27}{4}.$$

Mathematical Inequalities8/2025

Soluție

If $x,y,z,t>0$ then

$$\left(x^2+t^2\right)\left(y^2+t^2\right)\left(z^2+t^2\right)\geq\frac{3}{4}t^4\left(x+y+z\right)^2.$$

Arkady Alt ,USA

Soluție.

Avem $\left(x^2+t^2\right)\left(y^2+t^2\right)\geq\frac{3}{4}t^2\left(\left(x+y\right)^2+t^2\right)\Leftrightarrow\left(xy-\frac{1}{2}t^2\right)^2+\frac{1}{4}t^2\left(x-y\right)^2\geq 0$,

cu egalitate pentru $x=y=\frac{t}{\sqrt{2}}$.

$$\Rightarrow LHS=\left(x^2+t^2\right)\left(y^2+t^2\right)\left(z^2+t^2\right)\geq\frac{3}{4}t^2\left(\left(x+y\right)^2+t^2\right)\left(t^2+z^2\right)\overset{CBS}{\geq}\frac{3}{4}t^2\left(t\left(x+y\right)+tz\right)^2=$$

$$=\frac{3}{4}t^4\left(x+y+z\right)^2=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=\frac{t}{\sqrt{2}}$.

$$LHS=\prod\left(\left(\frac{x}{y+z}\right)^2+2\right)\overset{Arkady}{\geq}\frac{3}{4}\cdot 4\left(\sum\frac{x}{y+z}\right)^2\overset{Nesbitt}{\geq}3\left(\frac{3}{2}\right)^2\geq\frac{27}{4}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1$.

Remarcă.

1). If $x,y,z>0$ and $\lambda\geq 0$ then

$$\prod\left(\left(\frac{x}{y+\lambda z}\right)^2+2\right)\geq\frac{27}{\left(\lambda+1\right)^2}.$$

Soluție

$$LHS=\prod\left(\left(\frac{x}{y+\lambda z}\right)^2+2\right)\overset{Arkady}{\geq}\frac{3}{4}\cdot 4\left(\sum\frac{x}{y+\lambda z}\right)^2\overset{Nesbitt}{\geq}3\left(\frac{3}{\lambda+1}\right)^2\geq\frac{27}{\left(\lambda+1\right)^2}=RHS.$$

2). If $x,y,z>0$ then

$$\prod\left(\left(\frac{y+z}{x}\right)^2+2\right)\geq 108.$$

Soluție

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1$.

Remarcă.

If $x,y,z>0$ and $\lambda\geq 0$ then

$$\prod\left(\left(\frac{y+\lambda z}{x}\right)^2+2\right)\geq 27\left(\lambda+1\right)^2.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție

$$LHS=\prod\left(\left(\frac{y+\lambda z}{x}\right)^2+2\right)\overset{Arkady}{\geq}\frac{3}{4}\cdot 4\left(\sum\frac{y+\lambda z}{x}\right)^2\overset{AG}{\geq}3\left(3\left(\lambda+1\right)\right)^2\geq 27\left(\lambda+1\right)^2=RHS.$$

Problema773.

If $x, y > 0$ then

$$\frac{e^{2x}}{y^2+2y+2}+\frac{e^{2y}}{x^2+2x+2}>\frac{e^x+e^y}{2}.$$

Crăciun Gheorghe, Mathematical Inequalities8/2025

Soluție

$$LHS=\frac{e^{2x}}{y^2+2y+2}+\frac{e^{2y}}{x^2+2x+2}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(e^x+e^y\right)^2}{\left(y^2+2y+2\right)+\left(x^2+2x+2\right)}=\frac{\left(e^x+e^y\right)^2}{x^2+y^2+2\left(x+y\right)+4}\overset{(1)}{>}$$

$$\overset{(1)}{>}\frac{\left(e^x+e^y\right)^2}{2\left(e^x+e^y\right)}=\frac{e^x+e^y}{2}=RHS.$$

Am folosit mai sus(1): $e^x>1+x+\frac{x^2}{2}$, vezi ezvoltarea în serie Taylor a funcției

$f\left(x\right)=e^x, x>0$ $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+...>1+x+\frac{x^2}{2!}, x>0$.

Remarcă.

1). If $x, y, z > 0$ then

$$\sum\frac{e^{2x}}{y^2+2y+2}>\frac{e^x+e^y+e^z}{2}.$$

Soluție

$$LHS=\sum\frac{e^{2x}}{y^2+2y+2}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum e^x\right)^2}{\sum\left(x^2+2x+2\right)}\overset{(1)}{>}\frac{\left(\sum e^x\right)^2}{2\sum e^x}=\frac{\sum e^x}{2}=RHS.$$

2). If $x, y, z > 0$ then

$$\sum\frac{e^{3x}}{y^2+2y+2}>\frac{\left(e^x+e^y+e^z\right)^2}{6}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție

$$LHS=\sum\frac{e^{3x}}{y^2+2y+2}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum e^x\right)^3}{3\sum\left(x^2+2x+2\right)}\overset{(1)}{>}\frac{\left(\sum e^x\right)^3}{3\cdot 2\sum e^x}=\frac{\left(\sum e^x\right)^2}{6}=RHS.$$

Problema774.

If $a,b,c\geq 0$, $\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}=2$ then

$$\sum ab\leq\frac{3}{2}.$$

Elton Papanikolla, MathOlymp8/2025

Soluție

$$\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}=2\Leftrightarrow\left(a^2,b^2,c^2\right)=\left(\frac{x}{y+z},\frac{y}{z+x},\frac{z}{x+y}\right).$$

$$\sum ab=\sum\sqrt{\frac{x}{y+z}}\sqrt{\frac{y}{x+z}}=\sum\sqrt{\frac{x}{y+z}\cdot\frac{y}{x+z}}\overset{AG}{\leq}\sum\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}\right)=\frac{3}{2}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Remarcă.

1). If $a,b,c\geq 0$, $\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}=2$ then

$$\sum a^2\geq \frac{3}{2}.$$

2).If $a,b,c\geq 0$, $\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}=2$ and $n\in\mathbf{N}$ then

$$\sum a^{2n}\geq \frac{3}{2^n}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema775.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=3$ and $k>0$

$$\sum\frac{x}{\sqrt{x^2+k}}\leq\frac{3}{\sqrt{k+1}}.$$

Konstantinos Geronikolas, Greece, Mathematical Inequalities8/2025

Soluție

Aplicând inegalitatea lui Jensen pentru funcția concavă $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+k}}$, $x>0$ obținem:

$$LHS=\sum\frac{x}{\sqrt{x^2+k}}=f(x)+f(y)+f(z)\overset{Jensen}{\leq}3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)=3f(1)=\frac{3}{\sqrt{k+1}}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1$.

Remarcă.

1). In ΔABC

$$\sum\frac{1}{\sqrt{3r_a^2+9r^2}}\leq\frac{1}{2r}.$$

Soluție.

Lema.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=3$

$$\sum\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}\leq\frac{3}{2}.$$

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum\frac{r}{r_a}=1\Leftrightarrow\sum\frac{3r}{r_a}=3$.

Folosind **Lema** pentru $(x,y,z)=\left(\frac{3r}{r_a},\frac{3r}{r_b},\frac{3r}{r_c}\right)$ obținem:

$$\sum\frac{\frac{3r}{r_a}}{\sqrt{\frac{9r^2}{r_a^2}+3}}\leq\frac{3}{2}\Leftrightarrow\sum\frac{1}{r_a\sqrt{\frac{9r^2}{r_a^2}+3}}\leq\frac{1}{2r}\Leftrightarrow\sum\frac{1}{\sqrt{3r_a^2+9r^2}}\leq\frac{1}{2r}.$$

2). In ΔABC

$$\sum\frac{1}{\sqrt{3h_a^2+9r^2}}\leq\frac{1}{2r}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema776

If $M \in Int(\Delta ABC), F_a = [MBC], F_b = [MCA], F_c = [MAB], x, y > 0$ then

$$\sum \frac{a^3b^3}{(xF_a + yF_b)^2} \geq \frac{192\sqrt{3}}{(x+y)^2} F.$$

D.M.Bătinețu-Giurgiu, Dan Nănuți, RMM 8/2025

Soluție

$$LHS = \sum \frac{a^3b^3}{(xF_a + yF_b)^2} \overset{Radon}{\geq} \frac{\left(\sum ab\right)^3}{\left(\sum (xF_a + yF_b)\right)^2} \overset{Gordon}{\geq} \frac{\left(4F\sqrt{3}\right)^3}{\left(\sum (x+y)F\right)^2} = \frac{4^3 \cdot 3\sqrt{3}F^3}{(x+y)^2 F^2} =$$

$$= \frac{4^3 \cdot 3\sqrt{3}F}{(x+y)^2} = \frac{192\sqrt{3}}{(x+y)^2} F.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral și $M \equiv G$.

Remarcă.

If $M \in Int(\Delta ABC), F_a = [MBC], F_b = [MCA], F_c = [MAB], x, y > 0$, $n \in \mathbf{N}$ then

$$\sum \frac{a^{n+1}b^{n+1}}{(xF_a + yF_b)^n} \geq \frac{\left(4\sqrt{3}\right)^{n+1}}{(x+y)^n} F.$$

Marin Chirciu

Problema777.

Solve in positive real numbers the system:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 13 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 35 \end{cases}.$$

Sanong Hauyrerai, Math 8/2025

Soluție

Cu substituția $(a,b) = \left(\sqrt[6]{x}, \sqrt[6]{y}\right) \Leftrightarrow (x,y) = \left(a^6, b^6\right)$ sistemul se scrie $\begin{cases} a^2 + b^2 = 13 \\ a^3 + b^3 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ ab = 6 \end{cases} \Leftrightarrow (a,b) \in \{(2,3),(3,2)\} \Leftrightarrow (x,y) \in \left\{\left(2^6, 3^6\right), \left(3^6, 2^6\right)\right\}.$$

Mulțimea soluțiilor sistemului este $S = \{(64,729),(729,64)\}$.

Remarcă.

1). Solve in positive real numbers the system:

$$\begin{cases} \sqrt[5]{x} + \sqrt[5]{y} = 13 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 275 \end{cases}.$$

Soluție

Mulțimea soluțiilor sistemului este $S = \left\{\left(2^{10}, 3^{10}\right), \left(3^{10}, 2^{10}\right)\right\}$.

Remarcă.

Let be $n \in \mathbf{N}, n \geq 3$, n impar. Solve in positive real numbers the system:

$$\begin{cases} \sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y} = 13 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2^n + 3^n \end{cases}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție

Mulțimea soluțiilor sistemului este $S=\left\{\left(2^{2^n},3^{2^n}\right),\left(3^{2^n},2^{2^n}\right)\right\}$.

Problema778.

Evaluate

$$\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sin\sqrt{x}dx.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam, RMM 8/2025

Soluție

$$I=\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sin\sqrt{x}dx \overset{\sqrt{x}=t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2t\sin tdt \overset{parti}{=} 2\left(-t\cos t+\sin t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=2.$$

Deducem că $\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sin\sqrt{x}dx=2$.

Remarcă.

Evaluate

$$\int_0^{\frac{\pi^3}{8}} \sin\sqrt[3]{x}dx.$$

Marin Chirciu

Soluție

$$\int_0^{\frac{\pi^3}{8}} \sin\sqrt[3]{x}dx \overset{\sqrt[3]{x}=t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3t^2\sin tdt \overset{parti}{=} 3\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos tdt=6\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=3\left(\pi-2\right).$$

Problema779.

In ΔABC then

$$\sum\frac{r_a}{r_b}\geq\sum\frac{h_a}{h_b}.$$

Rahim Shahbazov, Azerbaijan

Soluție

$$\sum\frac{r_a}{r_b}\geq\sum\frac{h_a}{h_b}\Leftrightarrow\sum\frac{\frac{S}{p-a}}{\frac{S}{p-b}}\geq\sum\frac{\frac{2S}{a}}{\frac{2S}{b}}\Leftrightarrow\sum\frac{p-b}{p-a}\geq\sum\frac{b}{a}.$$

Folosind substituțiile Ravi $\left(a,b,c\right)=\left(y+z,z+x,x+y\right)$ avem $p=x+y+z$ și inegalitatea $\sum\frac{p-b}{p-a}\geq\sum\frac{b}{a}$ se scrie: $\sum\frac{y}{x}\geq\sum\frac{x+z}{y+z}\Leftrightarrow\sum\frac{y}{x}+3\geq\sum\frac{x+z}{y+z}+3\Leftrightarrow$

$$\sum\left(\frac{y}{x}+1\right)\geq\sum\frac{x+z}{y+z}+3\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sum\left(\frac{x+y}{x}\right)\geq\sum\frac{x+y}{x+z}+3\Leftrightarrow\sum\left(\frac{x+y}{x}-\frac{x+y}{x+z}\right)\geq 3\Leftrightarrow\sum\frac{z\left(x+y\right)}{x\left(x+z\right)}\geq 3,$$

care rezultă din inegalitatea mediilor.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

1). If $x, y, z > 0$ then

$$\sum \frac{y}{x} \geq \sum \frac{x+z}{y+z}.$$

2). If $x, y, z > 0$ then

$$\sum \frac{x}{y} \geq \sum \frac{y+z}{x+z}.$$

3). In ΔABC

$$\sum \frac{r_a}{r_b} \geq \sum \frac{r_b + r_c}{r_a + r_c}.$$

Soluție

Lemă.

If $x, y, z > 0$ then

$$\sum \frac{x}{y} \geq \sum \frac{y+z}{x+z}.$$

Folosind **Lema** pentru $(x, y, z) = (r_a, r_b, r_c)$ obținem: $\sum \frac{r_a}{r_b} \geq \sum \frac{r_b + r_c}{r_a + r_c}$.

4). In ΔABC

$$\sum \frac{h_a}{h_b} \geq \sum \frac{h_b + h_c}{h_a + h_c}.$$

Soluție

Folosim **Lema** pentru $(x, y, z) = (h_a, h_b, h_c)$.

5).In ΔABC

$$\sum \frac{m_a}{m_b} \geq \sum \frac{m_b + m_c}{m_a + m_c}.$$

Soluție

Folosim **Lema** pentru $(x, y, z) = (m_a, m_b, m_c)$.

6). In ΔABC

$$\sum \frac{w_a}{w_b} \geq \sum \frac{w_b + w_c}{w_a + w_c}.$$

Soluție

Folosind **Lema** pentru $(x, y, z) = (w_a, w_b, w_c)$ obținem: $\sum \frac{w_a}{w_b} \geq \sum \frac{w_b + w_c}{w_a + w_c}$.

7). In ΔABC

$$\sum \frac{s_a}{s_b} \geq \sum \frac{s_b + s_c}{s_a + s_c}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție

Folosim **Lema** pentru $(x, y, z) = (s_a, s_b, s_c)$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema780.

If $x, y, z, t \geq a > 0$ then

$$\sum \frac{xy}{(a+y)^2} \geq 1.$$

Crăciun Gheorghe, Mathemathematical Inequalities8/2025

Soluție

$$LHS=\sum\frac{xy}{(a+y)^2}\overset{a\le y}{\ge}\sum\frac{xy}{(y+y)^2}=\sum\frac{xy}{4y^2}=\sum\frac{x}{4y}\overset{AG}{\ge}4\sqrt[4]{\prod\frac{x}{y}}=1=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=t=a$.

Remarcă.

If $x_1,x_2,...,x_n\ge\lambda>0$ then

$$\sum\frac{x_1x_2}{(\lambda+x_2)^2}\ge\frac{n}{4}.$$

Marin Chirciu

Soluție

$$LHS=\sum\frac{x_1x_2}{(\lambda+x_2)^2}\overset{\lambda\le x_2}{\ge}\sum\frac{x_1x_2}{(x_2+x_2)^2}=\sum\frac{x_1x_2}{4x_2^2}=\frac{1}{4}\sum\frac{x_1}{x_2}\overset{AG}{\ge}\frac{1}{4}\cdot n\sqrt[n]{\prod\frac{x}{y}}=\frac{n}{4}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x_1=x_2=...=x_n=\lambda$.

Problema781.

If $x,y,z>0, x+y+z\ge 6$ then

$$\sum\frac{x^2}{yz+\sqrt{1+x^3}}\ge\frac{12}{7}.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam

Soluție

$$LHS=\sum\frac{x^2}{yz+\sqrt{1+x^3}}\overset{AG}{\ge}\sum\frac{x^2}{yz+\frac{2+x^2}{2}}\overset{SOS}{\ge}\sum\frac{x^2}{\frac{y^2+z^2}{2}+\frac{2+x^2}{2}}=$$

$$=\sum\frac{2x^2}{x^2+y^2+z^2+2}=\frac{2\sum x^2}{\sum x^2+2}\overset{(1)}{\ge}\frac{12}{7}=RHS,$$

unde $\frac{2\sum x^2}{\sum x^2+2}\overset{(1)}{\ge}\frac{12}{7}\Leftrightarrow\frac{\sum x^2}{\sum x^2+2}\ge\frac{6}{7}\Leftrightarrow 7\sum x^2\ge 6\sum x^2+12\Leftrightarrow\sum x^2\ge 12$, vezi

$$\sum x^2\overset{CS}{\ge}\frac{\left(\sum x\right)^2}{3}\overset{\sum x\ge 6}{\ge}\frac{6^2}{3}=12.$$

Am folosit mai sus $\sqrt{1+x^3}=\sqrt{(1+x)(1-x+x^2)}\overset{AG}{\le}\frac{(1+x)+(1-x+x^2)}{2}=\frac{2+x^2}{2}$ și

$\frac{y^2+z^2}{2}\ge yz\Leftrightarrow(y-z)^2\ge 0$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=2$.

Remarcă.

If $x,y,z>0, x^2+y^2+z^2=12$ and $n\in\mathbf{N}$ then

$$\sum\frac{x^{2n}}{yz+\sqrt{1+x^3}}\ge\frac{3\cdot 4^n}{7}.$$

Marin Chirciu

Soluție

$$LHS=\sum\frac{x^{2n}}{yz+\sqrt{1+x^3}}\overset{AG}{\geq}\sum\frac{x^{2n}}{yz+\frac{2+x^2}{2}}\overset{SOS}{\geq}\sum\frac{x^{2n}}{\frac{y^2+z^2}{2}+\frac{2+x^2}{2}}=$$

$$=\sum\frac{2x^{2n}}{x^2+y^2+z^2+2}=\frac{2\sum x^{2n}}{\sum x^2+2}=\frac{2\sum x^{2n}}{12+2}=\frac{2\sum x^{2n}}{14}=\frac{\sum x^{2n}}{7}\overset{(1)}{\geq}\frac{3\cdot 4^n}{7}=RHS,$$

unde $\sum x^{2n}\overset{(1)}{\geq}3\cdot 4^n$, vezi $\sum x^{2n}\overset{Holder}{\geq}\frac{\left(\sum x^2\right)^n}{3^{n-1}}=\frac{12^n}{3^{n-1}}=3\cdot 4^n\Leftrightarrow\frac{\sum x^2}{\sum x^2+2}\geq\frac{6}{7}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 7\sum x^2\geq 6\sum x^2+12\Leftrightarrow\sum x^2\geq 12$, vezi $\sum x^2\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum x\right)^2}{3}\overset{\sum x\geq 6}{\geq}\frac{6^2}{3}=12$.

Am folosit mai sus $\sqrt{1+x^3}=\sqrt{(1+x)(1-x+x^2)}\overset{AG}{\leq}\frac{(1+x)+(1-x+x^2)}{2}=\frac{2+x^2}{2}$ și

$\frac{y^2+z^2}{2}\geq yz\Leftrightarrow(y-z)^2\geq 0$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=2$.

Problem782.

If $7a^2+20a+7=0$ then evaluate

$$\frac{a^2}{a^4+3a^2+1}.$$

Sanong Hauyrerai, Math8/2025

Soluție

Avem $7a^2+20a+7=0\Leftrightarrow a^2+1=\frac{-20a}{7}$.

$$\frac{a^2}{a^4+3a^2+1}=\frac{a^2}{a^4+2a^2+1+a^2}=\frac{a^2}{(a^2+1)^2+a^2}=\frac{a^2}{\left(\frac{-20a}{7}\right)^2+a^2}=\frac{1}{\left(\frac{-20}{7}\right)^2+1}=\frac{49}{449}.$$

Remarcă.

If $\lambda a^2+na+\lambda=0$ then evaluate

$$\frac{a^2}{a^4+ka^2+1}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Avem $\lambda a^2+na+\lambda=0\Leftrightarrow a^2+1=\frac{-na}{\lambda}$.

$$\frac{a^2}{a^4+ka^2+1}=\frac{a^2}{a^4+2a^2+1+(k-2)a^2}=\frac{a^2}{(a^2+1)^2+(k-2)a^2}=\frac{a^2}{\left(\frac{-na}{\lambda}\right)^2+(k-2)a^2}=$$

$$=\frac{1}{\left(\frac{-n}{\lambda}\right)^2+k-2}=\frac{\lambda^2}{n^2+(k-2)\lambda^2}.$$

Problema783.

If $a,b,c,d>0, abcd=1$ then

$$\sum \frac{a^5}{\sqrt{a^3+15}} \geq 1.$$

Crăciun Gheorghe, Mathematical Inequalities8/2025

Soluție

Considerăm funcția $f(t)=\frac{t^5}{\sqrt{t^3+15}}, t>0, f'(t)=\frac{7t^7+150t^4}{2(t^3+15)\sqrt{t^3+15}}>0$,

$f''(t)=\frac{1}{4}(t^3+15)^{\frac{-5}{2}}(35t^9+1320t^6+18000t^3)>0$.

Deducem că funcția este strict crescătoare și convexă.

Fie $x=\ln a$, $x+y+z+t=\ln a+\ln b+\ln c+\ln d=\ln(abcd)=\ln 1=0$.

Fie $g(x)=f(\ln x)=\frac{e^{5x}}{\sqrt{e^{3x}+15}}$.

Folosind inegalitatea lui Jensen avem $\sum g(x)\geq 4g\left(\frac{x+y+z+t}{4}\right)=4g(0)=4\cdot\frac{1}{4}=1$.

$LHS=\sum\frac{a^5}{\sqrt{a^3+15}}\overset{Jensen}{\geq} 4g(0)=4\cdot\frac{1}{4}=1=RHS$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=d=1$.

Remarcă.

If $a,b,c>0, abc=1$ and $\lambda\geq 0$ then

$$\sum\frac{a^5}{\sqrt{a^3+\lambda}}\geq\frac{3}{\sqrt{\lambda+1}}.$$

Marin Chirciu

Problema784.

If $a,b,c>0, abc=1$ then

$$\sum\frac{a^2+2b}{a+2}\geq 3.$$

Konstantinos Geronikolas, Greece, Mathematical Inequalities8/2025

Soluție

$LHS=\sum\frac{a^2+2b}{a+2}=\sum\frac{a^2}{a+2}+2\sum\frac{b^2}{ab+2b}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum(a+2)}+2\frac{\left(\sum b\right)^2}{\sum(ab+2b)}=$

$=\frac{p^2}{p+6}+2\cdot\frac{p^2}{q+2p}\overset{(1)}{\geq}1+2\cdot 1=3=RHS$,

unde (1) rezultă din:

i). $\frac{p^2}{p+6}\geq 1$, vezi $\frac{p^2}{p+6}\geq 1\Leftrightarrow p^2-p-6\geq 0\Leftrightarrow(p-3)(p+2)\geq 0\Leftrightarrow p\geq 3$, vezi $p=a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}=3$;

ii). $\frac{p^2}{q+2p}\geq 1$, vezi $\frac{p^2}{q+2p}\geq\frac{p^2}{\frac{1}{3}p^2+2p}=\frac{3p}{p+6}\overset{p\geq 3}{\geq}1$, vezi $q\leq\frac{1}{3}p^2\Leftrightarrow 3q\leq p^2\Leftrightarrow$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarcă.

1).If $a,b,c>0, abc=1$ and $\lambda \geq 0$ then

$$\sum \frac{a^2+\lambda b}{a+2} \geq \lambda+1.$$

Remarcă.
2). If $a,b,c>0, abc=1$ and $\lambda \geq 0$, $n \geq 0$ then

$$\sum \frac{a^2+\lambda b}{a+n} \geq \frac{3(\lambda+1)}{n+1}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema785.
If $a,b,c>0, abc \geq 1$ then

$$\prod \left(a+\frac{1}{a+1}\right) \geq \left(\frac{3}{2}\right)^3.$$

Amir Sofi, Kosovo, Mathematics(College andHigh School)7/2025

Soluție
Lema.
If $a,b,c>0, abc \geq 1$ then

$$a+\frac{1}{a+1} \geq \frac{3}{4}(a+1).$$

Demonstrație.
$a+\frac{1}{a+1} \geq \frac{3}{4}(a+1) \Leftrightarrow (a-1)^2 \geq 0.$

$\prod \left(a+\frac{1}{a+1}\right) \overset{Lema}{\geq} \prod \frac{3}{4}(a+1) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \prod (a+1) \overset{AG}{\geq} \left(\frac{3}{4}\right)^3 \prod \left(2\sqrt{a}\right) =$

$= \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot 8\sqrt{abc} \overset{abc\geq 1}{\geq} \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot 8\sqrt{1} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = RHS.$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.
Remarcă.
1). If $a,b,c \geq 0$ and $\lambda \geq 1$ then

$$\prod \left(a+\frac{(\lambda+1)^2}{4(a+1)}\right) \geq \lambda^3.$$

2). If $a,b,c>0, \prod (a+1) = 8\lambda^3, \lambda \geq 1$ then

$$\prod \left(a+\frac{\lambda}{a+1}\right) \geq \left(\frac{4\lambda-1}{2}\right)^3.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema786.
S:E.25.168. If $x,y,z>0$ then

$$\sum \frac{1}{x} \geq \frac{9\sqrt{2}}{\sum \sqrt{x^2+y^2}}.$$

Andrei Sfichi, elev, Suceava, SGM-4/2025

Soluție

Folosim $\sum \frac{1}{x} \overset{CS}{\geq} \frac{9}{\sum x}$ și $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \overset{Mp\geq Ma}{\geq} \frac{x+y}{2} \Rightarrow \sum x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum \sqrt{x^2+y^2}$ obținem:

$$LHS = \sum \frac{1}{x} \geq \frac{9}{\sum x} \geq \frac{9}{\frac{1}{\sqrt{2}} \sum \sqrt{x^2+y^2}} = \frac{9\sqrt{2}}{\sum \sqrt{x^2+y^2}} = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z$.

Remarcă.

1). If $x, y, z, t > 0$ then

$$\sum \frac{1}{x} \geq \frac{16\sqrt{2}}{\sum \sqrt{x^2+y^2}}.$$

Remarcă.

2). If $x_1, x_2, ..., x_n > 0$ then

$$\sum \frac{1}{x_1} \geq \frac{n^2\sqrt{2}}{\sum \sqrt{x_1^2+x_2^2}}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema787.

Fie $a > 0$ și $x_0 \geq 0$ Demonstrați convergența șirului $(x_n)_{n\geq 0}$ care verifică $0 < \frac{x_{n+1}}{a} \leq 2 - \frac{a}{x_n}$, $\forall n \geq 0$ și să se calculeze limita sa.

Florin Rotaru, Focșani, Problema-23467, GM-1/1996

Soluție

Din $0 < \frac{x_{n+1}}{a}$ și $a > 0 \Rightarrow x_{n+1} > 0, \forall n \geq 0$.

Din $0 < \frac{x_{n+1}}{a} \leq 2 - \frac{a}{x_n} < 2 \Rightarrow x_{n+1} < 2a, \forall n \geq 0$.

Obținem $0 < x_{n+1} < 2a \Rightarrow$ șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este mărginit.

Avem $\frac{x_{n+1}}{a} \leq 2 - \frac{a}{x_n} \Leftrightarrow \frac{x_{n+1}}{a} + \frac{a}{x_n} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{x_n}{a} + \frac{a}{x_n} + \frac{x_{n+1} - x_n}{a} \leq 2$.

Din $a, x_n > 0 \Rightarrow \frac{x_n}{a} + \frac{a}{x_n} \geq 2$.

Din $\frac{x_n}{a} + \frac{a}{x_n} \geq 2$ și $\frac{x_n}{a} + \frac{a}{x_n} + \frac{x_{n+1} - x_n}{a} \leq 2 \Rightarrow x_{n+1} - x_n \leq 0 \Leftrightarrow x_{n+1} \leq x_n \Rightarrow$ șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este descrescător.

Deoarece șirul este mărginit și descrescător rezultă că este convergent.

Rezultă că există $l = \lim_{n\to\infty} x_n \in \mathbf{R}$.

Trecînd la limită în $\frac{x_{n+1}}{a} \leq 2 - \frac{a}{x_n}$ obținem $\frac{l}{a} \leq 2 - \frac{a}{l} \Leftrightarrow \frac{l}{a} + \frac{a}{l} \leq 2 \Leftrightarrow (l-a)^2 \leq 0 \Leftrightarrow l = a$.

Deducem că $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

Problema788.

Fie $A,B,C \in M_n(\mathbf{C})$ astfel încât $ABC = I_n$. Să se arate ă dacă $I_n + A + AB, I_n + B + BC, I_n + C + CA$ sunt matrici inversabile, atunci suma inverselor lor este egală cu I_n.

Cristinel Mortici, Târgoviște, GM-5-6/1996

Soluție

Avem $(I_n + A + AB)^{-1} + (I_n + B + BC)^{-1} + (I_n + C + CA)^{-1} =$

$= (I_n + A + AB)^{-1} + (I_n + B + BC)^{-1} A^{-1}A + (I_n + C + CA)^{-1}(AB)^{-1}AB =$

$= (I_n + A + AB)^{-1} + (A + AB + ABC)^{-1} A + (AB + ABC + ABCA)^{-1} AB =$

$= (I_n + A + AB)^{-1} + (A + AB + I_n)^{-1} A + (AB + I_n + I_n A)^{-1} AB =$

$= (I_n + A + AB)^{-1} + (A + AB + I_n)^{-1} A + (AB + I_n + A)^{-1} AB =$

$= (I_n + A + AB)^{-1}(I_n + A + AB) = I_n$

Am folosit mai sus $X^{-1}Y^{-1} = (YX)^{-1}, \forall X,Y \in M_n(\mathbf{C})$.

Problema789.

If $x,y,z,t \in [0,1]$ then

$$x(1-t) + y(1-x) + z(1-y) + t(1-z) \le 2.$$

S. Cremarenco, Buzău, GM-4/1996

Soluție

Fie $ABCD$ un pătrat de latură 1 și punctele $M \in [AB], N \in [BC], P \in [CD], Q \in [DA]$, astfel încât $AM = x, BC = y, CP = z, DQ = t$.

$[AMQ] + [BMN] + [CNP] + [DPQ] \le [ABCD] \Leftrightarrow \frac{x(1-t)}{2} + \frac{y(1-x)}{2} + \frac{z(1-y)}{2} + \frac{t(1-z)}{2} \le 1$

$\Leftrightarrow x(1-t) + y(1-x) + z(1-y) + t(1-z) \le 2$.

Problema790.

Fie $a \in (0,1)$ fixat. Se consideră șirul $(x_n)_{n\ge1}$ definit prin $x_1 \in (0,1)$ și $x_{n+1} = x_n^2 - ax_n + a, \forall n \ge 1$. Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty}(x_1x_2...x_n).$$

Manuela Prajea, Drobeta Turnu-Severin, GM-5-6/1996

Soluție

Se demonstrează prin inducție că $x_n \in (0,1), \forall n \ge 1$.

$x_1 \in (0,1), x_2 = x_1^2 - ax_1 + a = x_1(x_1 - a) + a < a \Rightarrow x_2 \in (0,1)$.

$x_{n+1} = x_n^2 - ax_n + a = x_n(x_n - a) + a < a \Rightarrow x_n \in (0,1)$.

$x_{n+1} = x_n^2 - ax_n + a > 0$, vezi $\Delta = a^2 - 4a < 0$.

Din $x_n \in (0,1), \forall n \ge 1$,rezultă că șirul $(x_n)_{n\ge1}$ este mărginit.

Apoi $x_{n+1} - x_n = x_n^2 - (a+1)x_n + a = (x_n - a)(x_n - 1) > 0 \Rightarrow x_{n+1} - x_n > 0 \Rightarrow x_{n+1} > x_n \Rightarrow$

$\Rightarrow$ șirul $(x_n)_{n\ge1}$ este strict crescător.

Obținem $0 < x_1 < x_2 < ... < x_n < a < 1$.

Deoarece șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este monoton și crecător, deducem că este convergent, deci are limită finită, $l=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Trecînd la limită în relația de recurență $x_{n+1}=x_n^2-ax_n+a$ obținem: $l=l^2-al+a \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (l-a)(l-1)=0 \Leftrightarrow l=a$.

Obținem $x_{n+1}-a=x_n(x_n-a), x_n-a=x_{n-1}(x_{n-1}-a),..., x_2-a=x_1(x_1-a)\Rightarrow$

$\Rightarrow x_1x_2...x_n=\frac{x_{n+1}-a}{x_1-a}$, Prin trecere la limită obținem $\lim\limits_{n\to\infty}(x_1x_2...x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-a}{x_1-a}=\frac{a-a}{x_1-a}=0$.

Deducem că $\lim\limits_{n\to\infty}(x_1x_2...x_n)=0$.

Problema791.

O703. In acute ΔABC holds

$$\sum\frac{\cos A}{\cos(B-C)}\geq 1+\frac{2}{3}\sum\cos^2 A.$$

Titu Andreescu, USA, Marius Stănean, România Mathematical Reflections Nr.4/2025

Remark.

1). In ΔABC holds

$$\sum\frac{\cos^2 A}{\cos(B-C)}\geq\frac{3}{4}(1-\lambda)+\lambda\sum\cos^2 A, 0\leq\lambda\leq\frac{1}{12}.$$

Marin Chirciu

Solution

$$LHS=\sum\frac{\cos^2 A}{\cos(B-C)}\overset{Radon}{\geq}\frac{\left(\sum\cos A\right)^2}{\sum\cos(B-C)}=\frac{\left(1+\frac{r}{R}\right)^2}{\frac{p^2+r^2+2Rr-2R^2}{2R^2}}=\frac{2(R+r)^2}{p^2+r^2+2Rr-2R^2}\overset{Gerretsen}{\geq}$$

$$\overset{Gerretsen}{\geq}\frac{2(R+r)^2}{4R^2+4Rr+3r^2+r^2+2Rr-2R^2}=\frac{2(R+r)^2}{2R^2+6Rr+4r^2}=\frac{(R+r)^2}{R^2+3Rr+2r^2}\overset{(1)}{\geq}$$

$$\overset{(1)}{\geq}\frac{3}{4}(1-\lambda)+\lambda\sum\cos^2 A=RHS,$$

where $\frac{(R+r)^2}{R^2+3Rr+2r^2}\overset{(1)}{\geq}\frac{3}{4}(1-\lambda)+\lambda\sum\cos^2 A\Leftrightarrow$

$\frac{(R+r)^2}{R^2+3Rr+2r^2}\geq\frac{3}{4}(1-\lambda)+\lambda\cdot\frac{6R^2+4Rr+r^2-p^2}{2R^2}$, resulting from $p^2\geq 16Rr-5r^2$.

Remains to show that $\frac{(R+r)^2}{R^2+3Rr+2r^2}\geq\frac{3}{4}(1-\lambda)+\lambda\cdot\frac{6R^2+4Rr+r^2-16Rr+5r^2}{2R^2}$

$\Leftrightarrow(1-9\lambda)R^4-(3\lambda+1)R^3r+(42\lambda-2)R^2r^2+12\lambda Rr^3-24r^4\geq 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(R-2r)\left[(1-9\lambda)R^3+(1-21\lambda)R^2r+12\lambda r^3\right]\geq 0$, see $R\geq 2r$,(Euler) and $0\leq\lambda\leq\frac{1}{12}$.

We used $\sum\cos^2 A=\frac{6R^2+4Rr+r^2-p^2}{2R^2}$.

Equality occurs if and only if the triangle is equilateral.

2). In ΔABC holds

$$\sum\frac{\cos^2 A}{\cos(B-C)}\geq\frac{11}{16}+\frac{1}{12}\sum\cos^2 A.$$

Marin Chirciu

Solution

Case $\lambda=\frac{1}{12}$ in the last Problem.

Problema792.

J704. If $a,b,c>0$, $a+b+c=6$ then

$$\sum\frac{1}{b+c}+\frac{3}{2\sum a^2}\geq\frac{7}{8}.$$

Mihaela Berindeanu, Bucharest, România, Mathematical Reflections 4/2025

Solution.

$$\sum\frac{1}{b+c}+\frac{3}{2\sum a^2}\geq\frac{7}{8}\Leftrightarrow\sum\frac{24}{b+c}+\frac{36}{\sum a^2}\geq 21\overset{\sum a=6}{\Leftrightarrow}\sum\frac{4(a+b+c)}{b+c}+\frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum a^2}\geq 21\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sum 4\left(1+\frac{a}{b+c}\right)+\frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum a^2}\geq 21\Leftrightarrow 12+\sum\frac{4a}{b+c}+\frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum a^2}\geq 21\Leftrightarrow\sum\frac{4a}{b+c}+\frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum a^2}\geq 9$$

$$\Leftrightarrow\sum\frac{4a}{b+c}+\frac{\sum a^2+2\sum bc}{\sum a^2}\geq 9\Leftrightarrow\sum\frac{4a}{b+c}+\frac{2\sum bc}{\sum a^2}+1\geq 9\Leftrightarrow\sum\frac{4a}{b+c}+\frac{2\sum bc}{\sum a^2}\geq 8\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sum\frac{2a}{b+c}+\frac{\sum bc}{\sum a^2}\geq 4,$$ resulting from:

$$\sum\frac{2a}{b+c}=\sum\frac{2a^2}{a(b+c)}\overset{Titu-Lema}{\geq}\frac{2\left(\sum a\right)^2}{\sum a(b+c)}=\frac{2\left(\sum a\right)^2}{2\sum bc}=\frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum bc}.$$

It remains to show that:

$$\frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum bc}+\frac{\sum bc}{\sum a^2}\geq 4\Leftrightarrow\frac{\sum a^2+2\sum bc}{\sum bc}+\frac{\sum bc}{\sum a^2}\geq 4\Leftrightarrow\frac{\sum a^2}{\sum bc}+2+\frac{\sum bc}{\sum a^2}\geq 4\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sum a^2}{\sum bc}+\frac{\sum bc}{\sum a^2}\geq 2,\text{ see }\frac{\sum a^2}{\sum bc}+\frac{\sum bc}{\sum a^2}\overset{AM-GM}{\geq}2\sqrt{\frac{\sum a^2}{\sum bc}\cdot\frac{\sum bc}{\sum a^2}}=2.$$

Equality occurs if and only if $a=b=c=2$.

Remark.

If $a,b,c>0$, $a+b+c=6$ and $0\leq\lambda\leq\frac{3}{2}$ then

$$\sum\frac{1}{b+c}+\frac{\lambda}{\sum a^2}\geq\frac{\lambda+9}{12}.$$

Marin Chirciu

Problema793.

23556. Se consideră un inel $\mathbf{A}$ cu proprietatea că $x\in\mathbf{A}$, $x^2=x\Leftrightarrow x=0$ sau $x=1$.
Dacă $a,b\in\mathbf{A}$, $ab=a+b$, să se arate că $ab=ba$.

Cristinel Mortici,Târgoviște, GM5-6/1996

Soluție.

Lema.

Se consideră un inel $\mathbf{A}$ cu proprietatea că $x\in\mathbf{A}$, $x^2=x\Leftrightarrow x=0$ sau $x=1$.

Dacă $x, y \in \mathbf{A}$, $xy = 1$, atunci $yx = 1$.

Demonstrație.

$(yx)^2 = (yx)(yx) = y(xy)x \overset{xy=1}{=} yx \Rightarrow (yx)^2 = yx \overset{ipoteza}{\Rightarrow} yx = 0$ sau $yx = 1$.

Dacă $yx = 0 \Rightarrow xyx = 0 \overset{xy=1}{\Rightarrow} x = 0 \Rightarrow xy = 0$, contradicție, deci $yx = 1$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

$ab = a + b \Rightarrow (a-1)(b-1) = 1 \overset{Lema}{\Rightarrow} (b-1)(a-1) = 1 \Rightarrow ba = a + b$.

Din $ab = a + b$ și $ba = a + b \Rightarrow ab = ba$.

Problema794.

Solve for naturals

$$\sum \left(1 + \frac{x}{y+z}\right)^2 = \frac{27}{4}.$$

ShortList JBMO-2012

Soluție.

$$LHS = \sum \left(1 + \frac{x}{y+z}\right)^2 \overset{CS}{\geq} \frac{\left(\sum\left(1 + \frac{x}{y+z}\right)\right)^2}{3} = \frac{\left(3 + \sum \frac{x}{y+z}\right)^2}{3} \overset{Nesbitt}{\geq} \frac{\left(3 + \frac{3}{2}\right)^2}{3} = \frac{27}{4} = RHS,$$ cu

egal pentru $x = y = z$.

Deducem că mulțimea soluțiilor ecuației este $S = \{(\lambda, \lambda, \lambda) / \lambda \in \mathbf{N}\}$.

Remarcă.

Let be $n \in \mathbf{N}^*$ fixed.Solve for naturals

$$\sum \left(1 + \frac{x}{y+z}\right)^n = 3\left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Pentru $n = 1$ se obține $\sum \left(1 + \frac{x}{y+z}\right) = \frac{9}{2} \Leftrightarrow 3 + \sum \frac{x}{y+z} \overset{Nesbitt}{\geq} 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$, cu egal pentru

$x = y = z$.

Pentru $n \geq 2$ se folosește inegalitatea lui Holder.

$$\sum \left(1 + \frac{x}{y+z}\right)^n \overset{Holder}{\geq} \frac{\left(\sum\left(1 + \frac{x}{y+z}\right)\right)^n}{3^{n-1}} = \frac{\left(3 + \sum \frac{x}{y+z}\right)^n}{3^{n-1}} \overset{Nesbitt}{\geq} \frac{\left(3 + \frac{3}{2}\right)^n}{3^{n-1}} = 3\left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

Deducem că mulțimea soluțiilor ecuației este $S = \{(\lambda, \lambda, \lambda) / \lambda \in \mathbf{N}\}$.

Problema795.

24073. Să se demonstreze că

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1 + x^{1998}}}{1 + 1999^x} \leq \sqrt{\frac{2000}{1999}}.$$

Florin Nicolaescu, Balș, Olt, GM 2/1999

Soluție.

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1 + x^{1998}}}{1 + 1999^x} dx \overset{x \to -x}{=} \int_{1}^{-1} \frac{\sqrt{1 + (-x)^{1998}}}{1 + 1999^{-x}} (-dx) = \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1 + x^{1998}}}{1 + 1999^{-x}} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2I=\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1+x^{1998}}}{1+1999^x}dx+\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1+x^{1998}}}{1+1999^{-x}}dx=\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1+x^{1998}}\left(1+1999^x\right)}{1+1999^x}dx=\int_{-1}^{1}\sqrt{1+x^{1998}}dx=$$

$$=2\int_0^1\sqrt{1+x^{1998}}dx\Rightarrow I=\int_0^1\sqrt{1+x^{1998}}dx$$

Rezultă $I=\int_0^1\sqrt{1+x^{1998}}dx\overset{CBS}{\le}\sqrt{\int_0^1 1dx\cdot\int_0^1\left(1+x^{1998}\right)dx}=\sqrt{1\cdot\left(x+\frac{x^{1999}}{1999}\right)\Big|_0^1}=\sqrt{1+\frac{1}{1999}}=\sqrt{\frac{2000}{1999}}$.

Remarcă.
Să se demonstreze că

$$\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1+x^{2n}}}{1+(2n+1)^x}\le\sqrt{\frac{2n+2}{2n+1}}\text{, unde } n\in\mathbf{N}^*.$$

Marin Chirciu

Problema796.
Find

$$\lim_{n\to\infty}\left(2\sqrt[n]{10}-1\right)^n.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam, RMM 6/2025

Soluție.

$$\lim_{n\to\infty}\left(2\sqrt[n]{10}-1\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+2\sqrt[n]{10}-2\right)^n=\lim_{n\to\infty}(1+u)^{\frac{1}{u}\cdot un}=\left(\lim_{u\to0}(1+u)^{\frac{1}{u}}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty}un}=$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}un}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2\sqrt[n]{10}-2\right)n}=e^{2\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{10}-1\right)n}=e^{2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}}=e^{2\ln10}=e^{\ln10^2}=10^2=100.$$

Deducem că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2\sqrt[n]{10}-1\right)^n=100$.

Remarcă.
Let be $\lambda>1$ fixed.Find

$$\lim_{n\to\infty}\left(2\sqrt[n]{\lambda}-1\right)^n.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Deducem că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2\sqrt[n]{\lambda}-1\right)^n=\lambda^2$.

Problema797.
If $x,y,z>0$, $x+y+z=1$ then

$$4\left(\sum xy\right)^2\le\sum xy+3xyz.$$

George Apostolopoulos, Greece, Mathematical Inequalities 5/2024

Soluție.
Omogenizăm $4\left(\sum xy\right)^2\le\sum xy+3xyz\Leftrightarrow4\left(\sum xy\right)^2\le\left(\sum x\right)^2\sum xy+3xyz\sum x\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sum xy\left(x^2+y^2\right)\ge2\sum x^2y^2\Leftrightarrow\sum xy(x-y)^2\ge0$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Remarcă.
If $x,y,z>0$, $x+y+z=1$ and $0\le\lambda\le3$ then

$$(\lambda+1)\left(\sum xy\right)^2 \le \frac{2\lambda+3}{9}\sum xy+\lambda xyz.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Omogenizăm $(\lambda+1)\left(\sum xy\right)^2 \le \frac{2\lambda+3}{9}\sum xy+\lambda xyz \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\lambda+1)\left(\sum xy\right)^2 \le \frac{2\lambda+3}{9}\left(\sum x\right)^2\sum xy+\lambda xyz\sum x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2\lambda+3)\left(\sum xy(x-y)^2\right)+(3-\lambda)\sum x^2(y-z)^2 \ge 0$, vezi $0\le\lambda\le 3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Remarcă.

In ΔABC

$$1).\ 4\left(\sum\frac{r}{r_ar_b}\right)^2 \le \sum\frac{1}{r_ar_b}+\frac{3}{p^2}.$$

Soluție.

Lema.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=1$ then

$$4\left(\sum xy\right)^2 \le \sum xy+3xyz.$$

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum\frac{1}{r_a}=\frac{1}{r} \Leftrightarrow \sum\frac{r}{r_a}=1$.

Folosind **Lema** pentru $(x,y,z)=\left(\frac{r}{r_a},\frac{r}{r_b},\frac{r}{r_c}\right)$ obținem:

$$4\left(\sum\frac{r}{r_a}\cdot\frac{r}{r_b}\right)^2 \le \sum\frac{r}{r_a}\cdot\frac{r}{r_b}+3\frac{r}{r_a}\cdot\frac{r}{r_b}\cdot\frac{r}{r_c} \Leftrightarrow 4\left(\sum\frac{r}{r_ar_b}\right)^2 \le \sum\frac{1}{r_ar_b}+\frac{3}{p^2}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

In ΔABC

$$2).\ 4\left(\sum\frac{r}{h_ah_b}\right)^2 \le \sum\frac{1}{h_ah_b}+\frac{3R}{rp^2}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema798.

Fie șirul de funcții $f_n:\left(\frac{-1}{e^n},\infty\right)\to\mathbf{R}$, $f_n(x)=\ln(1+e^nx)$ și $I_n=\int_0^{1-\frac{1}{e^n}} f_n(x)\,dx$.

Calculați $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{I_n}{n}\right)^n$.

Marin Chirciu, Math6/2025

Soluție.

$$I_n = \int_0^{1-\frac{1}{e^n}} f_n(x)\,dx \overset{parti}{=} \int_0^{1-\frac{1}{e^n}} x'\ln(1+e^n x)\,dx = x\ln(1+e^n x)\Big|_0^{1-\frac{1}{e^n}} - \int_0^{1-\frac{1}{e^n}} x\frac{e^n}{1+e^n x}dx = n-1+\frac{1}{e^n}.$$

Rezultă că $I_n = n-1+\frac{1}{e^n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{I_n}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1+\frac{1}{e^n}}{n}\right)^n \overset{(1^\infty)}{=} e^{-1} = \frac{1}{e}$.

Problema799.

Fie mulțimea $G = \left\{ M(x) = \begin{pmatrix} chx & 0 & shx \\ 0 & 0 & 0 \\ shx & 0 & chx \end{pmatrix} / x \in \mathbf{R} \right\}$, unde $chx = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $shx = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

Arătați că $(\mathbf{R},+)$ și $(G,.)$ sunt două grupuri izomorfe.

Marin Chirciu,Math 6/2025

Soluție.

Avem $\det M(x) = ch^2x - sh^2x = 1, M(x)\cdot M(y) = M(x+y)$.

Funcția $f:\mathbf{R}\to G$, $f(x) = M(x)$ este bijectivă și $f(x+y) = f(x)f(y), \forall x,y\in\mathbf{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow (\mathbf{R},+) \cong (G,.)$.

Problema800.

Evaluate

$$\int_1^5 \frac{x^7}{(6-x)^7+x^7}dx.$$

Sanong Huayrerai, Math 6/2025

Soluție.

Folosind $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx \Rightarrow I = \int_1^5 \frac{x^7}{(6-x)^7+x^7}dx = \int_1^5 \frac{(6-x)^7}{x^7+(6-x)^7}dx \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2I = \int_1^5 \frac{x^7}{(6-x)^7+x^7}dx + \int_1^5 \frac{(6-x)^7}{x^7+(6-x)^7}dx = \int_1^5 dx = x\Big|_1^5 = 5-1 = 4.$$

Din $2I = 4 \Rightarrow I = 2$.

Remarca.

If $\lambda > 0, n\in\mathbf{N}$,then evaluate

$$\int_1^{2\lambda+1} \frac{x^n}{(2\lambda+2-x)^n+x^n}dx.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosind $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx \Rightarrow \int_1^{2\lambda+1} \frac{x^n}{(2\lambda+2-x)^n+x^n}dx = \lambda$.

Bibliografie:

1. C.Năstăsescu, C.Niță, M.Brandiburu, D. Joița , Exerciții de algebră, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1992.

2. O. Bottema, R. Z. Djordjević, R. R. Janić, D. S. Mitrinović și P. M. Vasić, „Geometric Inequalities”, Groningen 1969, Olanda .
3. Marin Chirciu, Inegalități trigonometrice, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2016.
4. Marin Chirciu, Inegalități cu linii importante în triunghi ,de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2018.
5. Marin Chirciu, Inegalități cu laturi şi cu raze în triunghi, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2017.
6. George Apostolopoulos, Greece , Mathematical Inequalites 5/2025.
7. Kostantinos Geronikolas, Greece, Mathematical Inequalities 8/2025.
8. Eldeniz Hesenov, Georgia, RMM 6/2020.
9. Nguyen Van Hoa, Vietnam, Mathematical Inequalities 8/2025.
10. Crăciun Gheorghe, Ploiești, Mathematical Inequalities 8/2025.
11. Sarkhan Adgozalov, Georgia, RMM 8/2025.
12. Ertan Yildirim Turkey, RMM 5/2025.
13. Nguyen Hung Cuong, Vietnam, RMM 8/2025.
14. Adil Abdullayev, Azerbaijan, RMM 8/2025.
15. Panagiotis Danousis, Greece, Math Atelier 8/2025.
16. Kostas Geronikolas, Greece, Mathematical Inequalities 6/2020.
17. Vlad Boskoff, Teoreme de geometrie plană, Universitatea București, 1986.
18. Dorin Marghidanu, Corabia, Olt, Mathematical Inequalities 8/2025.
19. D.M. Bătinețu-Giurgiu, București, RMM 8/2025.
20. Claudia Nănuți, România, RMM 8/2025.
21.Le Khanski, Mathematical Inequalities 8/2025
21. Mihaly Bencze, Brașov, RMM 8/2025.
22. Neculai Stanciu, Buzău, RMM 8/2025.
23. Zaza Mzhavanadze, Georgia, RMM 8/2025.
24. Titu Andreescu,USA, Mathematical Reflections 4/2025.
25. Kunihiko Chikaya, Japan, Mathematical Inequalities 8/2025.
25. Nguyen Ngoc Phuc, Vietnam, Mathematical Inequalities 8/2025.
26. Sanong Huyrerai,Math 8/2025.
27. Nguyen Viet Hung, Vietnam,Crux Mathematicorum, 8/2025.
28. Daniel Sitaru, Romania, RMM 8/2025.
29. Elton Papanikolla,MathOlymp, 8/2025.
30. Mehmet Șahin, Turkey, RMM 5/2017.
31. Adil Abdullayev, Azerbaijan,RMM 4/2017.
32. Nguyen Minh Tho, Vietnam, Mathematical Inequalites 8/2025.
33. Rahim Shahbazov,Azerbaijan, RMM 8/2025.
38.Marius Stănean, Zalău, Romania, Mathematical Reflections 4/2025.
39.An Zhenping, China, Mathematical Reflections, Nr.2/2025.
40.Mihaela Berindeanu, București, Mathematical Reflections Nr.4/2025.
41.Amir Sofi, Kosovo. Mathematics(College and High School) 8/2025.
42.Sampas Theodoros, Greece, Mathematical Inequalities 8/2025.
43. Ermal Feleqi, Mathematical Inequalities 8/2025.
44.Matematika v școle, Concursul GM-1994.
45.GM-10/1977, Concursul GM-1994.
46.THCS 8/2025.
47.ShortList JBMO-2012.
48.Andrei Sfichi, elev, Suceava, SGM-4/2025.
49.Florin Rotaru, Focșani, GM 1/1996.
50. Chew-Seong Cheong, Math 8/2025.

51. Titu Zvonaru, Comănești, Bacău, Concursul,,Vranceanu-Procopiu,,Bacău-2012.
52.Sorin Peligrad, Pitești, Concurs- GM-1994.
53.Cristinel Mortici, Târgoviște, GM-5-6/1996.
54.S. Cremarenco, Buzău, GM-4/1996.
55.Florin Nicolaescu, Balș, Olt, GM 2/1999.
56.Manuela Prajea, Drobeta Turnu-Severin, GM-5-6/1996.
57.Francz Adalbert, Arad, GM-8/1988.
58.Chew-Seong Cheong, Math 8/2025
59.Marin Chirciu, Inegalități algebrice 2,de inițiere la perf, Ed.Paralela 45, Pitești, 2021.
60.Marin Chirciu, Inegalități geometrice2, inițiere și perf, Ed. Paralela 45, Pitești, 2021.
61.Marin Chirciu, Inegalități algebrice, de la inițiere la perf, Ed.Comper, Băbana, 2025.

Art 9000
1 Iunie 2024