159 pagini

WWW.MATEINFO.RO

REVISTA ELECTRONICA MATEINFO.RO

IUNIE 2025
ISSN 2065 - 6432

REVISTĂ DIN FEBRUARIE 2009

COORDONATOR:
ANDREI OCTAVIAN DOBRE

REDACTORI PRINCIPALI ȘI SUSȚINĂTORI PERMANENȚI AI REVISTEI

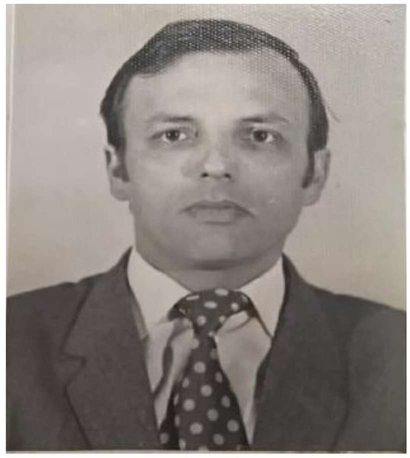
NECULAI STANCIU
MARIN CHIRCIU
ROXANA MIHAELA STANCIU

ARTICOLE

R.E.M.I. IUNIE 2025

PUTEȚI TRIMITE ARTICOLE ÎN FORMAT WORD PE REVISTA.MATEINFO@YAHOO.COM

ÎN MEMORIA MATEMATICIANULUI
TITU ZVONARU



(N. 27 noiembrie 1953 – D. 11 aprilie 2025)

1. On to Problem Q111 from Math Journal Sclipirea Minţii 34/2024

By Nicusor Zlota, Traian Vuia Technical College Auto Focsani,Romania

Q111. Proposed by Florin Rotaru, Focşani, Romania. If $a,b,c>0$, then prove that

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{6\sqrt[3]{abc}}{a+b+c}\ge 5.$$

Solution. Let a, b, c be positive real numbers. We will prove that

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3abc}+\frac{3\sqrt[3]{abc}}{a+b+c}\ge 2,(1).$$

Proof. By the AM-GM Inequality and $\frac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c}\ge(\frac{a+b+c}{3})^2\ge\sqrt[3]{(abc)^2}$

We have

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3abc}+\frac{3\sqrt[3]{abc}}{a+b+c}\ge 2\sqrt{\frac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c}\frac{1}{\sqrt[3]{(abc)^2}}}\ge 2\sqrt{(\frac{a+b+c}{3})^2\frac{1}{\sqrt[3]{(abc)^2}}}\ge 2$$

The inequality equivalent to

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{6\sqrt[3]{abc}}{a+b+c}\ge\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-\frac{2(a^3+b^3+c^3)}{3abc}+4\ge 5 \text{ or}$$

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{2(a^3+b^3+c^3)}{3abc}+4\ge 5\Leftrightarrow\sum\frac{a}{b}+\sum\frac{b}{a}+\sum\frac{a}{b}-\sum\frac{b}{a}-\frac{4(a^3+b^3+c^3)}{3abc}\ge 2,(2)$$

Denote

$$a+b+c=p, ab+bc+ca=q, abc=r$$

The inequality (2) can be rewritten as

$$\sum\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)-\frac{4(a^3+b^3+c^3)}{3abc}\ge 2+\sum\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)\Leftrightarrow$$

$$\frac{\sum a^2(b+c)}{abc}-\frac{4(a^3+b^3+c^3)}{3abc}\ge 2+\frac{(a-b)(b-c)(a-c)}{abc}$$

Then we need prove the inequality in case

$(a-b)(b-c)(c-a) \geq 0$, so it is sufficient to prove the inequality

$$\frac{pq-3r}{r} - 4\frac{p^3-3pq+3r}{3r} \geq 2 + \frac{\sqrt{p^2q^2+18pqr-27r^2-4q^3-4p^3r}}{r}$$

After some simple calculations, it remains to show that

$$(15pq-4p^3-27r)^2 \geq 9(p^2q^2+18pqr-27r^2-4q^3-4p^3r) \Leftrightarrow$$

$$27 \cdot 36r^2 - 36r(7p^3-27pq) + 36q^3 + 216p^2q^2 - 120p^4q + 16p^6 \geq 0$$

Suppose $p = 3$, so we need to prove

$$27r^2 - 27r(7-3q) + q^3 + 54q^2 - 270p^4q + 324 \geq 0$$

Letting $f(r) = 27r^2 + 27r(3q-7) + q^3 + 54q^2 - 270q + 324$

Let two case

1) Let $r_{ct} = 7-3q$, then If $0 \leq q \leq \frac{7}{3} \Longrightarrow r_{ct} < 0$

$f(0) = q^3 + 54q^2 - 270q + 324 > 0$

2) If $\frac{7}{3} \leq \mathrm{q} \leq 3$, $\Delta_{rct} = 27^2(3q-7)^2 - 108(q^3+54q^2-270q+324) < 0$

So , $f(r) \geq 0, \forall q \in [\frac{7}{3}, 3]$

2. An Introduction to Pell's Equation and Catalan's Conjecture

Asist.univ.drd. Vîntu Ioan-Vladimir

Our aim is to present a link between some particular cases of Catalan's conjecture and Pell's equation. Also known under the name of the Pell-Fermat equation, we consider any Diophantine equation of the form

$$x^2 - dy^2 = 1,$$

where x, y are integers and n is a given nonsquare natural number. It is well established that the solutions of Pell's equation can be written using the sequence (x_n, y_n) , where

$$x_1 = x_0, y_1 = y_0, x_{n+1} = x_0 x_n + dy_0 y_n, y_{n+1} = y_0 x_n + x_0 y_n, \forall n \geq 1 \ (1).$$

Here, (x_0, y_0) is the minimal solution of the equation, different from the trivial solution $(1,0)$. Let us begin our work with the following lemmas.

Lemma 1

For any $n \geq 0$, we have

$$x_n + y_n\sqrt{d} = (x_0 + y_0\sqrt{d})^{n+1}.$$

Proof

We use the method of mathematical induction. For the base case, the identity becomes trivial. We now assume the equation to be true for $n - 1$ and prove that it is true for n as well. Using (1) and

$$x_{n-1} + y_{n-1}\sqrt{d} = (x_0 + y_0\sqrt{d})^n,$$

we obtain

$$(x_0 + y_0\sqrt{d})^{n+1} = x_0 x_{n-1} + dy_0 y_{n-1} + \sqrt{d}(x_{n-1}y_0 + x_0 y_{n-1}) = x_n + y_n\sqrt{d},$$

and our proof is complete.

Lemma 2

For any integers a, b and natural number n, the following modular equation holds:

$$(a - b)^n \equiv (-b)^n \ (mod\ n).$$

We leave the proof as an exercise for the reader. One quick approach would be using the binomial expansion.

Catalan's conjecture

The conjecture dates back to 1842, when Eugene Catalan had the idea of the following equation:

$$x^u - y^v = 1.$$

The Romanian mathematician Preda Mihăilescu used properties of cyclotomic polynomials and the Dedekind domain to conclude that Catalan's conjecture has only one solution over the natural numbers, namely $(x, y, u, v) = (3,2,2,3)$.

Since the equation was solved much earlier in the cases when either u or v is even, by Lebesgue in 1850 and Ko-Chao in 1963 respectively, we will assume u and v to be odd numbers in the following particular cases, assumption that will allow us to create the transition from Catalan's conjecture to Pell's equation.

Problem 1

The equation

$$x^u - y^v = 1, xy = a(a+1), a \in \mathbb{N}, u, v > 3$$

has no solutions over the set of natural numbers.

Proof

By squaring Catalan's equation, we obtain

$$x^{2u} + y^{2v} - 2x^u y^v = 1 \to (x^u + y^v)^2 - 4x^u y^v = 1.$$

On the other hand, from the hypothesis we get

$$4x^u y^v = 4xyx^{u-1}y^{v-1} = 4a(a+1)\left(x^{\frac{u-1}{2}}y^{\frac{v-1}{2}}\right)^2 = ((2a+1)^2-1)\left(x^{\frac{u-1}{2}}y^{\frac{v-1}{2}}\right)^2 =$$

$$= (b^2-1)\left(x^{\frac{u-1}{2}}y^{\frac{v-1}{2}}\right)^2,$$

where $b = 2a + 1$. The equation becomes

$$(x^u + y^v)^2 - (b^2-1)\left(x^{\frac{u-1}{2}}y^{\frac{v-1}{2}}\right)^2 = 1.$$

Let us assume that the equation has at least one solution. Since we arrived at Pell's equation, this means that the equation has in fact an infinite number of solutions. We search for the minimal solution of this equation. Let $x^u + y^v = A$ and $x^{\frac{u-1}{2}}y^{\frac{v-1}{2}} = B$. We can quickly observe that when $B = 1$, A can equal b, hence the minimal solution becomes $(A_0, B_0) = (b, 1)$. By applying **lemma 1,** the general solution will satisfy

$$A_{n-1} + B_{n-1}\sqrt{b^2-1} = (A_0 + B_0\sqrt{b^2-1})^n = (b + \sqrt{b^2-1})^n, \forall n \in N^*.$$

Using the binomial expansion,

$${x_{n-1}}^u + {y_{n-1}}^v + {x_{n-1}}^{\frac{u-1}{2}}{y_{n-1}}^{\frac{v-1}{2}}\sqrt{b^2-1} =$$

$$= b^n + b^{n-1}\sqrt{b^2-1}\binom{n}{1} + b^{n-2}(b^2-1)\binom{n}{2} + b^{n-3}(b^2-1)\sqrt{b^2-1}\binom{n}{3} + \cdots.$$

Firstly, observe that $b^2 - 1 = 4a^2 + 4a = 4a(a+1) = 4x_n y_n$. Moreover, $b^2 - 1$ is definitely not a perfect square (when $b > 1$) and thus $\sqrt{b^2 - 1}$ is not an integer either. Consequently, we can equalize the terms that contain the square root from the right side with the ones that contain the square root from the left side, and the same for the terms that do not contain the square root. Note that all the terms from the second equation are multiples of $x_{n-1}y_{n-1}$, therefore $x_{n-1}y_{n-1}|nb^{n-1}$ (2). Now, let d be a natural prime factor such that $d|b$ and $d|x_{n-1}y_{n-1}$. We get

$$d|x_{n-1}y_{n-1} \Rightarrow d|4x_{n-1}y_{n-1} \Rightarrow d|b^2 - 1 \Rightarrow d|1.$$

This means that $(x_{n-1}y_{n-1}, b) = 1$. From (2), we get $x_{n-1}y_{n-1}|n$.

Let p be a prime factor of x_{n-1}. We have $p|x_{n-1}$ and since $\frac{u-1}{2} \geq 2 \Rightarrow p^2|x_{n-1}{}^{\frac{u-1}{2}} \Rightarrow p^2|x_{n-1}{}^{\frac{u-1}{2}} y_{n-1}^{\frac{v-1}{2}}$, which is the LHS of the second equation. Consequently,

$$p^2|nb^{n-1} + 4\binom{n}{3} b^{n-3} x_{n-1}y_{n-1} + M_{x_{n-1}^2 y_{n-1}^2} \Rightarrow p^2|nb^{n-1} + 4\binom{n}{3} b^{n-3} x_{n-1}y_{n-1}.$$

If $p > 3$, then $p|\frac{n(n-1)(n-2)}{6} = C_n{}^3$ (because $(p,2) = (p,3) = 1$) and having $p|x_{n-1}$, we obtain $p^2|4\binom{n}{3} b^{n-3} x_{n-1}y_{n-1} \Rightarrow p^2|nb^{n-1}$.

However, $(x_{n-1}, b) = 1 \Rightarrow (p, b) = 1 \Rightarrow p^2|n, \forall n \geq 1$, contradiction. Therefore, $p \leq 3$ and the prime factors of x_{n-1} can only be 2 or 3. In an analogous way we can prove that this also applies for y_{n-1}.

Coming back to the initial equation, we can quickly see that $(x_{n-1}, y_{n-1}) = 1$. This means that either $x_{n-1} = 2^{2a+1}$ and $y_{n-1} = 3^{2b+1}$ or $x_{n-1} = 3^{2a+1}$ and $y_{n-1} = 2^{2b+1}$, where a and b are positive integers. Note that this is also because u and v are odd integers.

In the first case, the equation becomes

$$2^{2a+1} - 3^{2b+1} = 1.$$

By applying **lemma 2**, we get

$$2^{2a+1} = (3-1)^{2a+1} \equiv (-1)^{2a+1} \equiv -1 (mod\ 3).$$

However, $3^{2b+1} \equiv 0 (mod\ 3)$, therefore $LHS \equiv -1 (mod\ 3)$, contradiction.

In the second case, the equation becomes

$$3^{2a+1} - 2^{2b+1} = 1.$$

Again, using **lemma 2**, we get

$$3^{2a+1} = (4-1)^{2a+1} \equiv (-1)^{2a+1} \equiv -1 (mod\ 4).$$

However, $2^{2b+1} \equiv 0 (mod\ 4)$ because $2b + 1 > 3 \geq 2$ (from the hypothesis) and thus $LHS \equiv -1 (mod\ 4)$ and this is our final contradiction.

Problem 2

The equation

$$x^u - y^v = 1, xy = a^2 + 2, a \in Z, u, v > 3$$

has no solutions in the set of positive integers.

Proof

Similarly to the previous problem, we can write the equation as

$$(x^u + y^v)^2 - 4x^u y^v = 1.$$

Following up, we have

$$4x^u y^v = (a^2 + 2)\left(2x^{\frac{u-1}{2}} y^{\frac{v-1}{2}}\right)^2,$$

so we can associate the initial equation with the following Pell's equation:

$$A^2 - (a^2 + 2)B^2 = 1,$$

where $A = x^u + y^v$ and $B = 2x^{\frac{u-1}{2}} y^{\frac{v-1}{2}}$. The minimal solution of this equation is given by $(A_0, B_0) = (a^2 + 1, a)$. By applying **lemma 1**, we find the general solution,

$$A_{n-1} + B_{n-1}\sqrt{a^2 + 2} = (a^2 + 1 + \sqrt{a^2 + 2})^n, \forall n \in N^*.$$

The binomial expansion gives us:

$$A_{n-1} + B_{n-1}\sqrt{a^2 + 2} = (a^2 + 1 + \sqrt{a^2 + 2})^n =$$

$$(a^2 + 1)^n + a\sqrt{a^2 + 2}(a^2 + 1)^{n-2} n + a^2(a^2 + 2)(a^2 + 1)^{n-2}\binom{n}{2} + \ldots.$$

Again, note that $a^2 + 2$ cannot be a perfect square, so $\sqrt{a^2 + 2}$ is irrational. We can equalize the terms that contain the square root from the right side with the ones that contain the square root from the left side, and the same for the terms without the square root. Using a similar approach to the previous problem, we get $a | 2{x_{n-1}}^{\frac{u-1}{2}} {y_{n-1}}^{\frac{v-1}{2}}$.

Let p be a prime factor of a. Then either $p | x_{n-1}$ or $p | y_{n-1}$, so $p | x_{n-1} y_{n-1}$. Since $x_{n-1} y_{n-1} = a^2 + 2$, we get $p = 2$. Now let q be a prime factor of $a^2 + 1$. Then $q | 2{x_{n-1}}^{\frac{u-1}{2}} {y_{n-1}}^{\frac{v-1}{2}}$. Since 2 is the only prime factor of a, it means that $a^2 + 1$ is an odd number and so $q | {x_{n-1}}^{\frac{u-1}{2}} {y_{n-1}}^{\frac{v-1}{2}}$. Thus, either $q | x_{n-1}$ or $q | y_{n-1}$, so $q | x_{n-1} y_{n-1}$. It immediately follows that either $(x_{n-1}, y_{n-1}) = (1,2)$ or $(x_{n-1}, y_{n-1}) = (2,1)$. However, this means that the equation has at most two solutions, which is a contradiction.

There are a variety of further links that can be investigated between Pell's equation and Catalan's conjecture. For example, consider the cases when $xy = a^2 + 1$ or $xy = a^2 - 1$.

References

1. **E.J. Barbeau,** *Pell's Equation*, New York: Springer, 2003, pg. 45-46.
2. **I. Cucurezeanu,** *Ecuații în numere întregi*, București: Aramis, 1998, pg. 57-59.

Art 9000

Math Journal

-6-

Marin Chirciu [1]

Mathematical Journal prezintă o selecție de probleme recente din diverse publicații de specialitate .

Problema495.

If $a,b,c>0$, $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=3$ then

$$\sum\frac{1}{a+2\sqrt{bc}+1}\le\frac{3}{4}.$$

Crăciun Gheorghe, Mathematical Inequalities, 5/2025

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{1}{a+2\sqrt{bc}+1}\overset{CS}{\le}\sum\frac{1}{16}\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{1}\right)=\frac{1}{16}\left(\sum\frac{1}{a}+\sum\frac{2}{\sqrt{bc}}+\sum1\right)\overset{(1)}{\le}\frac{1}{16}(3+2\cdot3+3)=$$

$=\frac{12}{16}=\frac{3}{4}=RHS$, unde (1) rezultă din:

$\sum\frac{1}{a}\le3,\sum\frac{1}{\sqrt{bc}}\le3$, vezi: $3=\sum\frac{1}{a^2}\overset{CS}{\ge}\frac{1}{3}\left(\sum\frac{1}{a}\right)^2\Rightarrow\sum\frac{1}{a}\le3$;

$$3=\sum\frac{1}{a^2}\overset{SOS}{\ge}\sum\frac{1}{ab}\overset{CS}{\ge}\frac{1}{3}\left(\sum\frac{1}{\sqrt{ab}}\right)^2\Rightarrow\sum\frac{1}{\sqrt{bc}}\le3.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarcă.

If $a,b,c>0$, $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=3$ and $\lambda\ge0$ then

$$\sum\frac{1}{a+\lambda\sqrt{bc}+1}\le\frac{3}{\lambda+2}.$$

Marin Chirciu

[1] *Profesor, Colegiul Național „Zinca Golescu"Pitești*

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{1}{a+\lambda\sqrt{bc}+1}\overset{CS}{\leq}\sum\frac{1}{(\lambda+2)^2}\left(\frac{1}{a}+\frac{\lambda}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{1}\right)=\frac{1}{(\lambda+2)^2}\left(\sum\frac{1}{a}+\sum\frac{\lambda}{\sqrt{bc}}+\sum 1\right)\overset{(1)}{\leq}$$

$$\overset{(1)}{\leq}\frac{1}{(\lambda+2)^2}(3+\lambda\cdot 3+3)=\frac{3(\lambda+2)}{(\lambda+2)^2}=\frac{3}{\lambda+2}=RHS$$, unde (1) rezultă din:

$\sum\frac{1}{a}\leq 3,\sum\frac{1}{\sqrt{bc}}\leq 3$, vezi: $3=\sum\frac{1}{a^2}\overset{CS}{\geq}\frac{1}{3}\left(\sum\frac{1}{a}\right)^2\Rightarrow\sum\frac{1}{a}\leq 3$;

$$3=\sum\frac{1}{a^2}\overset{SOS}{\geq}\sum\frac{1}{ab}\overset{CS}{\geq}\frac{1}{3}\left(\sum\frac{1}{\sqrt{ab}}\right)^2\Rightarrow\sum\frac{1}{\sqrt{bc}}\leq 3.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Problema496.

In ΔABC

$$\sum\frac{w_a^2}{r_b+r_c}\geq\frac{2r^2}{R}.$$

Sarkhan Adgozalov,Georgia Mathematical Inequalities 5/2025

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{w_a^2}{r_b+r_c}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum w_a\right)^2}{\sum(r_b+r_c)}\overset{\sum w_a\geq 9r}{\geq}\frac{(9r)^2}{2\sum r_a}=\frac{81r^2}{2(4R+r)}\overset{Euler}{\geq}\frac{81r^2}{2\left(4R+\frac{R}{2}\right)}=\frac{9r^2}{R}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

In ΔABC

$$\frac{9r^2}{R}\leq\sum\frac{w_a^2}{r_b+r_c}\leq\frac{(R+r)^2}{R}$$

Marin Chirciu

Soluție.

Inegalitatea din stânga.

$$\sum \frac{w_a^2}{r_b+r_c} \overset{CS}{\geq} \frac{\left(\sum w_a\right)^2}{\sum (r_b+r_c)} \overset{\sum w_a \geq 9r}{\geq} \frac{(9r)^2}{2\sum r_a} = \frac{81r^2}{2(4R+r)} \overset{Euler}{\geq} \frac{81r^2}{2\left(4R+\frac{R}{2}\right)} = \frac{9r^2}{R}.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum \frac{w_a^2}{r_b+r_c} \overset{w_a^2 \leq r_b r_c}{\leq} \sum \frac{r_b r_c}{r_b+r_c} = \frac{p^2+r^2+4Rr}{4R} \overset{Gerretsen}{\leq} \frac{4R^2+4Rr+3r^2+r^2+4Rr}{4R} =$$

$$= \frac{4R^2+8Rr+4r^2}{4R} = \frac{R^2+2Rr+r^2}{R} = \frac{(R+r)^2}{R}$$

Problema497.

If $a,b,c>0$, $abc=1$ then

$$\sum \frac{a}{bc(b+c)} \geq \frac{3}{2}.$$

Crăciun Gheorghe, Mathematical Inequalities 5/2025

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{a}{bc(b+c)} = \sum \frac{a^2}{abc(b+c)} = \frac{1}{abc}\sum \frac{a^2}{b+c} \overset{CS}{\geq} \frac{1}{1}\frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum (b+c)} = \frac{\left(\sum a\right)^2}{2\sum a} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum a \overset{AG}{\geq} \frac{1}{2}\cdot 3\sqrt[3]{abc} = \frac{3}{2} = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarcă.

If $a,b,c>0$, $abc=1$ and $\lambda \geq 0$ then

$$\sum \frac{a}{bc(b+\lambda c)} \geq \frac{3}{\lambda+1}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{a}{bc(b+\lambda c)} = \sum \frac{a^2}{abc(b+\lambda c)} = \frac{1}{abc}\sum \frac{a^2}{b+\lambda c} \overset{CS}{\geq} \frac{1}{1}\frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum (b+\lambda c)} = \frac{\left(\sum a\right)^2}{(\lambda+1)\sum a} =$$

$$=\frac{1}{\lambda+1}\sum a \overset{AG}{\geq} \frac{1}{\lambda+1}\cdot 3\sqrt[3]{abc}=\frac{3}{\lambda+1}=RHS .$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Problema498.

In ΔABC

$$\prod\left(OI_a^2-OI^2\right)\geq 16abcrR^2 .$$

Daniel Sitaru, RMM 4/2017

Soluție.

Lema.

In ΔABC

$$\prod\left(OI_a^2-OI^2\right)=16R^3r\left(p^2+r^2+2Rr\right).$$

Folosind $OI_a^2=R^2+2Rr_a$ și $OI^2=R^2-2Rr$ obținem:

$$LHS=\prod\left(OI_a^2-OI^2\right)=\prod\left(R^2+2Rr_a-R^2+2Rr\right)=\prod\left(2Rr_a+2Rr\right)=8R^3\prod\left(r_a+r\right)=$$

$$=8R^3\cdot 2r\left(p^2+r^2+2Rr\right)=16R^3r\left(p^2+r^2+2Rr\right)\geq 16abcrR^2=RHS .$$

Remarcă.

In ΔABC

$$512R^3r^3\leq\prod\left(OI_a^2-OI^2\right)\leq 128R^5r .$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosim $\prod\left(OI_a^2-OI^2\right)=16R^3r\left(p^2+r^2+2Rr\right)$ și inegalitatea lui Gerretsen.

Problema499.

In ΔABC

$$\sum\frac{AI_a\cdot II_a}{h_a}=\frac{8R^2}{r}-4R .$$

Ertan Yildirim, Turkey, RMM 5/2025

Soluție.

Folosind $AI_a = \dfrac{r_a}{\sin\dfrac{A}{2}}$ și $II_a = 4R\sin\dfrac{A}{2}$ obținem concluzia.

Remarcă.

1). In ΔABC

$$8\cdot(2R-r)\le\sum\frac{AI_a\cdot II_a}{h_a}\le\frac{2R^2}{r^2}\cdot(2R-r).$$

2). In ΔABC

$$24r\le\sum\frac{AI_a\cdot II_a}{r_a}\le 12R.$$

Folosim $\sum\dfrac{AI_a\cdot II_a}{h_a}=\dfrac{8R^2}{r}-4R$ și inegalitatea lui Euler.

Soluție.

Folosim $\sum\dfrac{AI_a\cdot II_a}{r_a}=12R$ și inegalitatea lui Euler.

3). In ΔABC

$$\sum\frac{AI_a\cdot II_a}{h_a}\ge\sum\frac{AI_a\cdot II_a}{r_a}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Folosind $\sum\dfrac{AI_a\cdot II_a}{h_a}=\dfrac{8R^2}{r}-4R$ și $\sum\dfrac{AI_a\cdot II_a}{h_a}=\dfrac{8R^2}{r}-4R$ inegalitatea se scrie:

$\dfrac{4R}{r}\cdot(2R-r)\ge 12R \Leftrightarrow (2R-r)\ge 3r \Leftrightarrow R\ge 2r$,(Euler).

Problema500.

If $a,b,c>0$, $a+b+c=3$ then

$$\sum ab\le\frac{9}{2}\cdot\frac{1+abc}{2+abc}.$$

THCS 5/2025, Vietnam

Soluție.

Folosim pqr -Method: $p=a+b+c=3, q=ab+bc+ca, r=abc\le 1$.

Inegalitatea se scrie $q\le \frac{9}{2}\cdot\frac{1+r}{2+r}$, $p=3$.

Folosind inegalitatea lui Schur $p^3-4pq+9r\ge 0$, $p=3 \Leftrightarrow 3^3-4\cdot 3q+9r\ge 0 \Leftrightarrow q\le\frac{9+3r}{4}$.

Este suficient să arătăm că:

$$\frac{9+3r}{4}\le\frac{9}{2}\cdot\frac{1+r}{2+r}\Leftrightarrow 3+r\le 6\cdot\frac{1+r}{2+r}\Leftrightarrow (3+r)(2+r)\le 6(1+r)\Leftrightarrow r^2+5r+6\le 6r+6\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow r^2\le r \Leftrightarrow r\le 1$, vezi AM-GM și $p=3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarcă.

If $a,b,c>0$, $a+b+c=3$ and $n\ge 0, \lambda=\frac{3n}{n+4}$ then

$$\sum ab\le\frac{3(n+1)}{\lambda+1}\cdot\frac{\lambda+abc}{n+abc}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosim pqr -Method $p=a+b+c=3, q=ab+bc+ca, r=abc\le 1$.

Inegalitatea se scrie $q\le\frac{3(n+1)}{\lambda+1}\cdot\frac{\lambda+r}{n+r}$, $p=3$.

Folosind inegalitatea lui Schur $p^3-4pq+9r\ge 0$, $p=3 \Leftrightarrow 3^3-4\cdot 3q+9r\ge 0 \Leftrightarrow q\le\frac{9+3r}{4}$.

Este suficient să arătăm că:

$$\frac{9+3r}{4}\le\frac{3(n+1)}{\lambda+1}\cdot\frac{\lambda+r}{n+r}\Leftrightarrow\frac{3+r}{4}\le\frac{(n+1)}{\lambda+1}\cdot\frac{\lambda+r}{n+r}\Leftrightarrow(\lambda+1)(3+r)(n+r)\le 4(n+1)(\lambda+r)\Leftrightarrow$$

$$(\lambda+1)r^2+r(n+3)(\lambda+1)+3n(\lambda+1)\le 4(n+1)r+4(n+1)\lambda \overset{\lambda=\frac{3n}{n+4}}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{\lambda=\frac{3n}{n+4}}{\Leftrightarrow}\left(\frac{3n}{n+4}+1\right)r^2+r(n+3)\left(\frac{3n}{n+4}+1\right)\le 4(n+1)r \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4(n+1)}{n+4}r^2+r(n+3)\frac{4(n+1)}{n+4}\le 4(n+1)r \Leftrightarrow \frac{1}{n+4}r^2+r(n+3)\frac{1}{n+4}\le r \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow r^2+r(n+3)\le r(n+4) \Leftrightarrow r^2\le r \Leftrightarrow r\le 1$ vezi AM-GM și $p=3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Problema501.

In ΔABC

$$9r\le \sum a\sin A\le \frac{9R}{2}.$$

Geometric Inequalities, O.Bottema, 1969

Soluție.

Folosim $\sum a\sin A=\sum a\cdot\frac{a}{2R}=\frac{1}{2R}\sum a^2$.

Problema502.

In ΔABC

$$48\sqrt{3}R^2r\le \prod I_bI_c\le 24\sqrt{3}R^3.$$

Adil Abdullayev, Azerbaijan, RMM 5/2025

Soluție.

Lema.

In ΔABC

$$\prod I_bI_c=16R^2p.$$

Demonstrație.

Folosind $I_bI_c=4R\cos\frac{A}{2}\Rightarrow \prod I_bI_c=\prod 4R\cos\frac{A}{2}=64R^3\prod\cos\frac{A}{2}=64R^3\cdot\frac{p}{4R}=16R^2p$.

Folosind **Lema** și inegalitatea lui Mitrinovic.

Remarcă.

In ΔABC

$$72Rr \le \sum \left(I_b I_c\right)^2 \le 36R^2 .$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosim **Lema** și inegalitatea lui Euler.

Problema503.

In ΔABC

$$\sum \frac{a^2}{\cos^2 \frac{A}{2}} \ge 12R^2 .$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam, RMM 5/2025

Soluție.

Folosim inegalitatea lui Euler și $\sum \frac{a^2}{\cos^2 \frac{A}{2}} = 16R^2 \left(1 - \frac{r}{2R}\right)$

Remarcă.

In ΔABC

$$8R\left(2R - r\right) \le \sum \frac{a^2}{\cos^2 \frac{A}{2}} \le 4R^2 \left(\frac{2R}{r} - 1\right).$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosim inegalitatea lui Euler și $\sum \frac{a^2}{\cos^2 \frac{A}{2}} = 16R^2 \left(1 - \frac{r}{2R}\right)$

Problema504.

If $a, b, c > 0$ then

$$\sum \frac{a}{b + \sqrt{bc}} \ge \frac{3}{2}.$$

Panagiotis Danousis, Greece, Math Atelier 5/2025

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{a}{b+\sqrt{bc}}\overset{AG}{\geq}\sum\frac{a}{b+\frac{b+c}{2}}=\sum\frac{2a}{3b+c}\overset{Nesbitt}{\geq}2\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{2}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

Remarcă.

If $a,b,c>0$ and $\lambda\geq 0$ then

$$\sum\frac{a}{b+\lambda\sqrt{bc}}\geq\frac{3}{\lambda+1}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Pentru $\lambda=0$ obținem $\sum\frac{a}{b}\geq 3$, vezi AM-GM. În continuare , fie $\lambda>0$.

$$LHS=\sum\frac{a}{b+\lambda\sqrt{bc}}\overset{AG}{\geq}\sum\frac{a}{b+\lambda\cdot\frac{b+c}{2}}=\sum\frac{2a}{(\lambda+2)b+\lambda c}\overset{Nesbitt}{\geq}2\cdot\frac{3}{2\lambda+2}=\frac{3}{\lambda+1}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

Problema505.

VI.610. Determinați $x,y,z\in\mathbf{N}^*$ știind că

$$\frac{x^2}{x^2+3}=\frac{y+1}{y+4}=\frac{z^2}{z+4}.$$

Gheorghe Iacob, Mirela Bișoc, Pașcani, RMT-2/2025

Soluție.

Din $\frac{x^2}{x^2+3}=\frac{y+1}{y+4}\Rightarrow x^2=y+1$.

Din $\frac{x^2}{x^2+3}=\frac{z^2}{z+4}\Rightarrow x^2=\frac{3z^2}{z+24-z^2}$ și $\frac{3z^2}{z+24-z^2}\in\mathbf{Z}\Rightarrow z=4\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=2$.

Din $x^2=y+1$ și $x=2\Rightarrow y=3$.

Deducem că $(x,y,z)=(2,3,4)$.

Problema506.

Solve in $\mathbf{R}$ the equation

$$10x^2-9x-8x\sqrt{2x^2-3x+1}+3=0\,.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam, RMM 5/2025

Soluție.

Domeniul de definiție este $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\cup[1,\infty)$. Notăm $t=\sqrt{2x^2-3x+1}\geq 0$.

$10x^2-9x+3=8x\sqrt{2x^2-3x+1}\Leftrightarrow 10x^2-9x+3=8xt\Leftrightarrow 10x^2-9x+3=4x^2+3t^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x^2+3t^2-8xt=0\Leftrightarrow 4x^2-8xt+3t^2=0\Leftrightarrow (2x-t)(2x-3t)=0\Leftrightarrow x\in\left\{\frac{t}{2},\frac{3t}{2}\right\}$.

Cazul1). Dacă $x=\frac{t}{2}\Rightarrow x=\frac{\sqrt{2x^2-3x+1}}{2}\Leftrightarrow 2x=\sqrt{2x^2-3x+1}\Leftrightarrow 4x^2=2x^2-3x+1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2+3x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{-3+\sqrt{17}}{4}$.

Cazul1). Dacă $x=\frac{t}{2}\Rightarrow x=\frac{\sqrt{2x^2-3x+1}}{2}\Leftrightarrow 2x=\sqrt{2x^2-3x+1}\Leftrightarrow 4x^2=2x^2-3x+1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2+3x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{-3+\sqrt{17}}{4}>0$.

Cazul12. Dacă $x=\frac{3t}{2}\Rightarrow x=\frac{3\sqrt{2x^2-3x+1}}{2}\Leftrightarrow 2x=3\sqrt{2x^2-3x+1}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x^2=9\left(2x^2-3x+1\right)\Leftrightarrow 14x^2-27x+9=0\Leftrightarrow x\in\left\{\frac{3}{7},\frac{3}{2}\right\}$.

Mulțimea soluțiilor ecuației este $S=\left\{\frac{3}{7},\frac{3}{2},\frac{-3+\sqrt{17}}{4}\right\}$.

Remarcă.

1). Let be $1<\lambda<9$ fixed. Solve in $\mathbf{R}$ the equation

$$\left(\lambda^2+3\lambda\right)x^2-3(\lambda+1)x-4\lambda x\sqrt{\lambda x^2-(\lambda+1)x+1}+3=0.$$

Soluție.

Domeniul de definiție este $x\in\left[0,\frac{1}{\lambda}\right]\cup[1,\infty)$.Notăm $t=\sqrt{\lambda x^2-(\lambda+1)x+1}\geq 0$

$\left(\lambda^2+3\lambda\right)x^2-3(\lambda+1)x-4\lambda x\sqrt{\lambda x^2-(\lambda+1)x+1}+3=0$.

Mulțimea soluțiilor ecuației este $S=\left\{\frac{-\lambda-1+\sqrt{5\lambda^2-2\lambda+1}}{2\left(\lambda^2-\lambda\right)},\frac{-9(\lambda+1)\pm3\sqrt{13\lambda^2-18\lambda+9}}{2\left(\lambda^2-9\lambda\right)}\right\}$.

2). Solve in $\mathbf{R}$ the equation

$$18x^2-12x-12x\sqrt{3x^2-4x+1}+3=0.$$

Soluție.

Mulțimea soluțiilor ecuației este $S=\left\{\frac{-2+\sqrt{10}}{6},\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}\right\}$.

3).Solve in $\mathbf{R}$ the equation

$$6x^2-4x-4x\sqrt{3x^2-4x+1}+1=0.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Mulțimea soluțiilor ecuației este $S=\left\{\frac{-2+\sqrt{10}}{6},\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}\right\}$.

Problema507.

In ΔABC

$$\sum\sqrt{\frac{h_a r_a}{r_b+r_c}}\leq\frac{3R}{2}\sqrt{\frac{3}{2r}}.$$

Kostas Geronikolas, Greece, Mathematical Inequalities 4/2021

Soluție.

Lema.

In ΔABC

$$\sum\frac{h_a}{r_b+r_c}=\frac{p^2\left(p^2+2r^2-4Rr\right)+r(4R+r)^3}{8R^2p^2}$$

$$LHS=\sum\sqrt{\frac{h_ar_a}{r_b+r_c}}\overset{CBS}{\leq}\sqrt{\sum r_a\sum\frac{h_a}{r_b+r_c}}=\sqrt{(4R+r)\frac{3}{2}}\overset{Euler}{\leq}\frac{3R}{2}\sqrt{\frac{3}{2r}}=RHS$$, vezi:

$$\sum\frac{h_a}{r_b+r_c}=\frac{p^2\left(p^2+2r^2-4Rr\right)+r(4R+r)^3}{8R^2p^2}=\frac{1}{8R^2}\left(p^2+2r^2-4Rr+\frac{r(4R+r)^3}{p^2}\right)\overset{Gerretsen}{\leq}$$

$$\overset{Gerretsen}{\leq}\frac{1}{8R^2}\left(4R^2+4Rr+3r^2+2r^2-4Rr+\frac{r(4R+r)^3}{\frac{r(4R+r)^2}{R+r}}\right)=\frac{1}{8R^2}\left(4R^2+5r^2+(4R+r)(R+r)\right)=$$

$$=\frac{8R^2+5Rr+6r^2}{8R^2}\overset{Euler}{\leq}\frac{12R^2}{8R^2}=\frac{3}{2}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

In ΔABC

$$3^{\frac{3}{2}}\left(\frac{r^5}{2R^2}\right)^{\frac{1}{6}}\leq\sum\sqrt{\frac{h_ar_a}{r_b+r_c}}\leq\sqrt{\frac{3}{2}(4R+r)}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema.

In ΔABC

$$\sum\frac{h_a}{r_b+r_c}=\frac{p^2\left(p^2+2r^2-4Rr\right)+r(4R+r)^3}{8R^2p^2}\leq\frac{3}{2}.$$

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum\sqrt{\frac{h_ar_a}{r_b+r_c}}\overset{CBS}{\leq}\sqrt{\sum r_a\sum\frac{h_a}{r_b+r_c}}=\sqrt{(4R+r)\frac{3}{2}}\overset{Euler}{\leq}\frac{3R}{2}\sqrt{\frac{3}{2r}}.$$

Inegalitatea din stânga.

$$\sum\sqrt{\frac{h_ar_a}{r_b+r_c}}\overset{AG}{\geq}3\sqrt[3]{\sqrt{\prod\frac{h_ar_a}{r_b+r_c}}}=3\sqrt[6]{\frac{\prod h_a\prod r_a}{\prod(r_b+r_c)}}=3\sqrt[6]{\frac{\frac{2r^2p^2}{R}\cdot rp^2}{4Rp^2}}=3\sqrt[6]{\frac{\frac{r^2p^2}{R}\cdot r}{2R}}=$$

$$=3\sqrt[6]{\frac{p^2r^3}{2R^2}}\overset{Mitrinovic}{\geq}3\sqrt[6]{\frac{27r^2\cdot r^3}{2R^2}}=3\sqrt[6]{\frac{27\cdot r^5}{2R^2}}=3\cdot 3^{\frac{1}{2}}\sqrt[6]{\frac{r^5}{2R^2}}=3^{\frac{3}{2}}\left(\frac{r^5}{2R^2}\right)^{\frac{1}{6}}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema508.

In ΔABC

$$\frac{r\sqrt{3}}{R^2}\leq\sum\frac{1}{a}\cos A\leq\frac{R^2\sqrt{3}}{16r^3}.$$

Konstantinos Geronikolas, Greece, Mathematical Inequalities 4/2025

Soluție.

Lema.

In ΔABC

$$\sum\frac{1}{a}\cos A=\frac{p^2-r^2-4Rr}{4Rrp}.$$

Folosim inegalitatea lui Gerretsen și $\sum\frac{1}{a}\cos A=\frac{p^2-r^2-4Rr}{4Rrp}$

Remarcă.

In ΔABC

$$\frac{9}{4p}\left(\frac{2r}{R}\right)\leq\sum\frac{1}{a}\cos A\leq\frac{9}{4p}\left(\frac{R}{2r}\right)^2.$$

Marin Chirciu

Folosim inegalitatea lui Gerretsen și $\sum\frac{1}{a}\cos A=\frac{p^2-r^2-4Rr}{4Rrp}$

Problema509.

In ΔABC

$$m_a\sin A\leq\frac{p}{2}.$$

Liviu Nicolescu, Vlad Boskoff, Teoreme de geometrie plană, Universitatea București, 1986

Soluție.

$m_a \sin A \leq \frac{p}{2} \Leftrightarrow m_a \cdot a \leq pR \Leftrightarrow m_a \cdot a \cdot r \leq pr \cdot R \Leftrightarrow m_a \cdot a \cdot r \leq F \cdot R \Leftrightarrow \frac{m_a}{h_a} \leq \frac{R}{2r}$,(Panaitopol

Problema510.

In acute ΔABC

$$\sum r_a m_a \leq p^2 .$$

Liviu Nicolescu, Vlad Boskoff, Teoreme de geometrie plană, Universitatea București, 1986

Soluție.

Folosim $m_a \leq \frac{r_b + r_c}{2} \Rightarrow \sum r_a m_a \leq \sum r_a \frac{r_b + r_c}{2} = \sum r_b r_c = p^2$.

Problema511.

In ΔABC

$$\prod m_a \prod w_a \geq \left(\prod r_a\right)^2 .$$

Liviu Nicolescu, Vlad Boskoff, Teoreme de geometrie plană, Universitatea București, 1986

Soluție.

Folosim $m_a w_a \geq p(p-a) = r_b r_c \Rightarrow m_a w_a \geq r_b r_c \Rightarrow \prod m_a w_a \geq \prod r_b r_c = \left(\prod r_a\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \prod m_a \prod w_a \geq \left(\prod r_a\right)^2$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema512.

If $x, y, z > 0$, $x + y + z = 1$ then

$$\sum \frac{x^2 + y}{y + z} \geq 2 .$$

Dorin Marghidanu, Corabia, Olt, Mathematical Inequalities 52024

Remarcă.

1). If $x, y, z > 0$, $x + y + z = 1$ and $\lambda \geq 0$ then

$$\sum \frac{\lambda x^2 + x}{y+z} \ge \frac{\lambda + 3}{2}.$$

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{\lambda x(1-y-z)+x}{y+z} = \sum \frac{(\lambda+1)x}{y+z} - \sum \lambda x \overset{Nesbitt}{\ge} (\lambda+1)\cdot\frac{3}{2} - \lambda = \frac{\lambda+3}{2} = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Remarcă.

2). If $x, y, z > 0$, $x + y + z = 1$ and $\lambda \ge 0$, $n \in \mathbf{N}^*$ then

$$\sum \frac{\lambda x^n + x}{y+z} \ge \frac{1}{2}\left(3 + \frac{\lambda}{3^{n-2}}\right).$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Pentru $n = 1$ se obține $\sum \frac{\lambda x + x}{y+z} \ge \frac{3}{2}(\lambda+1) \Leftrightarrow \sum \frac{x}{y+z} \ge \frac{3}{2}$, (Nesbitt).

Pentru $n \ge 2$ se folosește inegalitatea lui Holder.

$$LHS = \sum \frac{\lambda x^n + x}{y+z} = \sum \frac{\lambda x^n}{y+z} + \sum \frac{x}{y+z} \overset{Holder\&Nesbitt}{\ge} \lambda \cdot \frac{\left(\sum x\right)^n}{3^{n-2}\sum(y+z)} + \frac{3}{2} =$$

$$= \lambda \cdot \frac{\left(\sum x\right)^{n-1}}{3^{n-2}\cdot 2} + \frac{3}{2} = \lambda \cdot \frac{1^{n-1}}{3^{n-2}\cdot 2} + \frac{3}{2} = \frac{\lambda}{3^{n-2}\cdot 2} + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}\left(3 + \frac{\lambda}{3^{n-2}}\right) = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Problema513.

In ΔABC

$$\sum m_a^2 + \sum w_a^2 + \sum w_a w_b \le 3p^2.$$

Liviu Nicolescu, Vlad Boskoff, Teoreme de geometrie plană, Universitatea București, 1986

Soluție.

Notăm $(x,y,z)=\left(\sqrt{\frac{p-a}{p}},\sqrt{\frac{p-b}{p}},\sqrt{\frac{p-c}{p}}\right)$.

Obținem $w_a=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}=\frac{2bc}{b+c}\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}\le p\sqrt{\frac{p-a}{p}}=px\Rightarrow w_a\le px$.

Obținem $\frac{m_c^2}{p^2}\le 1-\frac{1}{2}(x+y)^2\Rightarrow\frac{m_b^2}{p^2}\le 1-\frac{1}{2}(x+z)^2,\frac{m_a^2}{p^2}\le 1-\frac{1}{2}(y+z)^2$.

Obținem $\frac{(w_a+w_b)^2}{p^2}=\frac{w_a^2+w_b^2+2w_aw_b}{p^2}\le\frac{p^2x^2+p^2y^2+2p^2xy}{p^2}=(x+y)^2$

Din $\sum m_a^2=3p^2-\frac{p^2}{2}\sum(y+z)^2$ și $\sum w_a^2+\sum w_aw_b\le\frac{p^2}{2}\sum(x+y)^2\Rightarrow$

Deducem $\sum m_a^2+\sum w_a^2+\sum w_aw_b\le 3p^2$.

Problema514.

In ΔABC

$$(w_a+w_b)^2+2m_c^2\le 2p^2.$$

Liviu Nicolescu, Vlad Boskoff, Teoreme de geometrie plană, Universitatea București, 1986

Soluție.

Notăm $(x,y,z)=\left(\sqrt{\frac{p-a}{p}},\sqrt{\frac{p-b}{p}},\sqrt{\frac{p-c}{p}}\right)$.

Obținem $w_a=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}=\frac{2bc}{b+c}\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}\le p\sqrt{\frac{p-a}{p}}=px\Rightarrow w_a\le px$.

Obținem $\frac{m_c^2}{p^2}\le 1-\frac{1}{2}(x+y)^2$.

Din $\frac{(w_a+w_b)^2}{p^2}\le(x+y)^2$ și $\frac{m_c^2}{p^2}\le 1-\frac{1}{2}(x+y)^2\Rightarrow\frac{(w_a+w_b)^2}{p^2}+2\cdot\frac{m_c^2}{p^2}\le(x+y)^2+2-(x+y)^2=2$

$\Rightarrow(w_a+w_b)^2+2m_c^2\le 2p^2$.

Deducem $(w_a+w_b)^2+2m_c^2\le 2p^2$.

Problema515.

If $a,b,c>0$, $a^2+b^2+c^2+abc=4$ then

$$\sum\left(\frac{a}{2a+bc}\right)^2\geq\frac{1}{3}.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam, Mathematical Inequalities 5/2025

Soluție.

Lema.

If $a,b,c>0$, then $a^2+b^2+c^2+abc=4 \Leftrightarrow \sum\frac{a}{2a+bc}=1$.

$$LHS=\sum\left(\frac{a}{2a+bc}\right)^2\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum\frac{a}{2a+bc}\right)^2}{3}\overset{Lems}{=}\frac{1}{3}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarcă.

If $a,b,c>0$, $a^2+b^2+c^2+abc=4$ and $n\in\mathbf{N}$ then

$$\sum\left(\frac{3a}{2a+bc}\right)^n\geq 3.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Pentru $n=0$ avem 3=3. Pentru $n=1$ se obține Lema. Pentru $n\geq 2$ vezi inegalitatea lui Holder.

Lema.

If $a,b,c>0$, then $a^2+b^2+c^2+abc=4 \Leftrightarrow \sum\frac{a}{2a+bc}=1$.

$$LHS=\sum\left(\frac{3a}{2a+bc}\right)^n\overset{Holder}{\geq}\frac{\left(\sum\frac{3a}{2a+bc}\right)^n}{3^{n-1}}\overset{Lema}{=}\frac{3^n}{3^{n-1}}=3=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Problema516.

If $M \in Int(\Delta ABC)$ and d_a, d_b, d_c -distances of point M to the sides BC, CA, AB and $m \geq 1$ then

$$\sum \frac{a^{m+1}b}{d_b^m} \geq 2^{m+2}\left(\sqrt{3}\right)^{m+1} F \text{ , } x, y > 0 .$$

D.M. Bătinețu-Giurgiu, Mihaly Bencze, RMM 5/2025

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{a^{m+1}b}{d_b^m} = \sum \frac{(ab)^{m+1}}{(bd_b)^m} \overset{Radon}{\geq} \frac{\left(\sum ab\right)^{m+1}}{\left(\sum bd_b\right)^m} \overset{Gordon}{\geq} \frac{\left(4F\sqrt{3}\right)^{m+1}}{(2F)^m} = 2^{m+2}\left(\sqrt{3}\right)^{m+1} F = RHS$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema517

In ΔABC

$$\sum \frac{a^3b^4}{xr + yh_a} \geq \frac{64F^3}{x+3y} \text{ , } x, y > 0 .$$

D.M. Bătinețu-Giurgiu, Neculai Stanciu,RMM 5/2025

Remarcă.

In ΔABC

$$\sum \frac{a^{2n-1}b^{2n}}{xr + yh_a} \geq \frac{2^{4n-1}F^{2n-1}}{3^{n-2}(x+3y)}, x, y > 0, n \in \mathbf{N} .$$

Marin Chirciu

Soluție.

Pentru $n = 0$ se obține $\sum \frac{a^{-1}}{xr + yh_a} \geq \frac{2^{-1}F^{-1}}{3^{-2}(x+3y)} \Leftrightarrow \sum \frac{1}{xra + yah_a} \geq \frac{9}{2F(x+3y)}$,

vezi inegalitatea lui Bergstrom.

Pentru $n = 1$ vezi inegalitatea CS. Pentru $n \geq 2$ vezi inegalitatea lui Holder.

$$LHS = \sum \frac{a^{2n-1}b^{2n}}{xr + yh_a} = \sum \frac{a^{2n}b^{2n}}{xar + yah_a} \overset{Holder}{\geq} \frac{\left(\sum a^2b^2\right)^n}{3^{n-2}\sum(xar + yah_a)} \overset{Goldner}{\geq} \frac{\left(16F^2\right)^n}{3^{n-2}\left(xr\sum a + 3y \cdot 2F\right)} =$$

$$= \frac{\left(16F^2\right)^n}{3^{n-2}(xr \cdot 2p + 6yF)} = \frac{2^{4n}F^{2n}}{3^{n-2}(x \cdot 2F + 6yF)} = \frac{2^{4n-1}F^{2n-1}}{3^{n-2}(x+3y)} = RHS .$$

Problema518.

In ΔABC

$$\sum \frac{r_a}{1+r_b} \geq \frac{18r}{2+3R}.$$

Zaza Mzhavanadze, Georgia, RMM 5/2025

Remarcă.

In ΔABC

$$\sum \frac{r_a^n}{1+r_b} \geq \frac{6(3r)^n}{3R+2}, n \in \mathbf{N}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Pentru $n=0$ se obține $\sum \frac{1}{1+r_b} \geq \frac{6}{3R+2}$, vezi inegalitatea lui Bergstrom.

Pentru $n=1$ se obține $\sum \frac{r_a}{1+r_b} \geq \frac{18r}{2+3R}$, vezi $\sum \frac{r_a}{1+r_b} = \sum \frac{r_a^2}{r_a + r_a r_b}$ și Bergstrom.

Pentru $n \geq 2$ se folosește inegalitatea lui Holder.

$$LHS = \sum \frac{r_a^n}{1+r_b} \overset{Holder}{\geq} \frac{\left(\sum r_a\right)^n}{3^{n-2}\sum(1+r_b)} = \frac{\left(\sum r_a\right)^n}{3^{n-2}\left(3+\sum r_b\right)} = \frac{(4R+r)^n}{3^{n-2}(3+4R+r)} \overset{Euler}{\geq} \frac{(4\cdot 2r+r)^n}{3^{n-2}\left(3+4R+\frac{R}{2}\right)} =$$

$$= \frac{(9r)^n}{3^{n-2}\left(3+\frac{9R}{2}\right)} = \frac{2(9r)^n}{3^{n-2}(6+9R)} = \frac{2}{3}\cdot\frac{(9r)^n}{3^{n-2}(2+3R)} = \frac{6(3r)^n}{3R+2} = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema519.

In acute ΔABC

$$\sum \frac{\tan A}{1+\cos A} \geq 2\sqrt{3}.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam

Remarcă.

In acute ΔABC

$$\sum \frac{\tan^n A}{1+\cos A} \geq 2\left(\sqrt{3}\right)^n, n \in \mathbf{N}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{\tan^n A}{1+\cos A} = \sum \frac{\tan^n A}{2\cos^2 \frac{A}{2}} \overset{AG}{\geq} \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt[3]{\prod \frac{\tan^n A}{\cos^2 \frac{A}{2}}} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{\prod \tan^n A}{\prod \cos^2 \frac{A}{2}}} \overset{(1)}{\geq} \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{\left(3\sqrt{3}\right)^n}{\frac{27}{64}}} =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{\left(\sqrt{3}\right)^n}{\frac{3}{4}} = 2\left(\sqrt{3}\right)^n = RHS.$$

Problema520.

In ΔABC

$$\sum \left(\frac{a}{2b+c}\right)^2 \geq \frac{4}{3}\left(\frac{r}{R}\right)^2.$$

Konsantinos Geronikolas, Greece, Mathematical Inequalities 5/2025

Soluție.

$$LHS = \sum \left(\frac{a}{2b+c}\right)^2 \overset{CS}{\geq} \frac{\left(\sum \frac{a}{2b+c}\right)^2}{3} \overset{Nesbitt}{\geq} \frac{1^2}{3} \overset{Euler}{\geq} \frac{4}{3}\left(\frac{r}{R}\right)^2 = RHS.$$

Remarcă.

1). In ΔABC

$$\sum \left(\frac{a}{b+\lambda c}\right)^2 \geq \frac{3}{(\lambda+1)^2}\left(\frac{2r}{R}\right)^2, \lambda \geq 0.$$

Soluție.

$$LHS = \sum \left(\frac{a}{b+\lambda c}\right)^2 \overset{CS}{\geq} \frac{\left(\sum \frac{a}{b+\lambda c}\right)^2}{3} \overset{Nesbitt}{\geq} \frac{\left(\frac{3}{\lambda+1}\right)^2}{3} = \frac{3}{(\lambda+1)^2}\left(\frac{2r}{R}\right)^2 \overset{Euler}{\geq} \frac{3}{(\lambda+1)^2}\left(\frac{2r}{R}\right)^2 =$$

$= RHS$.

2)In ΔABC

$$\sum\left(\frac{a}{b+\lambda c}\right)^n \geq \frac{3}{(\lambda+1)^n}\left(\frac{2r}{R}\right)^n, \lambda \geq 0, n \in \mathbf{N}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Pentru $n=0$ se obține egalitatea $3=3$.

Pentru $n=1$ se obține $\sum\frac{a}{b+\lambda c} \geq \frac{3}{\lambda+1}\left(\frac{2r}{R}\right)$, vezi inegalitatealui Nesbitt și Euler.

Pentru $n \geq 2$ se folosește inegalitatea lui Holder.

$$LHS = \sum\left(\frac{a}{b+\lambda c}\right)^n \overset{Holder}{\geq} \frac{\left(\sum\frac{a}{b+\lambda c}\right)^n}{3^{n-1}} \overset{Nesbitt}{\geq} \frac{\left(\frac{3}{\lambda+1}\right)^n}{3^{n-1}} = \frac{3}{(\lambda+1)^n} \overset{Euler}{\geq} \frac{3}{(\lambda+1)^n}\left(\frac{2r}{R}\right)^2 =$$

$= RHS$.

Problema521.

In ΔABC

$$\sum(a+b)(b+c)\sqrt{p-b} \geq 16rp\sqrt{p}.$$

Mihaly Bencze, Brașov, Octogon, PP48358

Remarcă.

In ΔABC

$$\sum(a+b)(a+c)\sqrt{p(p-a)} \geq 48\cdot 3^{\frac{-1}{4}}F^{\frac{3}{2}}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS = \sum(a+b)(a+c)\sqrt{p(p-a)} \overset{AG}{\geq} \sum 2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{ac}\sqrt{p(p-a)} = 4\sqrt{abc}\sum\sqrt{pa(p-a)} \overset{AG}{\geq}$$

$$\overset{AG}{\geq} 4\sqrt{abc}\cdot 3\sqrt[6]{abc\prod p(p-a)} = 12\sqrt{abc}\cdot\sqrt[6]{abc\cdot p^3\cdot r^2 p} \overset{Mitrinovic}{\geq} 12(abc)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}}\cdot\sqrt[6]{p^3r^2\cdot 3r\sqrt{3}} =$$

$$\overset{Mitrinovic}{\geq} 12(abc)^{\frac{2}{3}}\sqrt[6]{r^3\cdot p^3\left(\sqrt{3}\right)^3} = 12(abc)^{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{pr\sqrt{3}} \overset{Carlitz}{\geq} 12\cdot\frac{4F}{\sqrt{3}}\sqrt{\sqrt{3}F} = 48\cdot 3^{\frac{-1}{4}}F^{\frac{3}{2}} = RHS,$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema522.

In ΔABC

$$\sum\frac{a^2}{(p-b)(p-c)} \leq \frac{6R}{r}.$$

Titu Andreescu, Dorin Andrica, 360 probleme pentru concursuri,GIL2003

Soluție.

Folosim inegalitatea lui Euler și $\sum\frac{a^2}{(p-b)(p-c)} = \frac{4(R+r)}{r}$

Remarcă.

In ΔABC

$$12 \leq \sum\frac{a^2}{(p-b)(p-c)} \leq 4\left(\frac{R}{r}+1\right).$$

Marin Chirciu

Soluție.

.

Folosim inegalitatea lui Euler și $\sum\frac{a^2}{(p-b)(p-c)} = \frac{4(R+r)}{r}$

Problema523.

If $a,b,c>0$ then

$$\sum\frac{a}{\sqrt{b+c}} \geq \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{2}}.$$

Remarcă.

If $a,b,c>0$ and $\lambda\geq 0$ then

$$\sum \frac{a}{\sqrt{b+\lambda c}} \geq \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{\lambda+1}}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{a}{\sqrt{b+\lambda c}} = \sum \frac{a^2}{a\sqrt{b+\lambda c}} \overset{CS}{\geq} \frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum a\sqrt{b+\lambda c}} = \frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum \sqrt{a}\sqrt{ab+\lambda ac}} \overset{CBS}{\geq} \frac{\left(\sum a\right)^2}{\sqrt{\sum a \sum (ab+\lambda ac)}} =$$

$$= \frac{\left(\sum a\right)^2}{\sqrt{\sum a \cdot (\lambda+1)\sum ab}} \overset{SOS}{\geq} \frac{\left(\sum a\right)^2}{\sqrt{\sum a \cdot (\lambda+1)\cdot \frac{1}{3}\left(\sum a\right)^2}} = \frac{\sum a}{\sqrt{\sum a \cdot (\lambda+1)\cdot \frac{1}{3}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{3}{\lambda+1}}\sqrt{\sum a} \overset{(1)}{\geq} \frac{\sum \sqrt{a}}{\sqrt{\lambda+1}} = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

Problema524.

In ΔABC

$$\sum \frac{\sec^2 \frac{A}{2}}{bc} \geq \frac{9}{p^2}.$$

Titu Andreescu, Dorin Andrica, 360 de probleme pentru concursuri, GIL 2003

Soluție.

Folosim inegalitatea lui Euler și $\sum \frac{\sec^2 \frac{A}{2}}{bc} = \frac{4R+r}{rp^2}$

Remarcă.

1). In ΔABC

$$\frac{9}{p^2} \leq \sum \frac{\sec^2 \frac{A}{2}}{bc} \leq \frac{1}{3r^2}.$$

Soluție.

Folosim inegalitatea lui Euler și $\sum\frac{\sec^2\frac{A}{2}}{bc}=\frac{4R+r}{rp^2}$

2). In ΔABC

$$\frac{4}{R^2}\le\sum\frac{\csc^2\frac{A}{2}}{bc}\le\frac{1}{r^2}.$$

Soluție.

Folosim inegalitatea lui Euler și $\sum\frac{\csc^2\frac{A}{2}}{bc}=\frac{1}{r^2}$

.

3). In ΔABC

$$3\sum\frac{\sec^2\frac{A}{2}}{bc}\le\sum\frac{\csc^2\frac{A}{2}}{bc}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Folosind $\sum\frac{\sec^2\frac{A}{2}}{bc}=\frac{4R+r}{rp^2}$ și $\sum\frac{\csc^2\frac{A}{2}}{bc}=\frac{1}{r^2}$ inegalitatea se scrie:

$3\cdot\frac{4R+r}{rp^2}\le\frac{1}{r^2}\Leftrightarrow p^2\ge 3r(4R+r)$, vezi inegalitatea lui Gerretsen $p^2\ge 16Rr-5r^2$.

Problema525.

In ΔABC

$$\sum\left(\frac{r_br_c}{r_b+r_c}\right)\frac{h_a}{r_a}\ge\frac{9r^2}{R}.$$

Konstantinos Geronikolas, Greece, Mathematical Inequalities 5/2025

Soluție.

Lema.

In ΔABC

$$\sum\left(\frac{r_br_c}{r_b+r_c}\right)\frac{h_a}{r_a}=\frac{p^2\left(p^2+2r^2-12Rr\right)+r^3\left(4R+r\right)}{8R^2r}.$$

Remarcă.

In ΔABC

$$\frac{2r\left(2R-r\right)^2}{R^2}\le\sum\left(\frac{r_br_c}{r_b+r_c}\right)\frac{h_a}{r_a}\le\frac{9R^3}{16r^2}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosim inegalitatea lui Gerretsen și $\sum\left(\frac{r_br_c}{r_b+r_c}\right)\frac{h_a}{r_a}=\frac{p^2\left(p^2+2r^2-12Rr\right)+r^3\left(4R+r\right)}{8R^2r}$

Problema526.

Solve in $\mathbf{R}$ the equation

$$2^{\frac{x^2+1}{x}}+3^{\frac{x^2+1}{x}}=13\cdot 6^{\frac{1-x}{x}}.$$

Ilie Dinulescu, Pitești, OL-1994-Argeș.

Soluție.

$$2^{\frac{x^2+1}{x}}+3^{\frac{x^2+1}{x}}=13\cdot 6^{\frac{1-x}{x}}\Leftrightarrow 2^{x+\frac{1}{x}}+3^{x+\frac{1}{x}}=\frac{13}{6}\cdot 6^{\frac{1}{x}}\Leftrightarrow\frac{2^x}{3^{\frac{1}{x}}}+\frac{3^x}{2^{\frac{1}{x}}}=\frac{13}{6}.$$

Dacă x este o soluție a ecuației date, atunci $\frac{-1}{x}$ este soluție a aceleeași ecuații.

Prin urmare , este suficient să determinăm solțiile ecuației din intervalul $\left(0,\infty\right)$.

Funcția $f:\left(0,\infty\right)\to\mathbf{R}$, $f\left(x\right)=\frac{2^x}{3^{\frac{1}{x}}}+\frac{3^x}{2^{\frac{1}{x}}}$ este strict crescătoare pe $\left(0,\infty\right)$, prin urmare ecuația are cel mult o soluție pe $\left(0,\infty\right)$. Cum $x=1$ verifică ecuația, deducem că este singura soluție din $\left(0,\infty\right)$.

În final soluțiile ecuațiile sunt $x_1=1$ și $x_2=-1$.

Remarcă.

1). Let be $a>1,b>1$ fixed. Solve in $\mathbf{R}$ the equation:

$$a^{\frac{x^2+1}{x}}+b^{\frac{x^2+1}{x}}=\left(a^2+b^2\right)\cdot(ab)^{\frac{1-x}{x}}.$$

Soluțiile ecuațiile sunt $x_1=1$ și $x_2=-1$.

Remarcă.

2).Solve in $\mathbf{R}$ the equation:

$$2^{\frac{x^2+1}{x}}+5^{\frac{x^2+1}{x}}=29\cdot 10^{\frac{1-x}{x}}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluțiile ecuațiile sunt $x_1=1$ și $x_2=-1$.

Problema527.

In ΔABC

$$\sum\frac{r_a-r}{h_a}\geq 1+\frac{2r}{R}.$$

Sarkhan Adgozalov, Georgia,RMM 5/2025.

Soluție.

Folosim inegalitatea lui Euler și $\sum\frac{r_a-r}{h_a}=\frac{2(R-r)}{r}$

Remarcă.

1). In ΔABC

$$2\left(\frac{R}{r}-1\right)\leq\sum\frac{r_a-r}{h_a}\leq\frac{R}{r}\left(\frac{R}{r}-1\right).$$

Soluție.

Folosim inegalitatea lui Euler și $\sum\frac{h_a-r}{r_a}=\frac{p^2+r^2-10Rr}{2Rr}$

2). In ΔABC

$$3-\frac{2r}{R}\leq\sum\frac{h_a-r}{r_a}\leq\frac{R^2}{2r^2}.$$

Soluție.

Folosim inegalitatea lui Euler și $\sum \frac{h_a - r}{r_a} = \frac{p^2 + r^2 - 10Rr}{2Rr}$

Remarcă.

3). In ΔABC

$$\sum \frac{h_a - r}{r_a} \le \sum \frac{r_a - r}{h_a} .$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Folosind $\sum \frac{h_a - r}{r_a} = \frac{p^2 + r^2 - 10Rr}{2Rr}$ și $\sum \frac{r_a - r}{h_a} = \frac{2(R-r)}{r}$, inegalitatea se scrie:

$$\frac{p^2 + r^2 - 10Rr}{2Rr} \le \frac{2(R-r)}{r} \Leftrightarrow p^2 + r^2 - 10Rr \le 4R(R-r) \Leftrightarrow p^2 \le 4R^2 + 6Rr - r^2 ,$$

care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \le 4R^2 + 4Rr + 3r^2$.

Problema528.

Solve in $\mathbf{R}$ the equation

$$\left(\frac{x^2 - x - 10}{10x}\right)^2 + \left(\frac{x^2 + x - 10}{10x}\right)^2 = \frac{1}{10} .$$

Sanong Huyrerai,Math 5/2025.

Soluție.

$$\left(\frac{x^2 - x - 10}{10x}\right)^2 + \left(\frac{x^2 + x - 10}{10x}\right)^2 = \frac{1}{10} \Leftrightarrow \left(\frac{x^2 - 10}{10x} - \frac{1}{10}\right)^2 + \left(\frac{x^2 - 10}{10x} + \frac{1}{10}\right)^2 = \frac{1}{10} \Leftrightarrow$$

$$\overset{\frac{x^2-10}{10x}=t}{\Leftrightarrow} \left(t - \frac{1}{10}\right)^2 + \left(t + \frac{1}{10}\right)^2 = \frac{1}{10} \Leftrightarrow t^2 - \frac{t}{5} + \frac{1}{100} + t^2 + \frac{t}{5} + \frac{1}{100} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow t^2 = \frac{1}{25} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = \pm \frac{1}{5} .$$

Cazul1). $t = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{x^2 - 10}{10x} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow x^2 - 2x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{11}$.

Cazul2). $t=\frac{-1}{5} \Leftrightarrow \frac{x^2-10}{10x}=\frac{-1}{5} \Leftrightarrow x^2+2x-10=0$, $\Leftrightarrow x=-1\pm\sqrt{11}$

Deducem că soluțiile reale ale ecuației sunt $x_{1,2}=1\pm\sqrt{11}$, $x_{3,4}=-1\pm\sqrt{11}$.

Remarcă.

Let be $\lambda \ge 2$ fixed. Solve in $\mathbf{R}$ the equation

$$\left(\frac{x^2-x-\lambda}{\lambda x}\right)^2+\left(\frac{x^2+x-\lambda}{\lambda x}\right)^2=\frac{1}{\lambda}.$$

Marin Chirciu

Soluțiile reale ale ecuației sunt $x_{1,2}=\frac{\sqrt{\lambda-2}\pm\sqrt{9\lambda-2}}{2\sqrt{2}}$, $x_{3,4}=\frac{-\sqrt{\lambda-2}\pm\sqrt{9\lambda-2}}{2\sqrt{2}}$.

Problema529.

If $a_1,a_2,...,a_n>0$, $a_1+a_2+...+a_n=1$ then

$$\sum\sqrt{4a_1+1}\le\sqrt{n(n+4)}.$$

GM 11-12/1988

Remarcă.

If $a_1,a_2,...,a_n,\lambda>0$, $a_1+a_2+...+a_n=1$ then

$$\sum\sqrt{\lambda a_1+1}\le\sqrt{n(n+\lambda)}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS=\sum\sqrt{\lambda a_1+1}\overset{CBS}{\le}\sqrt{n\sum(\lambda a_1+1)}=\sqrt{n\left(\lambda\sum a_1+n\right)}=\sqrt{n(\lambda+n)}=RHS,$$

cu egal pentru: $\frac{\sqrt{\lambda a_1+1}}{1}=\frac{\sqrt{\lambda a_2+1}}{1}=...=\frac{\sqrt{\lambda a_n+1}}{1}$ și $a_1+a_2+...+a_n=1$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a_1=a_2=...=a_n=\frac{1}{n}$.

Problema530.

If $x,y,z>0$, $x^3+y^3+z^3=3$ then

$$\sum \frac{x^3}{3y+1} \geq \frac{3}{4}.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam, RMM 5/2025

Remarcă.

If $x, y, z > 0$, $x^3 + y^3 + z^3 = 3$ then

$$\sum \frac{x^3}{3y+\lambda} \geq \frac{3}{\lambda+3}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{x^3}{3y+\lambda} \overset{AG}{\geq} \sum \frac{x^3}{y^3+\lambda+2} \overset{x^3=a}{=} \sum \frac{a}{b+\lambda+2} = \sum \frac{a^2}{ab+(\lambda+2)a} \overset{CS}{\geq} \frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum\left(ab+(\lambda+2)a\right)} =$$

$$= \frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum ab+(\lambda+2)\sum a} \overset{(1)}{\geq} \frac{3^2}{3+(\lambda+2)\cdot 3} = \frac{3}{\lambda+3} = RHS.$$

$\sum a = 3$ și $\sum ab \leq 3$, vezi:

$$\sum ab \leq \frac{1}{3}\left(\sum a\right)^2 = \frac{1}{3}\cdot 3^2 = 3.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = 1$.

Problema531.

If $x, y, z > 0$, $x + y + z = 1$ then

$$9xyz \geq 4(xy + yz + zx) - 1.$$

Mathematical Inequalities 5/2025

Soluție.

Folosim pqr -Method

Notăm $p = \sum x = 1, q = \sum xy, r = xyz$.

Inegalitatea se scrie $9r \geq 4q - 1$,care rezultă din $p^3 - 4pq + 9r \geq 0$,(Schur).

Inegalitatea lui Schur $p^3 - 4pq + 9r \geq 0$, $p = 1 \Rightarrow 9r \geq 4q - 1$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Remarcă.

In ΔABC

$$\frac{9r^3}{h_a h_b h_c} \geq 4r^2\left(\frac{1}{h_a h_b} + \frac{1}{h_b h_c} + \frac{1}{h_c h_a}\right) - 1.$$

Marin Chirciu

Lema.

If $x, y, z > 0$, $x + y + z = 1$ then

$$9xyz \geq 4(xy + yz + zx) - 1.$$

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum \frac{r}{r_a} = 1$.

Folosind **Lema** pentru $(x, y, z) = \left(\frac{r}{r_a}, \frac{r}{r_b}, \frac{r}{r_c}\right)$ obținem concluzia.

Remarcă.

In ΔABC

$$\frac{9r^3}{r_a r_b r_c} \geq 4r^2\left(\frac{1}{r_a r_b} + \frac{1}{r_b r_c} + \frac{1}{r_c r_a}\right) - 1.$$

Marin Chirciu

Lema.

If $x, y, z > 0$, $x + y + z = 1$ then

$$9xyz \geq 4(xy + yz + zx) - 1.$$

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum \frac{r}{h_a} = 1$.

Folosind **Lema** pentru $(x, y, z) = \left(\frac{r}{h_a}, \frac{r}{h_b}, \frac{r}{h_c}\right)$ obținem concluzia.

Remarcă.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=1$ and $\lambda\geq\frac{4}{9}$ then

$$xyz\geq\lambda\left(xy+yz+zx\right)+\frac{1}{27}\left(1-9\lambda\right).$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosim pqr -Method: $p=\sum x=1, q=\sum xy, r=xyz$

Inegalitatea se scrie $r\geq\lambda q+\frac{1}{27}\left(1-9\lambda\right)$,care rezultă din $p^3-4pq+9r\geq 0$,(Schur).

Inegalitatea lui Schur $p^3-4pq+9r\geq 0$, $p=1\Rightarrow r\geq\frac{4q-1}{9}$.

Este suficient să arătăm că:

$\frac{4q-1}{9}\geq\lambda q+\frac{1}{27}\left(1-9\lambda\right)\Leftrightarrow 3q\left(9\lambda-4\right)\leq 9\lambda-4$, care rezultă din $\lambda\geq\frac{4}{9}$ și $q\leq\frac{1}{3}$, vezi

$1=\left(\sum x\right)^2\geq 3\sum xy=3q\Rightarrow 1\geq 3q$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Problema532.

In ΔABC

$$\sum r_b r_c\tan\frac{A}{2}\geq 9\sqrt{3}r^2.$$

Sarkhan Adgozalov, Georgia, RMM 5/2025

Soluție.

Lema.

Folosim inegalitatea lui Mitrinovic și $\sum r_b r_c\tan\frac{A}{2}=3pr$

Remarcă.

1). In ΔABC

$$3F \le \sum r_b r_c \tan\frac{A}{2} \le \frac{9\sqrt{3}Rr}{2}.$$

Soluție.

Folosim inegalitatea lui Euler și $\sum r_b r_c \tan\frac{A}{2} = 3pr$

2). In ΔABC

$$3\left(3\sqrt{3}r^2\right)^n \le \sum\left(r_b r_c \tan\frac{A}{2}\right)^n \le 3\left(\frac{9\sqrt{3}Rr^2}{2}\right)^n, n \in \mathbf{N}.$$

Soluție.

Folosim inegalitatea lui Mitrinovic și $\sum r_b r_c \tan\frac{A}{2} = 3pr$

3). In ΔABC

$$p(8R-7r) \le \sum r_b r_c \cot\frac{A}{2} \le \frac{p(2R-r)^2}{r}.$$

Soluție.

Folosim inegalitatea lui Gerretsen și $\sum r_b r_c \cot\frac{A}{2} = \frac{p\left(p^2-2r^2-8Rr\right)}{r}$

.

Inegalitatea din dreapta.

4). In ΔABC

$$\sum r_b r_c \cot\frac{A}{2} \ge 3\sum r_b r_c \tan\frac{A}{2}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Folosind $\sum r_b r_c \tan\frac{A}{2} = 3pr$ și $\sum r_b r_c \cot\frac{A}{2} = \frac{p\left(p^2-2r^2-8Rr\right)}{r}$ inegalitatea se scrie:

$$\frac{p\left(p^2-2r^2-8Rr\right)}{r} \ge 3\cdot 3pr \Leftrightarrow p^2-2r^2-8Rr \ge 9r^2 \Leftrightarrow p^2 \ge 8Rr+11r^2,$$

care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \ge 16Rr - 5r^2$.

Problema533.

If $a,b,c>0$, $a^2+b^2+c^2+\frac{3}{4}=12abc$ then

$$\sum \frac{1}{a^3+b^3+\frac{1}{8}} \le 8 .$$

Kunihiko Chikaya, Japan, Mathematical Inequalities 6/2012

Remarcă.

If $a,b,c,\lambda>0$, $a^2+b^2+c^2+\frac{3}{\lambda^2}=3\lambda^2 abc$ then

$$\sum \frac{1}{a^3+b^3+\frac{1}{\lambda^3}} \le \lambda^3 .$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema.

If $a,b,c,\lambda>0$, then

$$\frac{1}{a^3+b^3+\frac{1}{\lambda^3}} \le \frac{\lambda}{3ab} .$$

Demonstrație.

$a^3+b^3+\frac{1}{\lambda^3} \overset{AG}{\ge} 3\sqrt[3]{a^3\cdot b^3\cdot\frac{1}{\lambda^3}} = \frac{3ab}{\lambda} \Rightarrow \frac{1}{a^3+b^3+\frac{1}{\lambda^3}} \le \frac{\lambda}{3ab}$, cu egal pentru $a=b=\frac{1}{\lambda}$.

$$\sum \frac{1}{a^3+b^3+\frac{1}{\lambda}} \overset{Lema}{\le} \sum \frac{\lambda}{3ab} = \frac{\lambda}{3}\sum\frac{1}{ab} = \frac{\lambda}{3}\frac{\sum a}{abc} \overset{ipoteza}{=} \frac{2}{3}\frac{\sum a}{\frac{1}{3\lambda^2}\left(\sum a^2+\frac{3}{\lambda^2}\right)} = \frac{2}{3}\cdot 3\lambda^2 \frac{\sum a}{\sum a^2+\frac{3}{\lambda^2}} \overset{CS}{\le}$$

$$\overset{CS}{\le} 2\lambda^2 \frac{\sum a}{\frac{1}{3}\left(\sum a\right)^2+\frac{3}{\lambda^2}} = 2\lambda^2 \frac{p}{\frac{1}{3}p^2+\frac{3}{\lambda^2}} \overset{(1)}{\le} \lambda^3 = RHS ,$$

unde $2\lambda^2 \dfrac{p}{\dfrac{1}{3}p^2+\dfrac{3}{\lambda^2}} \overset{(1)}{\leq} \lambda^3 \Leftrightarrow 2\dfrac{p}{\dfrac{1}{3}p^2+\dfrac{3}{\lambda^2}} \leq \lambda \Leftrightarrow 6\lambda p \leq p^2\lambda^2+9 \Leftrightarrow (\lambda p-3)^2 \geq 0$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=\dfrac{\lambda}{2}$.

Problema534.

If $a,b,c,d>0$ then

$$\sum \frac{9}{a(b+c+d)} \geq \frac{16}{(a+b)(c+d)}+\frac{16}{(a+c)(b+d)}+\frac{16}{(a+d)(b+c)}.$$

Paul Peter Dalyay, Hungary, American Mathematical Monthly, 2011

Soluție.

Lema.

If $x,y,z>0$ and f is a convex function then

$$\sum f(x)+f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \geq \frac{4}{3}\sum f\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Demonstrație.

Folosim Popoviciu inequality $\Rightarrow \sum f(x)+3f\left(\dfrac{x+y+z}{3}\right) \geq 2\sum f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$, (1)și

$$\sum f(x)=\sum \frac{f(x)+f(y)}{2} \overset{Jensev}{\geq} \sum f\left(\frac{x+y}{2}\right) \Rightarrow \sum f(x) \geq \sum f\left(\frac{x+y}{2}\right), (2).$$

Din $(1)+2\cdot(2) \Rightarrow 3\sum f(x)+3f\left(\dfrac{x+y+z}{3}\right) \geq 4\sum f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$.

Folosind **Lema** pentru $f(t)=\dfrac{1}{t}, t>0$ obținem:

$$\sum \frac{1}{x}+\frac{3}{x+y+z} \geq \frac{4}{3}\sum \frac{2}{x+y} \Leftrightarrow \sum \frac{1}{x}+\frac{3}{x+y+z} \geq \frac{8}{3}\sum \frac{1}{x+y}, (3).$$

Folosind (3) pentru $(x,y,z)=(a,b,c),(b,c,d),(c,d,a),(d,a,b)$ și sumând $\Rightarrow$

$\Rightarrow 9\sum\frac{1}{a}+9\sum\frac{1}{a+b+c}\geq 16\sum\frac{1}{a+b}$ și $\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c+d}=\frac{a+b+c+d}{a(b+c+d)}$,

$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c+d}=\frac{a+b+c+d}{(a+b)(c+d)}\Rightarrow$ concluzia.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=d$.

Remarcă.

1). If $x,y,z>0$ then

$$\sum\frac{3}{x}+\frac{27}{x+y+z}\geq\sum\frac{8}{x+y}.$$

Soluție.

Lema.

If $x,y,z>0$ and f is a convex function then

$$\sum f(x)+f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)\geq\frac{4}{3}\sum f\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Folosind **Lema** pentru $f(x)=\frac{1}{x},x>0$ obținem:

$$\sum\frac{1}{x}+\frac{3}{x+y+z}\geq\frac{4}{3}\sum\frac{2}{x+y}\Leftrightarrow\sum\frac{1}{x}+\frac{3}{x+y+z}\geq\frac{8}{3}\sum\frac{1}{x+y}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z$.

2).In ΔABC

$$3\sum r_a+27r\geq 8\sum\frac{r_ar_b}{r_a+r_b}.$$

Soluție.

Lema.

If $x,y,z>0$ then

$$\sum\frac{3}{x}+\frac{27}{x+y+z}\geq\sum\frac{8}{x+y}.$$

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum\frac{r}{r_a}=1$.

Folosind **Lema** pentru $(x,y,z)=\left(\frac{r}{r_a},\frac{r}{r_b},\frac{r}{r_c}\right)$ obținem concluzia.

3). In ΔABC

$$3\sum h_a+27r\geq 8\sum\frac{h_ah_b}{h_a+h_b}.$$

Soluție.

Lema.

If $x,y,z>0$ then

$$\sum\frac{3}{x}+\frac{27}{x+y+z}\geq\sum\frac{8}{x+y}.$$

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum\frac{r}{h_a}=1$.

Folosind **Lema** pentru $(x,y,z)=\left(\frac{r}{h_a},\frac{r}{h_b},\frac{r}{h_c}\right)$ obținem concluzia.

Remarca.

4). In ΔABC

$$\sum\frac{3}{m_a}+\frac{27}{m_a+m_b+m_c}\geq\sum\frac{8}{m_b+m_c}.$$

Soluție.

Lema.

If $x,y,z>0$ then

$$\sum\frac{3}{x}+\frac{27}{x+y+z}\geq\sum\frac{8}{x+y}.$$

Folosind **Lema** pentru $(x,y,z)=(m_a,m_b,m_c)$ obținem:

$$\sum\frac{3}{m_a}+\frac{27}{m_a+m_b+m_c}\geq\sum\frac{8}{m_b+m_c}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarca.

In ΔABC

$$\sum \frac{3}{w_a} + \frac{27}{w_a + w_b + w_c} \ge \sum \frac{8}{w_b + w_c}.$$

Soluție.

Lema.

If $x, y, z > 0$ then

$$\sum \frac{3}{x} + \frac{27}{x + y + z} \ge \sum \frac{8}{x + y}.$$

Folosind **Lema** pentru $(x, y, z) = (w_a, w_b, w_c)$ obținem concluzia.

5). In ΔABC

$$\sum \frac{3}{s_a} + \frac{27}{s_a + s_b + s_c} \ge \sum \frac{8}{s_b + s_c}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Lema.

If $x, y, z > 0$ then

$$\sum \frac{3}{x} + \frac{27}{x + y + z} \ge \sum \frac{8}{x + y}.$$

Folosind **Lema** pentru $(x, y, z) = (s_a, s_b, s_c)$ obținem concluzia.

Problema535.

If $x, y, z > 0$, $\sum xy^3 = 3$ then

$$\sum \frac{x^5}{y} \ge 3.$$

Crăciun Gheorghe, Mathematical Inequalities 5/2025

Remarcă.

If $x, y, z > 0$, $\sum xy^3 = 3$ and $n \in \mathbf{N}$ then

$$\sum \frac{x^{2n+1}}{y} \geq 3.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Pentru $n=0$ obținem $\sum \frac{x}{y} \geq 3$, vezi AM-GM.

Pentru $n \in \mathbf{N}^*$ folosim inegalitatea lui Holder.

$$LHS = \sum \frac{x^{2n+1}}{y} = \sum \frac{x^{2n+2}}{xy} \overset{Holder}{\geq} \frac{\left(\sum x^2\right)^{n+1}}{3^{n-1}\sum xy} \overset{SOS}{\geq} \frac{\left(\sum x^2\right)^{n+1}}{3^{n-1}\sum x^2} = \frac{1}{3^{n-1}}\left(\sum x^2\right)^n \overset{Vasc}{\geq} \frac{1}{3^{n-1}}\left(\sqrt{3\sum xy^3}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{3^{n-1}}\left(\sqrt{3\cdot 3}\right)^n = \frac{1}{3^{n-1}}\cdot 3^n = 3 = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1$.

Problema536.

In ΔABC

$$w_a + w_b + m_c \leq p\sqrt{3}.$$

Liviu Nicolescu, Vlad Boskoff, Teoreme de geometrie plană, Universitatea București, 1986

Soluție.

Notăm $(x,y,z) = \left(\sqrt{\frac{p-a}{p}}, \sqrt{\frac{p-b}{p}}, \sqrt{\frac{p-c}{p}}\right)$.

Obținem $w_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2} = \frac{2bc}{b+c}\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \leq p\sqrt{\frac{p-a}{p}} = px \Rightarrow w_a \leq px$.

Din $\frac{w_a+w_b}{p} \leq x+y$ și $\frac{m_c}{p} \leq \sqrt{1-\frac{1}{2}(x+y)^2} \Rightarrow \frac{w_a+w_b}{p} + \frac{m_c}{p} \leq x+y+\sqrt{1-\frac{1}{2}(x+y)^2} \overset{(1)}{\leq} \sqrt{3}$,

unde $x+y+\sqrt{1-\frac{1}{2}(x+y)^2} \overset{(1)}{\leq} \sqrt{3} \overset{x+y=t}{\Leftrightarrow} t+\sqrt{1-\frac{1}{2}t^2} \leq \sqrt{3} \Leftrightarrow \left(t\sqrt{3}-2\right)^2 \geq 0$.

Deducem $w_a + w_b + m_c \leq p\sqrt{3}$.

Problema537.

In ΔABC

$$\frac{m_a}{w_a} \geq \frac{(b+c)^2}{4bc}.$$

Liviu Nicolescu, Vlad Boskoff, Teoreme de geometrie plană, Universitatea București, 1986

Soluție.

Folosind $m_a \geq \frac{1}{2}(b+c)\cos\frac{A}{2}$ și $w_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2} \Rightarrow \frac{m_a}{w_a} \geq \frac{(b+c)^2}{4bc}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema538.

In ΔABC

$$m_a w_a \geq p(p-a) = r_b r_c.$$

Liviu Nicolescu, Vlad Boskoff, Teoreme de geometrie plană, Universitatea București, 1986

Soluție.

Folosind $m_a \geq \frac{1}{2}(b+c)\cos\frac{A}{2}$ și $w_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2} \Rightarrow \frac{m_a}{w_a} \geq \frac{(b+c)^2}{4bc}$ și $\frac{p(p-a)}{w_a^2} = \frac{(b+c)^2}{4bc} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{m_a}{w_a} \geq \frac{p(p-a)}{w_a^2} \Rightarrow m_a w_a \geq p(p-a)$ și $p(p-a) = r_b r_c$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema539.

In ΔABC

$$\sum r_a^2 \geq \frac{27R^2}{4} \geq \sum m_a^2.$$

Liviu Nicolescu, Vlad Boskoff, Teoreme de geometrie plană, Universitatea București, 1986

Soluție.

Folosind identitățile în triunghi $\sum r_a^2 = (4R+r)^2 - 2p^2$, $\sum m_a^2 = \frac{3}{4}\sum a^2$ și $\sum a^2 = 2(p^2 - r^2 - 4Rr)$ obținem concluzia.

Problema540.

1). In ΔABC

$$\sum r_a\left(\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)\geq 3\left(\frac{4F}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Soluție.

$$\sum r_a\left(\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)\overset{AG}{\geq}3\sqrt[3]{\prod r_a\left(\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)}=3\sqrt[3]{\prod r_a\prod\left(\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)}=$$

$$=3\sqrt[3]{rp^2\frac{4R}{p}}=3\sqrt[3]{4Rrp}=3\sqrt[3]{abc}=3(abc)^{\frac{1}{3}}\overset{Carlitz}{\geq}3\left(\frac{4F}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}}=3\left(\frac{4F}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=RHS.$$

Remarcă.

In ΔABC

$$\sum r_a\left(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)\geq 6p.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu, IneMath 5/2025

Soluție.

$$\sum r_a\left(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)\overset{AG}{\geq}3\sqrt[3]{\prod r_a\left(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)}=3\sqrt[3]{\prod r_a\prod\left(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)}=$$

$$=3\sqrt[3]{rp^2\frac{4Rp}{r^2}}=3\sqrt[3]{p^3\frac{4R}{r}}\overset{Euler}{\geq}3\sqrt[3]{p^3\cdot 8}=3\cdot 2p=6p=RHS,$$

Am folosit mai sus $\prod r_a=rp^2$ și $\prod\left(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)=\frac{4Rp}{r^2}$.

Problema541.

If $a,b,c>0$ then

$$\sum e^{\frac{1}{ab}}\geq\frac{27}{2(a+b+c)}.$$

Panagiotis Danousis, Greece, MathAtelier 5/2025

Soluție.

Folosim $e^x \geq x+1$, $\forall x \in \mathbf{R}$, cu egal pentru $x=0$.

$$LHS=\sum e^{\frac{1}{ab}} \geq \sum\left(\frac{1}{ab}+1\right)=\sum\frac{1}{ab}+3 \overset{CS}{\geq} \frac{9}{\sum ab}+3 \overset{SOS}{\geq} \frac{9}{\frac{1}{3}\left(\sum a\right)^2}+3 \overset{(1)}{\geq} \frac{27}{2\sum a}=RHS,$$

unde $\frac{9}{\frac{1}{3}\left(\sum a\right)^2}+3 \overset{(1)}{\geq} \frac{27}{2\sum a} \Leftrightarrow \frac{9}{\frac{1}{3}p^2}+3 \geq \frac{27}{2p} \Leftrightarrow 2p^2-9p+18 \geq 0$, vezi $\Delta<0$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $\frac{1}{ab}=\frac{1}{bc}=\frac{1}{ca}=0$, fals.

Deducem că inegalitatea este strictă.

Remarcă.

If $a,b,c>0$ then

$$\sum e^{\frac{1}{a}} \geq \frac{9}{a+b+c}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosim $e^x \geq x+1$, $\forall x \in \mathbf{R}$, cu egal pentru $x=0$.

$$LHS=\sum e^{\frac{1}{a}} \geq \sum\left(\frac{1}{a}+1\right)=\sum\frac{1}{a}+3 \overset{CS}{\geq} \frac{9}{\sum a}+3 \geq \frac{9}{\sum a}=RHS,$$

unde $\frac{9}{\frac{1}{3}\left(\sum a\right)^2}+3 \overset{(1)}{\geq} \frac{27}{2\sum a} \Leftrightarrow \frac{9}{\frac{1}{3}p^2}+3 \geq \frac{27}{2p} \Leftrightarrow 2p^2-9p+18 \geq 0$, vezi $\Delta<0$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $\frac{1}{ab}=\frac{1}{bc}=\frac{1}{ca}=0$, fals.

Deducem că inegalitatea este strictă.

Problema542.

If $a,b,c>0$, $abc=1$ then

$$\sum a^3+3 \geq 2\sum ab.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam, RMM 5/2025

Remarcă.

If $a,b,c>0$, $abc=1$ and $\lambda\le 6$ then

$$\sum a^3+\lambda\ge\left(1+\frac{\lambda}{3}\right)\sum ab.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosim pqr -Metho.

Notăm $p=\sum a, q=\sum ab, r=abc=1$.

$\sum a^3=p^3-3pq+3r$, $r=1$.

Inegalitatea se scrie:

$$p^3-3pq+3+\lambda\ge\left(1+\frac{\lambda}{3}\right)q.$$

Folosind inegalitatea lui Schur $p^3-4pq+9r\ge 0, r=1 \Leftrightarrow p^3\ge 4pq-9$ este suficient :

$$4pq-9-3pq+3+\lambda\ge\left(1+\frac{\lambda}{3}\right)q \Leftrightarrow pq-6+\lambda\ge\left(1+\frac{\lambda}{3}\right)q.$$

Folosind $p\ge 3$, vezi $p=a+b+c\overset{AG}{\ge}3\sqrt[3]{abc}=3$, este suficient să arătăm că:

$3q-6+\lambda\ge\left(1+\frac{\lambda}{3}\right)q \Leftrightarrow \left(2-\frac{\lambda}{3}\right)q\ge 6-\lambda \Leftrightarrow (6-\lambda)q\ge 3(6-\lambda)$, care rezultă din $\lambda\le 6$ și $q\ge 3$, vezi $q=ab+bc+ca\overset{AG}{\ge}3\sqrt[3]{(abc)^2}=3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Problema543.

Fie r_1,r_2,r_3,R_1,R_2,R_3 razele cercurilor înscrise, respectiv circumscrise ale $\Delta BOC,\Delta COA,\Delta AOB$, O fiind centrul cercului circumscris ΔABC. Arătați că:

$$\frac{a}{r_1R_1}+\frac{b}{r_2R_2}+\frac{c}{r_3R_3}=\frac{4}{R^2}(p+3R).$$

GM-1/1987

Soluție.

Obținem $r_1=\frac{S_1}{p_1}=\frac{S_1}{\frac{a+R+R}{2}}=\frac{2S_1}{a+2R}$ și $R_1=\frac{a_1b_1c_1}{4S_1}=\frac{a\cdot R\cdot R}{4S_1}=\frac{aR^2}{4S_1}$.

Rezultă $LHS=\sum\frac{a}{r_1R_1}=\sum\frac{a}{\frac{2S_1}{a+2R}\cdot\frac{aR^2}{4S_1}}=\sum\frac{2(a+2R)}{R^2}=\frac{2\left(\sum a+6R\right)}{R^2}=\frac{2(2p+6R)}{R^2}=$

$=\frac{4}{R^2}(p+3R)=RHS$.

Remarcă.

1). Fie r_1,r_2,r_3,R_1,R_2,R_3 razele cercurilor înscrise, respectiv circumscrise ale $\Delta BOC,\Delta COA,\Delta AOB$, O fiind centrul cercului circumscris ΔABC. Arătați că:

$$\left(\frac{a}{r_1R_1}\right)^2+\left(\frac{b}{r_2R_2}\right)^2+\left(\frac{c}{r_3R_3}\right)^2\ge\frac{16}{3R^4}(p+3R)^2.$$

Soluție.

$$LHS=\sum\left(\frac{a}{r_1R_1}\right)^2\overset{CS}{\ge}\frac{\left(\sum\frac{a}{r_1R_1}\right)^2}{3}\overset{(1)}{\ge}\frac{\left(\frac{4}{R^2}(p+3R)\right)^2}{3}=\frac{16}{3R^4}(p+3R)^2=RHS$$

Remarcă.

2). Fie r_1,r_2,r_3,R_1,R_2,R_3 razele cercurilor înscrise, respectiv circumscrise ale $\Delta BOC,\Delta COA,\Delta AOB$, O fiind centrul cercului circumscris ΔABC. Arătați că:

$$\left(\frac{a}{r_1R_1}\right)^n+\left(\frac{b}{r_2R_2}\right)^n+\left(\frac{c}{r_3R_3}\right)^n\ge3\left(\frac{4(p+3R)}{3R^2}\right)^n.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Pentru $n\ge2$ se folosește inegalitatea lui Holder.

$$LHS=\sum\left(\frac{a}{r_1R_1}\right)^n\overset{Holder}{\ge}\frac{\left(\sum\frac{a}{r_1R_1}\right)^n}{3^{n-1}}\overset{(1)}{\ge}\frac{\left(\frac{4}{R^2}(p+3R)\right)^n}{3^{n-1}}=\frac{4^n}{3^{n-1}R^{2n}}(p+3R)^n=$$

$$=3\left(\frac{4(p+3R)}{3R^2}\right)^n=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema544.

If $a,b,c,d\in(0,\infty)-\{1\}$ și $x,y,z,t\in\mathbf{R}$, $a^x=bcd, b^y=cda, c^z=dab, dt=abc$ then

$$\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}+\frac{1}{1+t}=1.$$

GM-7-8/1992

Soluție.

Logaritmând obținem $x=\frac{\lg b+\lg c+\lg d}{\lg a}$ și analoagele.

Obținem $\sum\frac{1}{1+x}=\sum\frac{1}{1+\frac{\lg b+\lg c+\lg d}{\lg a}}=\sum\frac{\lg a}{\lg a+\lg b+\lg c+\lg d}=1$.

Remarcă.

1). If $a,b,c\in(0,\infty)-\{1\}$ și $x,y,z\in\mathbf{R}$, $a^x=bc, b^y=ca, c^z=ab$ then

$$\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}=1.$$

Soluție.

Logaritmând obținem $x=\frac{\lg b+\lg c}{\lg a}$ și analoagele.

Obținem $\sum\frac{1}{1+x}=\sum\frac{1}{1+\frac{\lg b+\lg c}{\lg a}}=\sum\frac{\lg a}{\lg a+\lg b+\lg c}=1$.

2). If $a,b,c>1$ și $x,y,z\in\mathbf{R}$, $a^x=bc, b^y=ca, c^z=ab$ then

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq\frac{3}{2}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Logaritmând obținem $x=\dfrac{\lg b+\lg c}{\lg a}$ și analoagele.

Obținem $LHS=\sum\dfrac{1}{x}=\sum\dfrac{1}{\dfrac{\lg b+\lg c}{\lg a}}=\sum\dfrac{\lg a}{\lg b+\lg c}\overset{Nesbitt}{\geq}\dfrac{3}{2}=RHS$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c \Leftrightarrow x=y=z$.

Problema545.

In ΔABC

$$8\prod\sin\frac{A}{2}\leq\prod\cos\frac{B-C}{2}\leq 1 .$$

Răzvan Satnoianu, Concursul”Laurențiu Duican”1994

Soluție.

Folosind $\prod\sin\dfrac{A}{2}=\dfrac{r}{4R}$ și $\prod\cos\dfrac{B-C}{2}=\dfrac{p^2+r^2+2Rr}{8R^2}$, prima inegalitate se scrie:

$8\cdot\dfrac{r}{4R}\leq\dfrac{p^2+r^2+2Rr}{8R^2} \Leftrightarrow p^2\geq 14Rr-r^2$, vezi $p^2\geq 16Rr-5r^2$ (Gerretsen).

Adoua inegalitate rezultă din $\cos x\leq 1, \forall x\in\mathbf{R}$.

Remarcă.

In ΔABC

$$\frac{8}{3\sqrt{3}}\prod\cos\frac{A}{2}\leq\frac{R}{2r}\prod\cos\frac{B-C}{2} .$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosind $\prod\cos\dfrac{A}{2}=\dfrac{p}{4R}$ și $\prod\cos\dfrac{B-C}{2}=\dfrac{p^2+r^2+2Rr}{8R^2}$, negalitatea se scrie:

$\dfrac{8}{3\sqrt{3}}\cdot\dfrac{p}{4R}\leq\dfrac{R}{2r}\cdot\dfrac{p^2+r^2+2Rr}{8R^2} \Leftrightarrow p^2\geq 14Rr-r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen:

$p^2\geq 16Rr-5r^2$ și Mitrinovic: $p\leq\dfrac{3R\sqrt{3}}{2}$.

Problema546.

If $x,y,z>0$, $xy+yz+zx=1$ then

$$\sum\frac{x^2}{y+z}\ge\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Imad Zak, Lebanon, Mathematical Inequalities 5/2025

Remarcă.

1). If $x,y,z>0$, $xy+yz+zx=1$ and $\lambda\ge 0$ then

$$\sum\frac{x^2}{y+\lambda z}\ge\frac{\sqrt{3}}{\lambda+1}.$$

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{x^2}{y+\lambda z}\overset{CS}{\ge}\frac{\left(\sum x\right)^2}{\sum(y+\lambda z)}=\frac{\left(\sum x\right)^2}{(\lambda+1)\sum x}=\frac{\sum x}{\lambda+1}\overset{(1)}{\ge}\frac{\sqrt{3}}{\lambda+1}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

2). In ΔABC

$$\sum\frac{\tan^2\frac{A}{2}}{\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}}\ge\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Soluție.

Lema.

If $x,y,z>0$, $xy+yz+zx=1$ then

$$\sum\frac{x^2}{y+z}\ge\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=1$.

Folosind **Lema** pentru $(x,y,z)=\left(\tan\frac{A}{2},\tan\frac{B}{2},\tan\frac{C}{2}\right)$ obținem: $\sum\frac{\tan^2\frac{A}{2}}{\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}}\ge\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3). In acute ΔABC

$$\sum \frac{\cot^2 A}{\cot B+\cot C} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Lema.

If $x, y, z > 0$, $xy + yz + zx = 1$ then

$$\sum \frac{x^2}{y+z} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum \cot A \cot B = 1$.

Folosind **Lema** pentru $(x, y, z) = (\cot A, \cot B, \cot C)$ obținem: $\sum \frac{\cot^2 A}{\cot B+\cot C} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Problema547.

If $a, b, c > 0$, $\frac{1}{a^2b^2}+\frac{1}{b^2c^2}+\frac{1}{c^2a^2}=12$ then

$$4\sum ab+12 \geq 3\sum \frac{1}{ab}.$$

Kunihiko Chikaya, Japan, Mathematical Inequalities 9/2016

Soluție.

Lema.

If $a, b, c > 0$, $\frac{1}{a^2b^2}+\frac{1}{b^2c^2}+\frac{1}{c^2a^2}=1$ then

$$\sum \frac{1}{ab} \leq 6.$$

Demonstrație.

$$12=\sum \frac{1}{a^2b^2} \overset{CS}{\geq} \frac{1}{3}\left(\sum \frac{1}{ab}\right)^2 \Rightarrow \sum \frac{1}{ab} \leq 6.$$

$$LHS = 4\sum ab + 12 \overset{CS}{\geq} 4 \cdot \frac{9}{\sum \frac{1}{ab}} + 12 \overset{Lema}{\geq} 4 \cdot \frac{9}{6} + 12 = 18 \overset{Lema}{\geq} 3\sum \frac{1}{ab} = RHS,$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Remarcă.

1). If $a,b,c > 0$, $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 12$ then

$$4\sum a + 12 \geq 3\sum \frac{1}{a}.$$

Soluție.

Lema.

If $a,b,c > 0$, $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 12$ then

$$\sum \frac{1}{a} \leq 6.$$

:

$$LHS = 4\sum a + 12 \overset{CS}{\geq} 4 \cdot \frac{9}{\sum \frac{1}{a}} + 12 \overset{Lema}{\geq} 4 \cdot \frac{9}{6} + 12 = 18 \overset{Lema}{\geq} 3\sum \frac{1}{a} = RHS,$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = \frac{1}{2}$.

2). If $a,b,c > 0$, $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 12$ and $\lambda \geq 0$ then

$$\sum a + \lambda \geq \left(\frac{\lambda}{6} + \frac{1}{4}\right)\sum \frac{1}{a}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Lema.

If $a,b,c > 0$, $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 12$ then $\sum \frac{1}{a} \leq 6$

$$LHS=\sum a+\lambda \overset{CS}{\geq} \frac{9}{\sum \frac{1}{a}}+\lambda \overset{Lema}{\geq} \frac{9}{6}+\lambda \overset{Lema}{\geq} \left(\frac{\lambda}{6}+\frac{1}{4}\right)\sum \frac{1}{a}=RHS ,$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=\frac{1}{2}$.

Problema548.

In ΔABC

$$\sum r_a\sqrt{r_a}\geq 3p\sqrt{r} .$$

M.Ganga, Teoreme și probleme de matematică

Soluție.

$$\sum r_a\sqrt{r_a}\geq 3p\sqrt{r} \Leftrightarrow \sum r_a\sqrt{\frac{r_a}{r}}\geq 3p$$

Folosind dualitatea avem $r_a=\frac{\sqrt{xyz(x+y+z)}}{x}$, $r=\sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}}$, $p=x+y+z$, obținem:

$$LHS=\sum r_a\sqrt{\frac{r_a}{r}}=\sum \frac{\sqrt{xyz(x+y+z)}}{x}\sqrt{\frac{\frac{\sqrt{xyz(x+y+z)}}{x}}{\sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}}}}=\sum \frac{\sqrt{xyz(x+y+z)}}{x}\sqrt{\frac{x+y+z}{x}}=$$

$$=(x+y+z)\sum \frac{\sqrt{yz}}{x} \overset{AG}{\geq} (x+y+z)\cdot 3\sqrt[3]{\prod \frac{\sqrt{yz}}{x}}=3(x+y+z)=3p=RHS .$$

Remarcă.

In ΔABC

$$\sum h_a\sqrt{h_a}\geq 9r\sqrt{3r} .$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$\sum h_a\sqrt{h_a}\geq 9\sqrt{3}r\sqrt{r} \Leftrightarrow \sum h_a\sqrt{\frac{h_a}{r}}\geq 9\sqrt{3}r .$$

Folosind dualitatea avem $h_a = \frac{2\sqrt{xyz(x+y+z)}}{y+z}$, $r = \sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}}$, $p = x+y+z$.

Problema549.

If $a,b,c>0$, $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=1$ then

$$\sum \frac{\sqrt{abc}}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} \le \frac{1}{2}.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam, RMM 5/2025

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{\sqrt{abc}}{\sqrt{(a+b)(c+a)}} \overset{CBS}{\le} \sum \frac{\sqrt{abc}}{\sqrt{ac}+\sqrt{ba}} = \sum \frac{\sqrt{bc}}{\sqrt{c}+\sqrt{b}} = \sum \frac{yz}{z+y} \overset{AG}{\le} \sum \frac{y+z}{4} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum x = \frac{1}{2}\sum \sqrt{a} = \frac{1}{2} = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=\frac{1}{9}$.

Remarcă.

If $a,b,c>0$, $\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}=1$ then

$$\sum \frac{1}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} \le \frac{1}{2}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{1}{\sqrt{(a+b)(c+a)}} \overset{CBS}{\le} \sum \frac{1}{\sqrt{ac}+\sqrt{ba}} = \sum \frac{1}{z+y} \overset{AG}{\le} \sum \frac{y+z}{4yz} = \frac{1}{4}\sum\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{y}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum \frac{1}{x} = \frac{1}{2}\sum \frac{1}{\sqrt{bc}} = \frac{1}{2} = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=3$.

Problema550.

If $a,b,c,d>0$, $a+b+c=d$ then

$$\prod\left(1+\frac{d}{a}\right)\geq 64.$$

Crăciun Gheorghe, Mathematical Inequalities 5/2025

Remarcă.

1). If $a,b,c,d,\lambda>0$, $a+b+c+d=\lambda$ then

$$\prod\left(1+\frac{\lambda}{a}\right)\geq 625.$$

Soluție.

$$LHS=\prod\left(1+\frac{\lambda}{a}\right)=\prod\left(1+\frac{a+b+c+d}{a}\right)=\prod\left(1+1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{d}{a}\right)=\prod 5\sqrt[5]{1\cdot 1\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{a}\cdot\frac{d}{a}}=$$

$$=5^4=625=RHS,$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=d=\frac{\lambda}{4}$.

2). If $a_1,a_2,...,a_n,\lambda>0$, $a_1+a_2+...+a_n=\lambda$ then

$$\prod\left(1+\frac{\lambda}{a_1}\right)\geq(n+1)^n.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS=\prod\left(1+\frac{\lambda}{a_1}\right)=\prod\left(1+\frac{a_1+a_2+...+a_n}{a_1}\right)=\prod\left(1+1+\frac{a_2}{a_1}+...+\frac{a_n}{a_1}\right)=\prod(n+1)\sqrt[n+1]{1\cdot 1\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot...\cdot\frac{a_n}{a_1}}=$$

$$=(n+1)^n=RHS,$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a_1=a_2=...=a_n=\frac{\lambda}{n}$.

Problema551.

If $a,b,c>0$, $a+b+c=ab+bc+ca$ then

$$\sum \frac{a}{a^2+b+c} \le 1 .$$

Nguyen Van Hoa, Vietnam, RMM 5/2025

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{a}{a^2+b+c} \overset{CBS}{\le} \sum a \cdot \frac{1+b+c}{(a+b+c)^2} = \frac{\sum a + 2\sum bc}{\left(\sum a\right)^2} = \frac{p+2q}{p^2} = \frac{p+2p}{p^2} = \frac{3}{p} \overset{(1)}{\le} 1 = RHS ,$$

unde(1) $\Leftrightarrow$ $p \ge 3$, vezi $p^2 \ge 3q = 3p \Rightarrow p^2 \ge 3p \Rightarrow p \ge 3$.

Am folosit mai sus(CBS) $\frac{1}{a^2+b+c} \le \frac{1+b+c}{(a+b+c)^2} \Leftrightarrow (a^2+b+c)(1+b+c) \ge (a+b+c)^2$.

Am notat mai sus $p = \sum a, q = \sum ab$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = 1$.

Remarcă.

If $a,b,c > 0$, $a+b+c = ab+bc+ca$ then

$$\sum \frac{b+c}{a^2+b+c} \le 2 .$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{b+c}{a^2+b+c} \overset{CBS}{\le} \sum (b+c) \cdot \frac{1+b+c}{(a+b+c)^2} = \frac{\sum (b+c) + \sum (b+c)^2}{\left(\sum a\right)^2} =$$

$$= \frac{2\sum a + 2\sum a^2 + 2\sum bc}{\left(\sum a\right)^2} = \frac{2p + 2(p^2-2q) + 2q}{p^2} \overset{q=p}{=} \frac{2p+2(p^2-2p)+2p}{p^2} = \frac{2p^2}{p^2} = 2 .$$

Am folosit mai sus(CBS) $\frac{1}{a^2+b+c} \le \frac{1+b+c}{(a+b+c)^2} \Leftrightarrow (a^2+b+c)(1+b+c) \ge (a+b+c)^2$.

Am notat mai sus $p = \sum a, q = \sum ab$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = 1$.

Problema552.

In ΔABC

$$\sum \frac{a\cot^{m+1} A}{h_a^{2m+1}} \geq \frac{2}{3^m F^m}, m \geq 0.$$

D.M.Bătinețu-Giurgiu, Daniel Sitaru, RMM 5/2025

Soluție.

$$\sum \frac{a\cot^{m+1} A}{h_a^{2m+1}} = \sum \frac{a^{2m+2}\cot^{m+1} A}{a^{2m+1}h_a^{2m+1}} = \sum \frac{\left(a^2\cot A\right)^{m+1}}{\left(ah_a\right)^{2m+1}} = \sum \frac{\left(a^2\cot A\right)^{m+1}}{\left(2F\right)^{2m+1}} =$$

$$= \frac{1}{\left(2F\right)^{2m+1}}\sum\left(a^2\cot A\right)^{m+1} \overset{Holder}{\geq} \frac{1}{\left(2F\right)^{2m+1}}\frac{\left(\sum\left(a^2\cot A\right)\right)^{m+1}}{3^m} = \frac{1}{\left(2F\right)^{2m+1}}\frac{\left(4F\right)^{m+1}}{3^m} =$$

$$= \frac{2}{3^m F^m} = RHS.$$

Am folosit mai sus $\sum a^2\cot A = 4pr$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

In acute ΔABC

$$\sum \frac{a\tan^{m+1} A}{h_a^{2m+1}} \geq \frac{6}{F^m}, m \geq 0.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$\sum \frac{a\tan^{m+1} A}{h_a^{2m+1}} = \sum \frac{a^{2m+2}\tan^{m+1} A}{a^{2m+1}h_a^{2m+1}} = \sum \frac{\left(a^2\tan A\right)^{m+1}}{\left(ah_a\right)^{2m+1}} = \sum \frac{\left(a^2\tan A\right)^{m+1}}{\left(2F\right)^{2m+1}} =$$

$$= \frac{1}{\left(2F\right)^{2m+1}}\sum\left(a^2\tan A\right)^{m+1} \overset{Holder}{\geq} \frac{1}{\left(2F\right)^{2m+1}}\frac{\left(\sum\left(a^2\tan A\right)\right)^{m+1}}{3^m} = \frac{1}{\left(2F\right)^{2m+1}}\frac{\left(12F\right)^{m+1}}{3^m} =$$

$$= \frac{2}{3^m F^m} = RHS.$$

Problema553.

Let be $a,b,c>0$ fixed. Solve in $\mathbf{R}$ the equation:

$$\frac{x-a}{2b+3c}+\frac{x-2b}{a+3c}+\frac{x-3c}{a+2b}=3.$$

Sanong Huayrerai, Math 5/2025

Soluție.

$$\frac{x-a}{2b+3c}+\frac{x-2b}{a+3c}+\frac{x-3c}{a+2b}=3 \Leftrightarrow \frac{x-a}{2b+3c}-1+\frac{x-2b}{a+3c}-1+\frac{x-3c}{a+2b}-1=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-a-2b-3c}{2b+3c}+\frac{x-a-2b-3c}{a+3c}+\frac{x-a-2b-3c}{a+2b}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-a-2b-3c)\left(\frac{1}{2b+3c}+\frac{1}{a+3c}+\frac{1}{a+2b}\right)=0 \Leftrightarrow (x-a-2b-3c)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=a+2b+3c$$

Remarca.

Let be $a,b,c,\lambda>0$ fixed. Solve in $\mathbf{R}$ the equation:

$$\frac{x-\lambda a}{(\lambda+1)b+(\lambda+2)c}+\frac{x-(\lambda+1)b}{\lambda a+(\lambda+2)c}+\frac{x-(\lambda+2)c}{\lambda a+(\lambda+1)b}=3.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Ecuația admite soluția $x=\lambda a+(\lambda+1)b+(\lambda+2)c$.

Problema554.

If $a,b>0$, $ab=1$ then

$$\frac{a+1}{b^2}+\frac{b+1}{a^2}+\frac{12}{a+b}\geq 10.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam, RMM 5/2025

Remarcă.

1). If $a,b>0$, $ab=1$ and $4\lambda+9\geq n$ then

$$\frac{a+\lambda}{b^2}+\frac{b+\lambda}{a^2}+\frac{4n}{a+b}\geq 2(\lambda+n+1).$$

Soluție.

$$LHS=\frac{a+\lambda}{b^2}+\frac{b+\lambda}{a^2}+\frac{4n}{a+b}=\frac{a^3+b^3+\lambda\left(a^2+b^2\right)}{a^2b^2}+\frac{4n}{a+b}\overset{ab=1}{=}\left(a+b\right)^3-3\left(a+b\right)+$$
$$+\lambda\left(\left(a+b\right)^2-2\right)+\frac{4n}{a+b}=\left(a+b\right)^3-3\left(a+b\right)+\lambda\left(a+b\right)^2-2\lambda+\frac{4n}{a+b}\overset{a+b=S}{=}S^3-3S+$$
$$+\lambda S^2-2\lambda+\frac{4n}{S}\overset{(1)}{\geq}2\left(\lambda+n+1\right)=RHS,$$

unde $S^3-3S+\lambda S^2-2\lambda+\frac{4n}{S}\overset{(1)}{\geq}2\left(\lambda+n+1\right)\Leftrightarrow S^4+\lambda S^3-3S^2-2\left(2\lambda+n+1\right)S+4n\geq 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(S-2\right)\left(S^3+\left(\lambda+2\right)S^2+\left(2\lambda+1\right)S-2n\right)\geq 0$, care rezultă din $S\geq 2$, vezi $S=a+b\geq 2\sqrt{ab}=2$ și $4\lambda+9\geq n$, care asigură $\left(S^3+\left(\lambda+2\right)S^2+\left(2\lambda+1\right)S-2n\right)\geq 0$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=1$.

2). If $a,b>0$, $ab=1$ and $\lambda\geq 0$ then

$$\frac{a+\lambda}{b^2}+\frac{b+\lambda}{a^2}+\frac{12\lambda}{a+b}\geq 2\left(4\lambda+1\right).$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS=\frac{a+\lambda}{b^2}+\frac{b+\lambda}{a^2}+\frac{12\lambda}{a+b}=\frac{a^3+b^3+\lambda\left(a^2+b^2\right)}{a^2b^2}+\frac{12\lambda}{a+b}\overset{ab=1}{=}\left(a+b\right)^3-3\left(a+b\right)+$$
$$+\lambda\left(\left(a+b\right)^2-2\right)+\frac{12\lambda}{a+b}=\left(a+b\right)^3-3\left(a+b\right)+\lambda\left(a+b\right)^2-2\lambda+\frac{12\lambda}{a+b}\overset{a+b=S}{=}S^3-3S+$$
$$+\lambda S^2-2\lambda+\frac{12\lambda}{S}\overset{(1)}{\geq}2\left(4\lambda+1\right)=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=1$.

Problema555.

If $x_1,x_2,...,x_n\geq -1$, $x_1+x_2+...+x_n\geq\frac{n}{2}$ then

$$x_1^3+x_2^3+...+x_n^3\geq\frac{n}{8}.$$

Marin Chirciu, Concursul ”Nicolae Păun”, Rm.Vâlcea 1994

Soluție.

Folosind $x^3+\frac{1}{4}\geq\frac{3}{4}x \Leftrightarrow (x+1)(2x-1)^2\geq 0$ obținem:

$$LHS=\sum x_1^3\geq\sum\left(\frac{3}{4}x_1-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4}\sum x_1-\frac{n}{4}\geq\frac{3}{4}\cdot\frac{n}{2}-\frac{n}{4}=\frac{n}{8}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x_1=x_2=...=x_n=\frac{1}{2}$

Problema556.

Solve in $\mathbf{R}$ the equation:

$$\frac{15}{x^2-3x-4}+\frac{7}{x^2+7x}-\frac{10}{x^2+4x-21}+1=0.$$

Konstantinos Geronikolas, Greece, MathAtelier 5/2025

Soluție.

$$\frac{15}{x^2-3x-4}+\frac{7}{x^2+7x}-\frac{10}{x^2+4x-21}+1=0 \Leftrightarrow \frac{15}{x^2-3x-4}+\frac{7}{x(x+7)}-\frac{10}{(x-3)(x+7)}+1=0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{15}{x^2-3x-4}-\frac{3(x+7)}{x(x-3)(x+7)}+1=0 \Leftrightarrow \frac{15}{x(x-3)-4}-\frac{3}{x(x-3)}+1=0 \overset{x(x-3)=t}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{x(x-3)=t}{\Leftrightarrow} \frac{15}{t-4}-\frac{3}{t}+1=0 \Leftrightarrow t^2+8t+12=0 \Leftrightarrow (t+2)(t+6)=0.$$

Din $x(x-3)=-2 \Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow x\in\{1,2\}$.

Din $x(x-3)=-6 \Leftrightarrow x^2-3x+6=0 \Leftrightarrow x\notin\mathbf{R}$.

Mulțimea soluțiilr ecuației este $S=\{1,2\}$.

Remarca.

1). Let be $a>1$ fixed. Solve in $\mathbf{R}$ the equation:

$$\frac{2a(2a-1)}{(a-1)(x^2-ax-a-1)}+\frac{2a+1}{x^2+(2a+1)x}-\frac{3a+1}{x^2+(a+1)x-2a^2-a}+1=0.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$\frac{2a(2a-1)}{x^2-ax-a-1}+\frac{2a+1}{x^2+(2a+1)x}-\frac{3a+1}{x^2+(a+1)x-2a^2-a}+1=0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2a(2a-1)}{(a-1)(x^2-ax-a-1)}+\frac{2a+1}{x(x+2a+1)}-\frac{3a+1}{(x-a)(x+2a+1)}+1=0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2a(2a-1)}{(a-1)(x^2-ax-a-1)}+\frac{2a+1}{x(x+2a+1)}-\frac{3a+1}{(x-a)(x+2a+1)}+1=0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2a(2a-1)}{(a-1)(x^2-ax-a-1)}+\frac{-a(x+2a+1)}{x(x-a)(x+2a+1)}+1=0 \Leftrightarrow \frac{2a(2a-1)}{(a-1)(x^2-ax-a-1)}-\frac{a}{x(x-a)}+1=0$$

$$\overset{x(x-a)=t}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{x(x-a)=t}{\Leftrightarrow} \frac{2a(2a-1)}{(a-1)(t-a-1)}-\frac{a}{t}+1=0 \Leftrightarrow (a-1)t^2+(2a^2-a+1)t+a(a^2-1)=0.$$

$$t_{1,2}=\frac{-(2a^2-a+1)\pm(3a-1)}{2(a-1)} \Rightarrow t_1=1-a,\, t_2=\frac{2(1+a)}{1-a}.$$

Din $x(x-a)=1-a \Leftrightarrow x^2-ax+a-1=0 \Leftrightarrow x\in\{1,a-1\}$.

Din $x(x-a)=\frac{2(1+a)}{1-a} \Leftrightarrow x^2-ax+\frac{2(1+a)}{a-1}=0$, $\Delta=a^2-\frac{8(a+1)}{a-1}=\frac{a^3-a^2-8a-8}{a-1}$,

discuție după $a>1$.

2). Solve in $\mathbf{R}$ the equation:

$$\frac{12}{x^2-2x-3}+\frac{5}{x^2+5x}-\frac{7}{x^2+3x-10}+1=0.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$x=1$ este soluția unică a ecuației.

Problema557.

If $x,y,z>0$, $xy+yz+zx=1$ then

$$\sum \frac{x\sqrt{x}}{yz} \geq \sum \sqrt{3x} .$$

Imad Zak, Lebanon, Mathematical Inequalities 5/2025

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{x\sqrt{x}}{yz} \overset{Cebyshev}{\geq} \frac{1}{3} \sum x\sqrt{x} \sum \frac{1}{yz} \overset{Cebyshev\&CS}{\geq} \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \sum x \sum \sqrt{x} \cdot \frac{9}{\sum yz} = \sum x \sum \sqrt{x} \overset{\sum x \geq \sqrt{3}}{\geq}$$

$$\geq \sum \sqrt{3x} = RHS .$$

Am folosit mai sus $\sum x \geq \sqrt{3}$, vezi $\left(\sum x\right)^2 \geq 3\sum xy = 3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Remarca.

1). If $x, y, z > 0$, $xy + yz + zx = 1$ then

$$\sum \frac{\sqrt{x}}{yz} \geq 3\sum \sqrt{x} .$$

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{\sqrt{x}}{yz} \overset{Cebyshev}{\geq} \frac{1}{3} \sum \sqrt{x} \sum \frac{1}{yz} \overset{Cebyshev\&CS}{\geq} \frac{1}{3} \sum \sqrt{x} \cdot \frac{9}{\sum yz} = 3\sum \sqrt{x} = RHS .$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

2). If $x, y, z > 0$, $xy + yz + zx = 1$ then

$$\sum \frac{x^2\sqrt{x}}{yz} \geq \sum \sqrt{x} .$$

3). If $x, y, z > 0$, $xy + yz + zx = 1$ then

$$\sum \frac{x^n\sqrt{x}}{yz} \geq \frac{3}{\left(\sqrt{3}\right)^n} \sum \sqrt{x} , n \in \mathbf{N} .$$

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{x^n\sqrt{x}}{yz}\overset{Cebyshev}{\geq}\frac{1}{3}\sum x^n\sqrt{x}\sum\frac{1}{yz}\overset{Cebyshev\&CS}{\geq}\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\sum x^n\sum\sqrt{x}\cdot\frac{9}{\sum yz}=\sum x^n\sum\sqrt{x}\overset{\sum x^n\geq\frac{3}{\left(\sqrt{3}\right)^n}}{\geq}$$

$$\geq\frac{3}{\left(\sqrt{3}\right)^n}\sum\sqrt{x}=RHS.$$

Am folosit $\sum x^n\overset{Holder}{\geq}\frac{\left(\sum x\right)^n}{3^{n-1}}\geq\frac{\left(\sqrt{3}\right)^n}{3^{n-1}}=\frac{3}{\left(\sqrt{3}\right)^n}$,vezi $\sum x\geq\sqrt{3}$, din $\left(\sum x\right)^2\geq 3\sum xy=3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

4). In ΔABC

$$\sum\tan^2\frac{A}{2}\sqrt{\tan\frac{A}{2}}\geq\frac{r}{p}\sum\sqrt{3\tan\frac{A}{2}}.$$

<u>Soluție.</u>

<u>Lema.</u>

If $x,y,z>0$, $xy+yz+zx=1$ then

$$\sum\frac{x\sqrt{x}}{yz}\geq\sum\sqrt{3x}.$$

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=1$.

Folosind **Lema** pentru $(x,y,z)=\left(\tan\frac{A}{2},\tan\frac{B}{2},\tan\frac{C}{2}\right)$ obținem concluzia.

5). In ΔABC

$$\sum\tan\frac{A}{2}\sqrt{\tan\frac{A}{2}}\geq\frac{3r}{p}\sum\sqrt{\tan\frac{A}{2}}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

<u>Soluție.</u>

<u>Lema.</u>

If $x,y,z>0$, $xy+yz+zx=1$ then $\sum\frac{\sqrt{x}}{yz}\geq 3\sum\sqrt{x}$.

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=1$.

Folosind **Lema** pentru $(x,y,z)=\left(\tan\frac{A}{2},\tan\frac{B}{2},\tan\frac{C}{2}\right)$ obținem concluzia.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

<u>Problema558.</u>

If $a,b,c>0$ then

$$\sum\frac{a^2}{a+b}+\frac{1}{2}\sum\sqrt{ab}\geq a+b+c.$$

Panagiotis Danousis, Greece, MathAtelier 5/2025

<u>Soluție.</u>

Folosind $\frac{a^2+b^2}{a+b}+\sqrt{ab}\geq a+b$,vezi $\sqrt{ab}\geq\frac{2ab}{a+b}$,(GM-HM)și $\sum\frac{a^2}{a+b}=\sum\frac{b^2}{a+b}\Rightarrow$

$$\Rightarrow LHS=\sum\frac{a^2}{a+b}+\frac{1}{2}\sum\sqrt{ab}=\frac{1}{2}\sum\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{1}{2}\sum\sqrt{ab}=\frac{1}{2}\sum\left(\frac{a^2+b^2}{a+b}+\sqrt{ab}\right)\geq$$

$$\geq\frac{1}{2}\sum(a+b)=\sum a=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

1). If $a,b,c,d>0$, $a+b+c+d=1$ then

$$\sum\frac{a^2}{a+b}+\frac{1}{2}\sum\sqrt{ab}\geq 1.$$

<u>Soluție.</u>

Folosind $\frac{a^2+b^2}{a+b}+\sqrt{ab}\geq a+b$,vezi $\sqrt{ab}\geq\frac{2ab}{a+b}$,(GM-HM)și $\sum\frac{a^2}{a+b}=\sum\frac{b^2}{a+b}\Rightarrow$

$$\Rightarrow LHS=\sum\frac{a^2}{a+b}+\frac{1}{2}\sum\sqrt{ab}=\frac{1}{2}\sum\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{1}{2}\sum\sqrt{ab}=\frac{1}{2}\sum\left(\frac{a^2+b^2}{a+b}+\sqrt{ab}\right)\geq$$

$\geq \frac{1}{2}\sum(a+b)=\sum a=1=RHS$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=d=\frac{1}{4}$.

2).If $a_1,a_2,...,a_n>0$, $a_1+a_2+...+a_n=1$ then

$$\sum\frac{a_1^2+a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{1}{2}\sum\sqrt{a_1a_2}\geq 1.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Folosind $\frac{a_1^2+a_2^2}{a_1+a_2}+\sqrt{a_1a_2}\geq a_1+a_2$,vezi $\sqrt{a_1a_2}\geq\frac{2a_1a_2}{a_1+a_2}$,(GM-HM)și $\sum\frac{a_1^2}{a_1+a_2}=\sum\frac{a_2^2}{a_1+a_2}\Rightarrow$

$$\Rightarrow LHS=\frac{1}{2}\sum\frac{a_1^2+a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{1}{2}\sum\sqrt{a_1a_2}=\frac{1}{2}\sum\left(\frac{a_1^2+a_1^2}{a_1+a_2}+\sqrt{a_1a_2}\right)\geq\frac{1}{2}\sum(a_1+a_2)=\sum a_1=1.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a_1=a_2=...=a_n=\frac{1}{n}$.

Problema559.

V.616. Arătați că există o infinitate de numere naturale n , astfel încât fracțiile $\frac{3n+4}{4n+3}$ să fie reductibile.

Gheorghe Stoica, Petroșani, RMT-2/2025

Soluție.

Fie d un divizor comun al numerelor $3n+4$ și $4n+3\Rightarrow d\,|\,4(3n+4)-3(4n+3)\Rightarrow$

$\Rightarrow d\,|\,7\Rightarrow$ fracția se simplifică prin 7pentru numerele $n=7k+1,k\in\mathbf{N}$.

Deducem că există o o infinitate de numere naturale n , $n=7k+1,k\in\mathbf{N}$ pentru care fracția este reductiblă prin7.

Intr-adevăr:

$$\frac{3n+4}{4n+3} \stackrel{n=7k+1}{=} \frac{3(3k+1)+4}{4((2\lambda+1)k+1)+3} = \frac{3\cdot 7k+7}{4\cdot 7k+7} = \frac{3k+1}{4k+1}.$$

Remarcă.

Fie $\lambda \in \mathbf{N}^*$ fixat. Arătați că există o infinitate de numere naturale n, astfel încât fracțiile $\frac{\lambda n+\lambda+1}{(\lambda+1)n+\lambda}$ să fie reductibile.

Marin Chirciu

Soluție.

Fie d un divizor comun al numerelor $\lambda n+\lambda+1$ și $(\lambda+1)n+\lambda \Rightarrow$

$\Rightarrow d \mid (\lambda+1)(\lambda n+\lambda+1)-\lambda((\lambda+1)n+\lambda) \Rightarrow$

$\Rightarrow d \mid 2\lambda+1 \Rightarrow$ fracția se simplifică prin $2\lambda+1$ pentru numerele $n=(2\lambda+1)k+1, k\in\mathbf{N}$.

Deducem că există o o infinitate de numere naturale n, $n=(2\lambda+1)k+1, k\in\mathbf{N}$ pentru care fracția este reductiblă prin $2\lambda+1$.

Intr-adevăr:

$$\frac{\lambda n+\lambda+1}{(\lambda+1)n+\lambda} \stackrel{n=(2\lambda+1)k+1}{=} \frac{\lambda((2\lambda+1)k+1)+\lambda+1}{(\lambda+1)((2\lambda+1)k+1)+\lambda} = \frac{\lambda(2\lambda+1)k+(2\lambda+1)}{(\lambda+1)(2\lambda+1)k+(2\lambda+1)} = \frac{\lambda k+1}{(\lambda+1)k+1}.$$

Problema560.

VI.609. Determinați numerele x, y, z ,care verifică egalitățile:

$$\frac{x}{3}=\frac{y}{4}, y=\frac{z}{2} \text{ și } 3x+4y+5z=65.$$

Nicolae Ivășchescu, Canada, RMT-2/2025

Soluție.

Obținem $\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{8}=k \Rightarrow (x,y,z)=(3k,4k,8k)$ și $3x+4y+5z=65 \Rightarrow 65k=65 \Rightarrow k=1$.

Rezultă că $(x,y,z)=(3,4,8)$

Remarca.

Fie $\lambda \in \mathbf{N}$ fixat. Determinați numerele x, y, z ,care verifică egalitățile:

$$\frac{x}{3}=\frac{y}{4},\ y=\frac{z}{2} \text{ și } 3x+4y+5z=65\lambda .$$

Marin Chirciu

Soluție.

Obținem $\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{8}=k \Rightarrow (x,y,z)=(3k,4k,8k)$ și $3x+4y+5z=65 \Rightarrow 65k=65\lambda \Rightarrow k=\lambda$.

Rezultă că $(x,y,z)=(3\lambda,4\lambda,8\lambda)$

Problema561.

If $M \in Int(\Delta ABC)$, d_a, d_b, d_c -distances of point M to the sides BC, CA, AB then

$$\prod\left(\frac{a^2b^4}{h_a d_a}+2\right)\geq 432F^2 .$$

D.M.Bătinețu-Giurgiu, Daniel Sitaru,RNN 5/2025

Remarcă.

If $M \in Int(\Delta ABC)$, d_a, d_b, d_c -distances of point M to the sides BC, CA, AB then

$$\prod\left(\frac{a^2b^4}{h_a d_a}+\lambda\right)\geq 144\lambda^2F^2 .$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema.

Inegalitatea lui Arkady Alt.

If $x, y, z, t > 0$ then

$$\left(x^2+t^2\right)\left(y^2+t^2\right)\left(z^2+t^2\right)\geq \frac{3}{4}t^4\left(x+y+z\right)^2 .$$

Arkady Alt ,USA

$$LHS=\prod\left(\frac{a^2b^4}{h_ad_a}+\lambda\right)=\prod\left(\frac{a^4b^4}{ah_a\cdot ad_a}+\lambda\right)=\prod\left(\frac{a^4b^4}{2F\cdot 2F_1}+\lambda\right)=\prod\left(\frac{a^4b^4}{4FF_1}+\lambda\right)\overset{Lema}{\geq}$$

$$\overset{Lema}{\geq}\frac{3}{4}\left(\sqrt{\lambda}\right)^4\left(\sum\frac{a^2b^2}{2\sqrt{FF_1}}\right)^2=\frac{3}{4}\lambda^2\cdot\frac{1}{4F}\left(\sum\frac{a^2b^2}{\sqrt{F_1}}\right)^2\overset{CS}{\geq}\frac{3\lambda^2}{16F}\left(\frac{\left(\sum ab\right)^2}{\sum\sqrt{F_1}}\right)^2\overset{Gordon}{\geq}\frac{3\lambda^2}{16F}\left(\frac{\left(4F\sqrt{3}\right)^2}{\sum\sqrt{F_1}}\right)^2=$$

$$=\frac{3\lambda^2}{16F}\left(\frac{48F^2}{\sum\sqrt{F_1}}\right)^2\overset{CBS}{\geq}\frac{3\lambda^2}{16F}\left(\frac{48F^2}{\sqrt{3\sum F_1}}\right)^2=\frac{3\lambda^2}{16F}\left(\frac{48F^2}{\sqrt{3F}}\right)^2=\frac{3\lambda^2}{16F}\cdot\frac{48^2F^4}{3F}=144\lambda^2F^2.$$

Problema562.

Evaluate

$$\tan 10^\circ+\csc 40^\circ.$$

Sanong Huayrerai, Math 5/2025

Soluție.

$$\tan 10^\circ+\csc 40^\circ=\frac{\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}+\frac{1}{\sin 40^\circ}=\frac{\cos 80^\circ}{\sin 80^\circ}+\frac{2\cos 40^\circ}{2\cos 40^\circ\sin 40^\circ}=\frac{\cos 80^\circ}{\sin 80^\circ}+\frac{2\cos 40^\circ}{\sin 80^\circ}=$$

$$=\frac{\cos 80^\circ+2\cos 40^\circ}{\sin 80^\circ}=\frac{\cos 80^\circ+\cos 40^\circ+\cos 40^\circ}{\sin 80^\circ}=\frac{2\cos 60^\circ\cos 20^\circ+\cos 40^\circ}{\sin 80^\circ}=\frac{\cos 20^\circ+\cos 40^\circ}{\sin 80^\circ}=$$

$$=\frac{2\cos 30^\circ\cos 10^\circ}{\cos 10^\circ}=2\cos 30^\circ=\sqrt{3}.$$

Remarcă.

Evaluate

$$\cot 80^\circ+\sec 50^\circ.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$\cot 80^\circ+\sec 50^\circ=\sqrt{3}$.

.**Problema563.**

If $a,b,c>0$ then

$$\sum a^2\geq abc\sum\frac{1}{\sqrt{ab}}.$$

Panagiotis Danousis, Greece, MathAtelier 5/2025

Soluție.

Cu substituția $(x,y,z)=(\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c})$ inegalitatea se scrie $\sum x^4 \ge x^2y^2z^2\sum\frac{1}{xy} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sum x^4 \ge xyz\sum x$, care rezultă din $\sum x^4 \overset{SOS}{\ge} \sum x^2y^2 \overset{SOS}{\ge} \sum xy\cdot xz = xyz\sum x$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

Remarca.

1). If $a,b,c,d>0$, $abcd=1$ then

$$\sum a^2 \ge \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}.$$

2). If $a_1,a_2,...,a_n>0$, $a_1a_2...a_n=1$ then

$$\sum a_1^2 \ge \sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+...+\sqrt{a_n}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Cu substituția $(x_1,x_2,...,x_n)=(\sqrt{a_1},\sqrt{a_2},...,\sqrt{a_n})$ inegalitatea se scrie $\sum x_1^4 \ge \sum x_1$, $x_1x_2...x_n=1$,

care rezultă din $\sum x_1^4 \overset{Holder}{\ge} \frac{\left(\sum x_1\right)^4}{4^3}=\left(\frac{\sum x_1}{4}\right)^3\sum x_1 \overset{AG}{\ge}\left(\sqrt[n]{x_1x_2...x_n}\right)^3\sum x_1=\sum x_1$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a_1=a_2=...=a_n=1$.

Problema564.

In ΔABC

$$\sum\frac{a\cdot w_a^2}{p^2(p-a)}\le 2.$$

GM-4/1988

Soluție.

Lema.

In ΔABC

$$\sum \frac{a \cdot w_a^2}{p^2(p-a)} = 16Rr \sum \frac{1}{(b+c)^2}.$$

$$LHS = \sum \frac{a \cdot w_a^2}{p^2(p-a)} = 16Rr \sum \frac{1}{(b+c)^2} \overset{AG}{\leq} 16Rr \sum \frac{1}{4bc} = 4Rr \cdot \frac{2p}{4Rrp} = 2.$$

Remarcă.

In ΔABC

$$54r^2 \leq \sum \frac{a \cdot w_a^2}{p-a} \leq 2p^2.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosim inegalitatea lui Gerretsen și $\sum \frac{a \cdot w_a^2}{p^2(p-a)} = 16Rr \sum \frac{1}{(b+c)^2}$

Problema565.

In acute\ ΔABC

$$\frac{\left(\sum a^2\right)^3}{216a^2b^2c^2} \geq \prod \cos A.$$

GM-4/1988

Soluție.

Folosind $\prod \cos A = \frac{p^2 - (2R+r)^2}{4R^2}$, $\sum a^2 = 2(p^2 - r^2 - 4Rr)$ și $abc = 4Rrp$,avem:

$$\frac{\left(2(p^2 - r^2 - 4Rr)\right)^3}{216 \cdot (4Rrp)^2} \geq \frac{p^2 - (2R+r)^2}{4R^2} \Leftrightarrow \left(2(p^2 - r^2 - 4Rr)\right)^3 \geq 54 \cdot (4rp)^2 \left(p^2 - (2R+r)^2\right) \Leftrightarrow$$

$$8(p^2 - r^2 - 4Rr)^3 \geq 54 \cdot 16r^2p^2\left(p^2 - (2R+r)^2\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (p^2 - r^2 - 4Rr)^3 \geq 108r^2p^2\left(p^2 - (2R+r)^2\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p^6 - 3p^4(4Rr + 37r^2) + 3p^2r^2(160R^2 + 152Rr + 37r^2) \geq r^3(4R+r)^3,$$

care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \geq 16Rr - 5r^2$.

Problema567.

In ΔABC

$$\prod \frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{B+C}{2}} \geq 8.$$

GM-7/1988

Soluție.

Folosind $\frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{B+C}{2}} = \frac{b+c}{a}$, inegalitatea se scrie: $\prod \frac{b+c}{a} \geq 8$, (Cesaro).

Remarcă.

In ΔABC

$$\sum \frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{B+C}{2}} \geq 6.$$

Marin Chirciu

Folosind $\frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{B+C}{2}} = \frac{b+c}{a}$, inegalitatea se scrie: $\sum \frac{b+c}{a} \geq 6$ veziAM-GM.

Remarcă.

In ΔABC

$$\sum \frac{\cos\frac{B+C}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}} \geq \frac{3}{2}.$$

Marin Chirciu

Folosind $\frac{\cos\frac{B+C}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}} = \frac{a}{b+c}$, inegalitatea se scrie: $\sum \frac{a}{b+c} \geq \frac{3}{2}$, vezi Nesbitt.

Problema568.

In ΔABC

$$OI \geq R\sin\frac{B-C}{2}.$$

RMT-4/1987

Soluție.

Folosind $OI=\sqrt{R(R-2r)}$, inegalitatea se scrie:

$$\sqrt{R(R-2r)} \geq R\sin\frac{B-C}{2} \Leftrightarrow R(R-2r) \geq R^2\sin^2\frac{B-C}{2} \Leftrightarrow R-2r \geq R\sin^2\frac{B-C}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow R-2r \geq R\left(1-\cos^2\frac{B-C}{2}\right) \Leftrightarrow R-2r \geq R-R\cos^2\frac{B-C}{2} \Leftrightarrow \cos^2\frac{B-C}{2} \geq \frac{R}{2r}$$, inegalitate cunoscută.

Problema569.

In ΔABC

$$\sum(p-a)^2 \geq \frac{p^2}{3}.$$

M.Ganga, Teoreme...

Soluție.

Folosim $\sum(p-a)^2 = p^2-2r^2-8Rr$ inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \geq 16Rr-5r^2$.

Problema570.

In ΔABC

$$\frac{2p^2}{3R} \leq 4R+r \leq \frac{p^2}{3r}.$$

GM-8/1984

Soluție.

Se folosește inegalitatea lui Gerretsen.

Problema571.

In ΔABC

$$9r\left(4R+r\right)\leq 3p^2\leq\left(4R+r\right)^2 .$$

Vraja geometriei demodate, Viorel Gh.Vodă

Soluţie.

Se folosește inegalitatea lui Gerretsen.

Problema572.

In ΔABC

$$\frac{1}{3}\sum\frac{1}{h_a}\geq\sqrt[3]{\frac{R}{2F^2}} .$$

Vraja geometriei demodate, Viorel Gh.Vodă

Soluţie.

Folosind identitatea $\sum\frac{1}{h_a}=\frac{1}{r}$, inegalitatea se scrie:

$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{r}\geq\sqrt[3]{\frac{R}{2F^2}}\Leftrightarrow\frac{1}{27r^3}\geq\frac{R}{2F^2}\Leftrightarrow\frac{1}{27r^3}\geq\frac{R}{2p^2r^2}\Leftrightarrow\frac{1}{27r}\geq\frac{R}{2p^2}\Leftrightarrow 2p^2\geq 27Rr$,(Coșniță).

Problema573.

In ΔABC

$$\sum\frac{ar_a}{h_a}\geq 2p .$$

GM-4/1967

Soluţie.

Se folosește inegalitatea lui Euler și $\sum\frac{ar_a}{h_a}=\frac{2p\left(R-r\right)}{r}$.

Remarca.

In ΔABC

$$\sum\frac{ar_a}{h_a}\geq\sum\frac{ah_a}{r_a} .$$

Marin Chirciu

Folosind $\sum\frac{ar_a}{h_a}=\frac{2p(R-r)}{r}$ și $\sum\frac{ah_a}{r_a}=2p$, avem: $\frac{2p(R-r)}{r}\geq 2p \Leftrightarrow R\geq 2r$,(Euler).

Problema574.

In ΔABC

$$abcr_ar_br_c\leq (Rp)^3.$$

GM-6/1968

Soluție.

Folosim $\prod r_a=rp^2$ și $abc=4Rrp$ și inegalitatea lui Euler.

Remarca.

In ΔABC

$$(2rp)^3\leq abcr_ar_br_c\leq (Rp)^3.$$

Soluție.

Folosim $\prod r_a=rp^2$ și $abc=4Rrp$ și inegalitatea lui Euler.

Problema575.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=3$ then

$$\sum\frac{x}{\sqrt{x+2y+6yz}}\geq 1.$$

Konstantinos Geronikolas, Greece, Mathematical Inequalities 5/2025

Remarca.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=3$ and $\lambda\geq 0$ then

$$\sum\frac{x}{\sqrt{x+2y+\lambda yz}}\geq\frac{3}{\sqrt{\lambda+3}}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{x}{\sqrt{x+2y+\lambda yz}}=\sum\frac{x^2}{x\sqrt{x+2y+\lambda yz}}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum x\right)^2}{\sum x\sqrt{x+2y+\lambda yz}}=\frac{\left(\sum x\right)^2}{\sum\sqrt{x}\sqrt{x^2+2xy+\lambda xyz}}\overset{CBS}{\geq}$$

$$\overset{CBS}{\geq}\frac{\left(\sum x\right)^2}{\sqrt{\sum x\sum\left(x^2+2xy+\lambda xyz\right)}}=\frac{\left(\sum x\right)^2}{\sqrt{\sum x\left(\sum x^2+2\sum xy+3\lambda xyz\right)}}\overset{pqr-Method}{=}\frac{p^2}{\sqrt{p\left(p^2+3\lambda r\right)}}\overset{p=3,r\leq 1}{\geq}$$

$$\overset{p=3,r\leq 1}{\geq}\frac{3^2}{\sqrt{3\left(3^2+3\lambda\cdot 1\right)}}=\frac{3}{\sqrt{\lambda+3}}=RHS\ .$$

Am folosit mai sus pqr -Method: $p=\sum x=3, q=\sum xy, r=xyz\leq 1$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1$.

Problema576.

In ΔABC

$$24\sqrt{3}Rr\leq\sum II_a\cdot I_bI_c\leq 12\sqrt{3}R^2\ .$$

Nguyen Viet Hung, Vietnam,Mathematical Inequalites, 5/2025

Soluție.

Folosim inegalitatea lui Mitrinovic și $\sum II_a\cdot I_bI_c=8Rp$

Remarcă.

1). In ΔABC

$$\sqrt{3}\leq\sum\frac{II_a}{I_bI_c}\leq\sqrt{3}\frac{R}{2r}\ .$$

Soluție.

Folosim $\sum\frac{II_a}{I_bI_c}=\frac{4R+r}{p}$ și inegalitatea lui Euler.

Remarcă.

2). In ΔABC

$$3\sqrt{3}\leq\sum\frac{I_bI_c}{II_a}\leq 3\sqrt{3}\frac{R}{2r}\ .$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Folosim inegalitatea lui Mitrinovic și $\sum \frac{II_a}{I_b I_c} = \frac{4R+r}{p}$

Problema577.

If $a,b>0$ then

$$a^2+b^2+\frac{2}{a^2}+\frac{2}{b^2}+2ab(a+b)+\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}\ge 12.$$

Imad Zak, Lebanon, Mathematical Inequalities 5/2025

Soluție.

$$LHS = a^2+b^2+\frac{2}{a^2}+\frac{2}{b^2}+2ab(a+b)+\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}\overset{AG}{\ge} 12\sqrt[12]{a^2\cdot b^2\cdot\left(\frac{1}{a^2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{b^2}\right)^2\cdot\left(a^2b\right)^2\cdot\left(ab^2\right)^2\cdot\frac{1}{a^4}\cdot\frac{1}{b^4}} =$$

$$=12=RHS$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=1$.

Remarca.

If $a,b>0$ and $n\in\mathbf{N}$ then

$$a^2+b^2+\frac{n}{a^2}+\frac{n}{b^2}+nab(a+b)+\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}\ge 4(n+1).$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS = a^2+b^2+\frac{n}{a^2}+\frac{n}{b^2}+nab(a+b)+\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}\overset{AG}{\ge}$$

$$\overset{AG}{\ge} 4(n+1)\sqrt[4(n+1)]{a^2\cdot b^2\cdot\left(\frac{1}{a^2}\right)^n\cdot\left(\frac{1}{b^2}\right)^n\cdot\left(a^2b\right)^n\cdot\left(ab^2\right)^n\cdot\frac{1}{a^4}\cdot\frac{1}{b^4}} = 4(n+1)=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=1$.

Problema578.

If $a,b,c,d>0$, $\frac{a}{a+d}+\frac{b}{b+d}+\frac{c}{c+d}=1$ then

$$\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\le\frac{3d}{2}.$$

Crăciun Gheorghe, Mathematical Inequalities 5/2025

Soluție.

$$1=\frac{a}{a+d}+\frac{b}{b+d}+\frac{c}{c+d}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum\sqrt{a}\right)^2}{\sum(a+d)}=\frac{\left(\sum\sqrt{a}\right)^2}{\sum a+3d}\Rightarrow 1\geq\frac{\left(\sum\sqrt{a}\right)^2}{\sum a+3d}\Leftrightarrow\sum a+3d\geq\left(\sum\sqrt{a}\right)^2\Leftrightarrow$$

$$\sum a+3d\geq\sum a+2\sum\sqrt{ab}\Leftrightarrow 3d\geq 2\sum\sqrt{ab}\Leftrightarrow\sum\sqrt{ab}\leq\frac{3d}{2}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=\frac{d}{2}$.

Remarca.

If $a_1,a_2,...,a_n,\lambda>0, n\geq 2$, $\frac{a_1}{a_1+\lambda}+\frac{a_2}{a_2+\lambda}+...+\frac{a_n}{a_n+\lambda}=1$ then

$$\sum_{i<j}\sqrt{a_ia_j}\leq\frac{n\lambda}{2}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$1=\frac{a_1}{a_1+\lambda}+\frac{a_2}{a_2+\lambda}+...+\frac{a_n}{a_n+\lambda}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum\sqrt{a_1}\right)^2}{\sum(a_1+\lambda)}=\frac{\left(\sum\sqrt{a_1}\right)^2}{\sum a_1+n\lambda}\Rightarrow 1\geq\frac{\left(\sum\sqrt{a_1}\right)^2}{\sum a_1+n\lambda}\Leftrightarrow$$

$$\sum a_1+n\lambda\geq\left(\sum\sqrt{a_1}\right)^2\Leftrightarrow\sum a_1+n\lambda\geq\sum a_1+2\sum\sqrt{a_1a_2}\Leftrightarrow\sum\sqrt{a_1a_2}\leq\frac{n\lambda}{2}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a_1=a_2=...=a_n=\frac{\lambda}{n-1}$.

Problema579.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=1$ then

$$\sum\frac{x}{(y+z)^2}\geq\frac{9}{4}.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam, RMM 5/2025

Remarca.

1). If $x,y,z>0$, $x+y+z=1$ and $\lambda\geq 0$ then

$$\sum\frac{x}{(y+\lambda z)^2}\geq\frac{9}{(\lambda+1)^2}.$$

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{x}{(y+\lambda z)^2}=\sum\frac{\left(\frac{x}{y+\lambda z}\right)^2}{x}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum\frac{x}{y+\lambda z}\right)^2}{\sum x}\overset{Nesbitt}{\geq}\frac{\left(\frac{3}{\lambda+1}\right)^2}{1}=\frac{9}{(\lambda+1)^2}=RHS\ .$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=\frac{1}{3}$.

2). In ΔABC

$$\sum\frac{1}{r_a\left(\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right)^2}\geq\frac{9r}{4}.$$

Soluție.

Lemă.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=1$ then $\sum\frac{x}{(y+z)^2}\geq\frac{9}{4}$.

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum\frac{r}{r_a}=1$.

Folosind **Lema** pentru $(x,y,z)=\left(\frac{r}{r_a},\frac{r}{r_b},\frac{r}{r_c}\right)$ obținem concluzia.

Remarca.

In ΔABC

$$\sum\frac{1}{h_a\left(\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)^2}\geq\frac{9r}{4}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Lemă.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=1$ then $\sum\frac{x}{(y+z)^2}\geq\frac{9}{4}$.

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum \frac{r}{h_a} = 1$.

Folosind **Lema** pentru $(x, y, z) = \left(\frac{r}{h_a}, \frac{r}{h_b}, \frac{r}{h_c} \right)$ obținem obținem concluzia.

Problema580

X.605. Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația:

$$3^{3x+6} \cdot 25^{\frac{2x+3}{x+2}} = 45$$

Mihaly Bencze, Brașov, RMT-2/2025

Soluție.

$$3^{3x+6} \cdot 5^{\frac{2(2x+3)}{x+2}} = 3^2 \cdot 5 \Leftrightarrow \frac{3^{3x+6}}{3^2} \cdot \frac{5^{\frac{2(2x+3)}{x+2}}}{5} = 1 \Leftrightarrow 3^{3x+4} \cdot 5^{\frac{2(2x+3)}{x+2}-1} = 1 \Leftrightarrow 3^{3x+4} \cdot 5^{\frac{3x+4}{x+2}} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(3 \cdot 5^{\frac{1}{x+2}} \right)^{3x+4} = 1.$$

Cazul1). $3x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-4}{3}$.

Cazul 2). $3 \cdot 5^{\frac{1}{x+2}} = 1 \Leftrightarrow 5^{\frac{1}{x+2}} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{x+2} = \log_5 \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{x+2} = -\log_5 3 \Leftrightarrow x + 2 = -\frac{1}{\log_5 3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x + 2 = -\log_3 5 \Leftrightarrow x = -2 - \log_3 5 \Leftrightarrow x = -\log_3 45$.

Mulțimea soluțiilor ecuației este $S = \left\{ \frac{-4}{3}, -\log_3 45 \right\}$.

Remarca.

Fie $a, b > 1$ fixate. Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația:

$$a^{3x+6} \cdot b^{\frac{2(2x+3)}{x+2}} = a^2 b.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Mulțimea soluțiilor ecuației este $S = \left\{ \frac{-4}{3}, -\log_a \left(a^2 b \right) \right\}$.

Problema581.

V.612. a) Arătați că $2^5+2^4+2^4$ este cub perfect.

b) Demonstrați că există o infinitate de cuburi perfectede forma $2^m+2^n+2^{3p+4}$, unde m,n,p sunt numere naturale.

Gh. Iacob, Mihaela Bisoc, Pașcani, RMT-2/2025

Soluție.

a) AAvem $2^5+2^4+2^4=64=4^3$ este cub perfect.
b) Pentru $(m,n,p)=(3p+5,3p+4,p)$, $p\in\mathbf{N}$ obținem

$$2^m+2^n+2^{3p+4}=2^{3p+5}+2^{3p+4}+2^{3p+4}=2^{3p}\left(2^5+2^4+2^4\right)=2^{3p}\cdot 64=$$

$$=2^{3p}\cdot 4^3=\left(2^p\cdot 4\right)^3=\left(2^p\cdot 2^2\right)^3=\left(2^{p+2}\right)^3.$$

Problema582.

In ΔABC

$$\sum\sec\frac{A}{2}\sum\tan\frac{A}{2}\leq\frac{3}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^2.$$

Konstantinos Geronikolas, Greece, MathAtelier 5/2025

Soluție.

$$LHS=\sum\sec\frac{A}{2}\sum\tan\frac{A}{2}\overset{(1)}{\leq}\frac{2p}{3r}\cdot\frac{4R+r}{p}=\frac{2(4R+r)}{3r}\overset{Euler}{\leq}\frac{3}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^2=RHS,$$

unde (1) rezultă din: $\sum\sec\frac{A}{2}\leq\frac{2p}{3r}$ și $\sum\tan\frac{A}{2}=\frac{4R+r}{p}$.

1). In ΔABC

$$6\leq\sum\sec\frac{A}{2}\sum\tan\frac{A}{2}\leq\frac{2}{3}\left(1+\frac{4R}{r}\right).$$

Soluție.

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum\sec\frac{A}{2}\sum\tan\frac{A}{2}\overset{(1)}{\leq}\frac{2p}{3r}\cdot\frac{4R+r}{p}=\frac{2(4R+r)}{3r}=\frac{2}{3}\left(1+\frac{4R}{r}\right),$$

unde (1) rezultă din: $\sum \sec\frac{A}{2} \le \frac{2p}{3r}$ și $\sum \tan\frac{A}{2} = \frac{4R+r}{p}$.

Inegalitatea din stânga.

$$\sum \sec\frac{A}{2}\sum \tan\frac{A}{2} \overset{(2)}{\ge} 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} = 6,$$

unde (2) rezultă din: $\sum \sec\frac{A}{2} = \sum \frac{1}{\cos\frac{A}{2}} \overset{Jensen}{\ge} 2\sqrt{3}$ și $\sum \tan\frac{A}{2} = \frac{4R+r}{p} \overset{Doucet}{\ge} \sqrt{3}$.

2). In ΔABC

$$\sqrt{6}\left(\frac{2r}{R}\right)^{\frac{1}{6}} \le \sum\sqrt{\sec\frac{A}{2}\tan\frac{A}{2}} \le \sqrt{\frac{2}{3}\left(1+\frac{4R}{r}\right)}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum\sqrt{\sec\frac{A}{2}\tan\frac{A}{2}} \overset{CBS}{\le} \sqrt{\sum\sec\frac{A}{2}\sum\tan\frac{A}{2}} \overset{(1)}{\le} \sqrt{\frac{2p}{3r}\cdot\frac{4R+r}{p}} = \sqrt{\frac{2(4R+r)}{3r}} = \sqrt{\frac{2}{3}\left(1+\frac{4R}{r}\right)},$$

unde (1) rezultă din: $\sum \sec\frac{A}{2} \le \frac{2p}{3r}$ și $\sum \tan\frac{A}{2} = \frac{4R+r}{p}$.

Inegalitatea din stânga.

$$\sum\sqrt{\sec\frac{A}{2}\tan\frac{A}{2}} \overset{AG}{\ge} 3\sqrt[3]{\prod\sqrt{\sec\frac{A}{2}\tan\frac{A}{2}}} = 3\sqrt[6]{\prod\sec\frac{A}{2}\tan\frac{A}{2}} = 3\sqrt[6]{\frac{\prod\sin\frac{A}{2}}{\prod\cos^2\frac{A}{2}}} = 3\sqrt[6]{\frac{\frac{r}{4R}}{\frac{p^2}{16R^2}}} =$$

$$= 3\sqrt[6]{\frac{4Rr}{p^2}} \overset{AG}{\ge} 3\sqrt[6]{\frac{4Rr}{\frac{27R^2}{4}}} = 3\sqrt[6]{\frac{16r}{27R}} = 3\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt[6]{\frac{2r}{R}} = \sqrt{6}\sqrt[6]{\frac{2r}{R}} = \sqrt{6}\left(\frac{2r}{R}\right)^{\frac{1}{6}}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Problema583.

Solve for real numbers the equation

$$\frac{x+4}{\sqrt{x}}+\frac{4(y+9)}{\sqrt{y}}+\frac{z+2}{\sqrt{z-2}}=32 .$$

Panagiotis Danousis, Greece, MatAtelier 5/2025

Soluție.

Ecuația admite soluția unică $(x,y,z)=(4,9,6)$.

1). Let be $a,b,c,\lambda>0$ fixed. Solve for real numbers the equation

$$\frac{x+a^2}{\sqrt{x}}+\frac{\lambda(y+b^2)}{\sqrt{y}}+\frac{z+c^2-c}{\sqrt{z-c}}=2(a+\lambda b+c).$$

Soluție.

Ecuația are sens pentru $x>0, y>0, z>2$.

$$LHS=\frac{x+a^2}{\sqrt{x}}+\frac{\lambda(y+b^2)}{\sqrt{y}}+\frac{z+2}{\sqrt{z-2}}\overset{(1)}{\geq}2a+2\lambda b+2c=2(a+\lambda b+c)=RHS$$, vezi:

1). $\frac{x+a^2}{\sqrt{x}}\geq 2a \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-a\right)^2\geq 0$, cu egal pentru $x=a^2$;

2). $\frac{\lambda(y+b^2)}{\sqrt{y}}\geq 2\lambda b \Leftrightarrow \left(\sqrt{y}-b\right)^2\geq 0$, cu egal pentru $y=b^2$;

3). $\frac{z+c^2-c}{\sqrt{z-c}}\geq 2c \Leftrightarrow \left(\sqrt{z-c}-c\right)^2\geq 0$, cu egal pentru $z=c^2+c$;

Deducem că ecuația admite soluția unică $(x,y,z)=(a^2,b^2,c^2+c)$.

Remarcă.

Cazul $(a,b,c)=(1,2,3)$.

2). Let be $\lambda>0$ fixed. Solve for real numbers the equation

$$\frac{x+1}{\sqrt{x}}+\frac{\lambda(y+4)}{\sqrt{y}}+\frac{z+6}{\sqrt{z-3}}=4(\lambda+2).$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Ecuația admite soluția unică $(x,y,z)=(1,4,12)$.

Problema584.

In ΔABC

$$\sum\frac{1}{m_am_b}\ge\frac{2\sqrt{3}}{Rp}.$$

Dang Ngoc Minh, Vietnam, RMM 5/2025

Soluție.

$$LHS^2=\left(\sum\frac{1}{m_am_b}\right)^2\overset{(1)}{\ge}\frac{27}{\sum m_a^2m_b^2}\overset{(2)}{=}\frac{27}{\frac{9}{16}\sum a^2b^2}\overset{Goldstone}{\ge}\frac{27}{\frac{9}{16}\cdot 4R^2p^2}=\frac{12}{R^2p^2}=RHS^2,$$

unde (1) rezultă din: $\left(\sum\frac{1}{x}\right)^2\ge\frac{27}{\sum x^2}$, vezi $\sum\frac{1}{x}\sum\frac{1}{x}\sum x^2\overset{Holder}{\ge}\left(\sum 1\right)^3=27$, pentru $x=m_am_b$.

Remarcă.

1). In ΔABC

$$\sum\frac{1}{w_aw_b}\ge\frac{2\sqrt{3}}{Rp}.$$

Soluție.

$$LHS^2=\left(\sum\frac{1}{w_aw_b}\right)^2\overset{(1)}{\ge}\frac{27}{\sum w_a^2w_b^2}\overset{m_a\ge w_a}{\ge}\frac{27}{\sum m_a^2m_b^2}\overset{(2)}{=}\frac{27}{\frac{9}{16}\sum a^2b^2}\overset{Goldstone}{\ge}\frac{27}{\frac{9}{16}\cdot 4R^2p^2}=\frac{12}{R^2p^2}=RHS^2.$$

2). In ΔABC

$$\sum\frac{1}{s_as_b}\ge\frac{2\sqrt{3}}{Rp}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS^2=\left(\sum\frac{1}{s_as_b}\right)^2\overset{(1)}{\ge}\frac{27}{\sum s_a^2s_b^2}\overset{m_a\ge w_a}{\ge}\frac{27}{\sum m_a^2m_b^2}\overset{(2)}{=}\frac{27}{\frac{9}{16}\sum a^2b^2}\overset{Goldstone}{\ge}\frac{27}{\frac{9}{16}\cdot 4R^2p^2}=\frac{12}{R^2p^2}=RHS^2.$$

Problema585.

In acute ΔABC

$$\sum \sqrt{rr_a \cot A} \leq \frac{3R^2}{4r^2} \sqrt[4]{3}.$$

Konstantinos Geronikolas,RMM 5/2025

Soluție.

$$LHS = \sum \sqrt{rr_a \cot A} \overset{CBS}{\leq} \sqrt{\sum rr_a \sum \cot A} \overset{(1)}{\leq} \sqrt{\frac{9R^2}{4} \cdot \sqrt{3}\left(\frac{R}{2r}\right)^2} = \frac{3R^2}{4r^2} \sqrt[4]{3} = RHS$$, vezi:

1). $\sum rr_a \leq \frac{9R^2}{2}$, vezi $\sum rr_a \leq \sum \frac{a^2}{4} \overset{Leibniz}{\leq} \frac{9R^2}{4}$;

2). $\sum \cot A \leq \sqrt{3}\left(\frac{R}{2r}\right)^2$, vezi $\sum \cot A = \frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{2pr} \overset{Gerretsen}{\leq} \frac{4R^2 + 4Rr + 3r^2 - r^2 - 4Rr}{2pr} =$

$$= \frac{2R^2 + r^2}{pr} \overset{Euler}{\leq} \overset{Euler}{\leq} \frac{9R^2}{4pr} \overset{Mitrinovic}{\leq} \sqrt{3}\left(\frac{R}{2r}\right)^2.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

In acute ΔABC

$$\sum \sqrt{rr_a \cos A} \leq \frac{3R}{2} \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Marin Chirciu

Problema586.

VIII.608. If $a, b, c \in \mathbf{N}^*$, $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = 1$ then

$$\sqrt{\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)\left(c^2+1\right)} \in \mathbf{Q}.$$

Mihai Vijdeluc, Baia Mare, RMT-2/2025

Soluție.

$$\sqrt{\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)\left(c^2+1\right)} = abc\sqrt{\left(\frac{1}{a^2}+1\right)\left(\frac{1}{b^2}+1\right)\left(\frac{1}{c^2}+1\right)} =$$

$$=abc\sqrt{\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)}=$$

$$=abc\sqrt{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{b}\right)}=$$

$$=abc\sqrt{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)^2\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}=abc\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=$$

$$=\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}\in\mathbf{Q}.$$

Remarca.

If $x,y,z\in\mathbf{N}^*$, $x+y+z=1$ then

$$\sqrt{\left(\frac{x}{yz}+1\right)\left(\frac{y}{zx}+1\right)\left(\frac{z}{xy}+1\right)}\in\mathbf{Q}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$\sqrt{\left(\frac{x}{yz}+1\right)\left(\frac{y}{zx}+1\right)\left(\frac{z}{xy}+1\right)}=\frac{1}{xyz}\sqrt{(x+yz)(y+zx)(z+xy)}=$$

$$=\frac{1}{xyz}\sqrt{\big(x(x+y+z)+yz\big)\big(y(x+y+z)+zx\big)\big(z(x+y+z)+xy\big)}=$$

$$=\frac{1}{xyz}\sqrt{(x+y)(x+z)(y+z)(y+x)(z+y)(z+x)}=\frac{1}{xyz}\sqrt{(x+y)^2(x+z)^2(y+z)^2}=$$

$$=\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}\in\mathbf{Q}.$$

Problema587.

If $x,y>0$ $x+y+xy=x^2+y^2$ then

$$\frac{x}{y+\lambda xy}+\frac{y}{x+\lambda xy}\geq\frac{2}{1+2\lambda}.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam, RMM 5/2025

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{x}{y+2xy}=\sum\frac{x^2}{xy+2x^2y}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum x\right)^2}{\sum\left(xy+2x^2y\right)}=\frac{\left(\sum x\right)^2}{2xy+2xy\left(x+y\right)}\overset{AG}{\geq}$$

$$\overset{AG}{\geq}\frac{\left(\sum x\right)^2}{\frac{1}{2}\left(\sum x\right)^2+\frac{1}{2}\left(\sum x\right)^2\sum x}=\frac{t^2}{\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}t^2\cdot t}=\frac{2}{t+1}\overset{t\leq 4}{\geq}\frac{2}{4+1}=\frac{2}{5}=RHS\ ,$$

unde $t\leq 4\Leftrightarrow x+y\leq 4$, vezi:

$$x+y+xy=x^2+y^2\Leftrightarrow x+y+xy=\left(x+y\right)^2-2xy\Leftrightarrow x+y+3xy=\left(x+y\right)^2.$$

$$t^2=t+3xy\overset{AG}{\leq}t+3\frac{\left(x+y\right)^2}{4}=t+3\frac{t^2}{4}\Rightarrow t^2\leq t+\frac{3t^2}{4}\Leftrightarrow 4t^2\leq 4t+3t^2\Leftrightarrow t^2\leq 4t\Leftrightarrow t\leq 4.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=2$.

Remarca.

If $x,y>0$ $x+y+xy=x^2+y^2$ and $\lambda\geq 0$ then

$$\sum\frac{x}{y+\lambda xy}\geq\frac{2}{1+2\lambda}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{x}{y+\lambda xy}=\sum\frac{x^2}{xy+\lambda x^2y}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum x\right)^2}{\sum\left(xy+\lambda x^2y\right)}=\frac{\left(\sum x\right)^2}{2xy+\lambda xy\left(x+y\right)}\overset{AG}{\geq}$$

$$\overset{AG}{\geq}\frac{\left(\sum x\right)^2}{\frac{1}{2}\left(\sum x\right)^2+\lambda\cdot\frac{1}{4}\left(\sum x\right)^2\sum x}=\frac{t^2}{\frac{1}{2}t^2+\lambda\cdot\frac{1}{4}t^2\cdot t}=\frac{4}{2+\lambda t}\overset{t\leq 4}{\geq}\frac{2}{1+2\lambda}=RHS\ .$$

Problema588.

If $a,b,c>0$ and $abc\geq 1$ then

$$\sum\frac{a^4+b}{a+b^2}\geq 1.$$

Nguyen Viet Hung, Vietnam, Mathematical Inequalities 5/2025

Remarca.

If $a,b,c>0$, $abc\geq 1$ and $\lambda\geq 1$ then

$$\sum\frac{a^4+b}{\lambda a+b^2}\geq\frac{6}{\lambda+1}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$\sum\frac{a^4+b}{a+b^2}=\sum\frac{\left(a^2\right)^2+\left(\sqrt{b}\right)^2}{\lambda a+b^2}\overset{CS}{\geq}\sum\frac{\frac{\left(a^2+\sqrt{b}\right)^2}{2}}{\lambda a+b^2}=\frac{1}{2}\sum\frac{\left(a^2+\sqrt{b}\right)^2}{\lambda a+b^2}\overset{CS}{\geq}\frac{1}{2}\frac{\left(\sum\left(a^2+\sqrt{b}\right)\right)^2}{\sum\left(\lambda a+b^2\right)}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\left(\sum a^2+\sum\sqrt{a}\right)^2}{\lambda\sum a+\sum a^2}\overset{AG}{\geq}\frac{1}{2}\frac{\left(\sum a^2+3\sqrt[3]{\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}}\right)^2}{\lambda\sum a+\sum a^2}\overset{abc\geq 1}{\geq}\frac{1}{2}\frac{\left(\sum a^2+3\right)^2}{\lambda\sum a+\sum a^2}\overset{(1)}{\geq}\frac{6}{\lambda+1}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Problema589.

If $a,b,c,d\geq 0$ and $abcd=1$ then

$$\left(\sqrt{1+a}+\sqrt{1+b}\right)\left(\sqrt{1+c}+\sqrt{1+d}\right)\geq 8.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam, RMM 5/2025

Soluție.

$$\left(\sqrt{1+a}+\sqrt{1+b}\right)\left(\sqrt{1+c}+\sqrt{1+d}\right)=\sqrt{(1+a)(c+1)}+\sqrt{(1+a)(d+1)}+\sqrt{(1+b)(c+1)}+$$

$$+\sqrt{(1+b)(d+1)}\overset{CBS}{\geq}\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)+\left(\sqrt{a}+\sqrt{d}\right)+\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)+\left(\sqrt{b}+\sqrt{d}\right)=$$

$$=2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)\overset{AG}{\geq}2\cdot 4\sqrt[4]{\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}\sqrt{d}}=8=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=d=1$.

Remarca.

If $a,b,c,d\geq 0$ and $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=4$ then

$$\left(\sqrt{1+a}+\sqrt{1+b}\right)\left(\sqrt{1+c}+\sqrt{1+d}\right)\geq 8.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$\left(\sqrt{1+a}+\sqrt{1+b}\right)\left(\sqrt{1+c}+\sqrt{1+d}\right)=\sqrt{(1+a)(c+1)}+\sqrt{(1+a)(d+1)}+\sqrt{(1+b)(c+1)}+$$

$$+\sqrt{(1+b)(d+1)}\overset{CBS}{\geq}\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)+\left(\sqrt{a}+\sqrt{d}\right)+\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)+\left(\sqrt{b}+\sqrt{d}\right)=$$

$$=2\sum\sqrt{a}\overset{GH}{\geq}2\sum\frac{2}{\frac{1}{a}+1}\overset{CS}{\geq}4\frac{(1+1+1+1)^2}{\sum\left(\frac{1}{a}+1\right)}=\frac{4\cdot 16}{\sum\frac{1}{a}+4}=\frac{64}{4+4}=8=RHS .$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=d=1$.

Problema590.

If $a,b,c,d\geq 0$ and $a^2+b^2+c^2+d^2=1$ then

$$(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)\geq abcd .$$

Elton Papanikolla,MathOlymp, 5/2025

Soluție.

Lema.

If $a,b,c,d\geq 0$ and $a^2+b^2+c^2+d^2=1$ then

$$(1-a)(1-b)\geq cd .$$

Demonstrație.

$$a^2+b^2+c^2+d^2=1\Rightarrow 2cd\leq c^2+d^2=1-a^2-b^2\Leftrightarrow\frac{1-a^2-b^2}{2}\geq cd .$$

Este suficient să arătăm că $(1-a)(1-b)\geq\frac{1-a^2-b^2}{2}\Leftrightarrow(a+b-1)^2\geq 0$.

Folosind $(1-a)(1-b)\geq cd$ și $(1-c)(1-d)\geq ab$, prin înmulțirea celor două inegalități obținem concluzia, cu egal pentru $a+b=1, c+d=1, c=d , a=b$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=d=\frac{1}{2}$.

1). If $a,b,c,d,\lambda>0$ and $a^2+b^2+c^2+d^2=\lambda^2$ then

$$(\lambda-a)(\lambda-b)(\lambda-c)(\lambda-d)\geq abcd .$$

Soluție.

Lema.

If $a,b,c,d,\lambda>0$ and $a^2+b^2+c^2+d^2=\lambda^2$ then $(\lambda-a)(\lambda-b)\geq cd$.

Demonstrație.

$$a^2+b^2+c^2+d^2=\lambda^2 \Rightarrow 2cd\leq c^2+d^2=\lambda^2-a^2-b^2 \Leftrightarrow \frac{\lambda^2-a^2-b^2}{2}\geq cd .$$

Este suficient să arătăm că $(\lambda-a)(\lambda-b)\geq \frac{\lambda^2-a^2-b^2}{2} \Leftrightarrow (a+b-\lambda)^2\geq 0$.

Folosind $(\lambda-a)(\lambda-b)\geq cd$ și $(\lambda-c)(\lambda-d)\geq ab$, prin înmulțirea celor două inegalități obținem concluzia, cu egal pentru $a+b=\lambda$, $c+d=\lambda$, $c=d$, $a=b$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=d=\frac{\lambda}{2}$.

2). If $a,b,c,d,\lambda>0$ and $a^2+b^2+c^2+d^2=\lambda^2$ then

$$(\lambda-a)^2+(\lambda-b)^2+(\lambda-c)^2+(\lambda-d)^2\geq 4\sqrt{abcd} .$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS=(\lambda-a)^2+(\lambda-b)^2+(\lambda-c)^2+(\lambda-d)^2\geq 2cd+2ab\overset{AG}{\geq} 4\sqrt{abcd}=RHS ,$$

cu egal pentru $a+b=\lambda$, $c+d=\lambda$, $a=b$, $c=d$, $ab=cd$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=d=\frac{\lambda}{2}$.

Problema591.

If $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ and $n\in\mathbf{N}$ then

$$\frac{\sin^{n+2}x}{\cos^n x}+\frac{\cos^{n+2}x}{\sin^n x}\geq 1 .$$

Elton Papanikolla, MathOlymp 5/2025

Soluție.

Lema.

If $a,b>0$, $a^2+b^2=1$ and $n\in\mathbf{N}$ then $\frac{a^{n+2}}{b^n}+\frac{b^{n+2}}{a^n}\geq 1$.

Demonstrație.

Pentru $n=0$ se obține egalitatea $a^2+b^2=1$. În continuare fie $n\in\mathbf{N}^*$.

Avem $\frac{a^{n+2}}{b^n}+\frac{b^{n+2}}{a^n}\geq\frac{a^{n+1}}{b^{n-1}}+\frac{b^{n+1}}{a^{n-1}}\Leftrightarrow(a-b)\left(a^{2n+1}-b^{2n+1}\right)\geq 0$, factorii au același semn,

Repetând raționamentul obținem:

$$\frac{a^{n+2}}{b^n}+\frac{b^{n+2}}{a^n}\geq\frac{a^{n+1}}{b^{n-1}}+\frac{b^{n+1}}{a^{n-1}}\geq\frac{a^n}{b^{n-2}}+\frac{b^n}{a^{n-2}}\geq\ldots\geq\frac{a^2}{b^0}+\frac{b^2}{a^0}=a^2+b^2=1.$$

Folosind **Lema** pentru $(a,b)=(\sin x,\cos x)$ obținem concluzia.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $n=0$ sau $\sin x=\cos x\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}$, pentru $n\in\mathbf{N}^*$.

Remarca.

If $a,b,\lambda>0$, $a^2+b^2=\lambda$ and $n\in\mathbf{N}$ then

$$\frac{a^{n+2}}{b^n}+\frac{b^{n+2}}{a^n}\geq\lambda.$$

Marin Chirciu

Demonstrație.

Pentru $n=0$ se obține egalitatea $a^2+b^2=\lambda$. În continuare fie $n\in\mathbf{N}^*$.

Avem $\frac{a^{n+2}}{b^n}+\frac{b^{n+2}}{a^n}\geq\frac{a^{n+1}}{b^{n-1}}+\frac{b^{n+1}}{a^{n-1}}\Leftrightarrow(a-b)\left(a^{2n+1}-b^{2n+1}\right)\geq 0$, factorii au același semn.

Repetând raționamentul obținem:

$$\frac{a^{n+2}}{b^n}+\frac{b^{n+2}}{a^n}\geq\frac{a^{n+1}}{b^{n-1}}+\frac{b^{n+1}}{a^{n-1}}\geq\frac{a^n}{b^{n-2}}+\frac{b^n}{a^{n-2}}\geq\ldots\geq\frac{a^2}{b^0}+\frac{b^2}{a^0}=a^2+b^2=\lambda.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=\sqrt{\frac{\lambda}{2}}$.

Problema592.

In ΔABC

$$\sum \frac{\cos^2 \frac{A-B}{2}}{\cos^2 \frac{A+B}{2}} \geq 12 .$$

GM 1/1988

Soluție.

Folosind $\frac{\cos^2 \frac{A-B}{2}}{\cos^2 \frac{A+B}{2}} = \frac{(a+b)^2}{c^2}$ și inegalitatea mediilor obținem concluzia.:

Remarca.

In ΔABC

$$\sum \frac{\cos^2 \frac{B+C}{2}}{\cos^2 \frac{B-C}{2}} \leq \frac{R}{2r} - \frac{1}{4} .$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema.

In ΔABC

$$\frac{\cos^2 \frac{B+C}{2}}{\cos^2 \frac{B-C}{2}} = \frac{a^2}{(b+c)^2} .$$

$$LHS = \sum \frac{\cos^2 \frac{B+C}{2}}{\cos^2 \frac{B-C}{2}} = \sum \frac{a^2}{(b+c)^2} \overset{AG}{\leq} \sum \frac{a^2}{4bc} = \frac{1}{4} \sum \frac{a^2}{bc} = \frac{1}{4} \frac{\sum a^3}{abc} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2p\left(p^2 - 3r^2 - 6Rr\right)}{4Rrp} =$$

$$= \frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{8Rr} \overset{Gerretsen}{\leq} \frac{4R^2 + 4Rr + 3r^2 - 3r^2 - 6Rr}{8Rr} = \frac{4R^2 - 2Rr}{8Rr} = \frac{2R(2R-r)}{8Rr} =$$

$$= \frac{2R - r}{4r} = \frac{R}{2r} - \frac{1}{4} .$$

Problema593.

Dacă în ΔABC are loc egalitatea $\sum \sin 2A \sum \tan A = \frac{27}{8}$ atunci triunghiul este echilateral.

GM 11-12/1987

Soluție.

Folosind $\sum \sin 2A = 4\prod \sin A$ și $\sum \tan A = \prod \tan A$, egalitatea din enunnț se scrie:

$$4\prod \sin A \cdot \prod \tan A = \frac{27}{8} \Leftrightarrow 4\prod \sin^2 A = \frac{27}{8}\prod \cos A \Leftrightarrow 8\prod \sin^3 A = \frac{27}{8}\prod \sin 2A \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 64\prod \sin^3 A = 27\prod \sin 2A$,(1).

Avem $4\prod \sin A = \sum \sin 2A \overset{AG}{\geq} 3\sqrt[3]{\prod \sin 2A} \Rightarrow 4\prod \sin A \geq 3\sqrt[3]{\prod \sin 2A} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 64\prod \sin^3 A \geq 27\prod \sin 2A$,(2).

Problema594.

Solve in positive reals the system $\begin{cases} x+y+z=9 \\ x^2+y^2+z^2=29 \\ x^3+y^3+z^3=99 \end{cases}$.

Sanong Huayrerai, Math 5/2025

Soluție.

Avem $S_1 = x+y+z=9$, $S_2 = xy+yz+zx=26$, $S_3 = xyz=24 \Rightarrow x^3 - S_1x^2 + S_2x - S_3 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-3)(x-4)=0 \Leftrightarrow (x,y,z)=(2,3,4)$ și permutările.

Remarca.

Let be $\lambda > 0$ fixed. Solve in positive reals the system $\begin{cases} x+y+z=3\lambda+3 \\ x^2+y^2+z^2=3\lambda^2+6\lambda+5 \\ x^3+y^3+z^3=3\lambda^3+9\lambda^2+15\lambda+9 \end{cases}$.

Marin Chirciu

Soluție.

Avem $S_1 = x+y+z = 3\lambda+3$, $S_2 = xy+yz+zx = 3\lambda^2+6\lambda+2$, $S_3 = xyz = \lambda(\lambda+1)(\lambda+2) \Rightarrow$
$x^3 - S_1x^2 + S_2x - S_3 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^3 - 3(\lambda+1)x^2 + (3\lambda^2+6\lambda+2)x - \lambda(\lambda+1)(\lambda+2) = 0 \Leftrightarrow (x-\lambda)(x-\lambda-1)(x-\lambda-2) = 0$

$\Leftrightarrow (x,y,z) = (\lambda, \lambda+1, \lambda+2)$ și permutările.

Problema595.

In acute ΔABC

$$\sum \frac{\tan A}{1+\cos A} \geq 2\sqrt{3}.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam, RMM 5/2025

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{\tan A}{1+\cos A} = \sum \frac{\tan^2 A}{\tan A + \sin A} \overset{CS}{\geq} \frac{\left(\sum \tan A\right)^2}{\sum(\tan A + \sin A)} = \frac{\left(\sum \tan A\right)^2}{\sum \tan A + \sum \sin A} =$$

$$= \frac{\left(\sum \tan A\right)^2}{\sum \tan A + \frac{p}{R}} \overset{(1)}{\geq} 2\sqrt{3} = RHS,$$

unde $\frac{\left(\sum \tan A\right)^2}{\sum \tan A + \frac{p}{R}} \overset{(1)}{\geq} 2\sqrt{3} \overset{\sum \tan A = t}{\Leftrightarrow} \frac{t^2}{t+\frac{p}{R}} \geq 2\sqrt{3} \Leftrightarrow t^2 \geq 2\sqrt{3}\left(t+\frac{p}{R}\right) \overset{p \leq \frac{3\sqrt{3}R}{2}}{\Leftrightarrow} t^2 \geq 2\sqrt{3}\left(t+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \Leftrightarrow$

$t^2 - 2\sqrt{3}t - 9 \geq 0 \Leftrightarrow (t-3\sqrt{3})(t+\sqrt{3}) \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 3\sqrt{3}$, vezi

$t = \sum \tan A = \frac{2pr}{p^2-(2R+r)^2} \overset{Gerretsen\&Mitrinovic}{\geq} 3\sqrt{3}$.

Remarcă.

In acute ΔABC

$$\sum \frac{\tan A}{1+\lambda\cos A} \geq \frac{6\sqrt{3}}{\lambda+2}, \lambda \geq 0.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{\tan A}{1+\lambda\cos A}=\sum\frac{\tan^2 A}{\tan A+\lambda\sin A}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum\tan A\right)^2}{\sum\left(\tan A+\lambda\sin A\right)}=\frac{\left(\sum\tan A\right)^2}{\sum\tan A+\lambda\sum\sin A}=$$

$$=\frac{\left(\sum\tan A\right)^2}{\sum\tan A+\lambda\frac{p}{R}}\overset{(1)}{\geq}\frac{6\sqrt{3}}{\lambda+2}=RHS\,.$$

Problema596.

PP48436. In ΔABC

$$\sum\frac{\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}{ab}=\frac{4R+r}{2Rp^2}\,.$$

Mihaly Bencze, Brașov, Octogon

Soluție.

$$\sum\frac{\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}{ab}=\sum\frac{\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}}{ab}=\sum\frac{\frac{p-c}{p}}{ab}=\frac{1}{p}\sum\frac{p-c}{ab}=$$

$$=\frac{1}{p}\cdot\frac{4R+r}{2Rp}=\frac{4R+r}{2Rp^2}\,.$$

Remarcă.

In ΔABC

$$\sum\frac{\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}}{ab}=\frac{2R-r}{2Rr^2}\,.$$

Mihaly Bencze, Brașov

Soluție.

$$\sum\frac{\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}}{ab}=\sum\frac{\sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}}\sqrt{\frac{p(p-b)}{(p-a)(p-c)}}}{ab}=\sum\frac{\frac{p}{p-c}}{ab}=p\sum\frac{1}{ab(p-c)}=$$

$$=p\cdot\frac{2R-r}{2Rr^2p}=\frac{2R-r}{2Rr^2}\,.$$

Remarcă.

In ΔABC

$$\sum \frac{\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}{ab} \le \frac{R}{18r}\sum \frac{\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}}{ab}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosind: $\sum \frac{\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}{ab} = \frac{4R+r}{2Rp^2}$ și $\sum \frac{\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}}{ab} = \frac{2R-r}{2Rr^2}$ inegalitatea se scrie:

$\frac{4R+r}{2Rp^2} \le \frac{R}{18r}\cdot\frac{2R-r}{2Rr^2} \Leftrightarrow p^2R(2R-r) \ge 18r^3(4R+r)$,vezi $p^2 \ge 16Rr-5r^2$,(Gerretsen).

Problema597.

In ΔABC

$$\sum \frac{h_a^2}{r_a} \ge 9r.$$

Mehmet Șahin, Turkey, RMM 5/2017

Soluție.

Folosind $\sum \frac{h_a^2}{r_a} = \frac{p^2\left(p^2+2r^2-12Rr\right)+r^3(4R+r)}{4R^2r}$ obținem:

$$\sum \frac{h_a^2}{r_a} = \frac{p^2\left(p^2+2r^2-12Rr\right)+r^3(4R+r)}{4R^2r} \overset{Gerretsen}{\ge} \frac{\left(16Rr-5r^2\right)\left(16Rr-5r^2+2r^2-12Rr\right)+r^3(4R+r)}{4R^2r} =$$

$$= \frac{\left(16Rr-5r^2\right)\left(16Rr-5r^2+2r^2-12Rr\right)+r^3(4R+r)}{4R^2r} = \frac{r^2\left(64R^2-64Rr+16r^2\right)}{4R^2r} =$$

$$= \frac{4r(2R-r)^2}{R^2} \overset{Euler}{\ge} 9r = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

1). In ΔABC

$$r\left(4-\frac{2r}{R}\right)^2\le\sum\frac{h_a^2}{r_a}\le\frac{9R^3}{8r^2}.$$

Soluție.

Folosim inegalitatea lui Gerretsen și $\sum\frac{h_a^2}{r_a}=\frac{p^2\left(p^2+2r^2-12Rr\right)+r^3\left(4R+r\right)}{4R^2r}$

2). In ΔABC

$$9r\le r\left(4-\frac{2r}{R}\right)^2\le\sum\frac{h_a^2}{r_a}\le\frac{9R^3}{8r^2}.$$

3).In ΔABC

$$\frac{9R^2}{4r}\le\sum\frac{r_a^2}{h_a}\le\frac{9R^4}{16r^3}.$$

Soluție.

Folosim inegalitatea lui Gerretsen și $\sum\frac{r_a^2}{h_a}=\frac{2R\left(4R+r\right)-p^2}{r}$

4). In ΔABC

$$\sum\frac{h_a^2}{r_a}\le\sum\frac{r_a^2}{h_a}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Folosind $\sum\frac{h_a^2}{r_a}=\frac{p^2\left(p^2+2r^2-12Rr\right)+r^3\left(4R+r\right)}{4R^2r}$ și $\sum\frac{r_a^2}{h_a}=\frac{2R\left(4R+r\right)-p^2}{r}$ avem:

$$\frac{p^2\left(p^2+2r^2-12Rr\right)+r^3\left(4R+r\right)}{4R^2r}\le\frac{2R\left(4R+r\right)-p^2}{r}\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow p^2\left(p^2+2r^2-12Rr+4R^2\right)\le\left(4R+r\right)\left(8R^3-r^3\right)$, vezi $p^2\le4R^2+4Rr+3r^2$ (Gerretsen).

Problema598.

In ΔABC

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}\ge4-\frac{2r}{R}.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam, RMM 5/2025

Soluție.

Folosind $a^3+b^3+c^3=2p\left(p^2-3r^2-6Rr\right)$ obținem:

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}=\frac{2p\left(p^2-3r^2-6Rr\right)}{4Rrp}=\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}\overset{Gerretsen}{\geq}\frac{16Rr-5r^2-3r^2-6Rr}{2Rr}=$$

$$=\frac{10Rr-8r^2}{2Rr}=\frac{5R-4r}{R}=5-\frac{4r}{R}\overset{Euler}{\geq}4-\frac{2r}{R}.$$

Remarcă.

1). In ΔABC

$$5-\frac{4r}{R}\leq\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}\leq\frac{R}{r}-1.$$

Soluție.

Folosind $a^3+b^3+c^3=2p\left(p^2-3r^2-6Rr\right)$ și inegalitatea lui Gerretsen.

2). In ΔABC

$$3\leq 4-\frac{2r}{R}\leq 5-\frac{4r}{R}\leq\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}\leq\frac{R}{r}-1.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema599.

Solve for positive reals x, y the equation:

$$2(x+y)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+4=2\left(\sqrt{4x+1}+\sqrt{4y+1}\right).$$

Khoon Yu T, Vietnam, THCS 5/2025

Soluție.

Lema.

If $x>0$ then

$$2x+\frac{1}{2x}+2\geq 2\sqrt{4x+1}.$$

Demonstrație.

$2x+\frac{1}{2x}+2=2x+\frac{4x+1}{2x}\overset{AG}{\geq}2\sqrt{2x\cdot\frac{4x+1}{2x}}=2\sqrt{4x+1}$, cu egal pentru $2x=\frac{4x+1}{2x}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x^2-4x-1=0\overset{x>0}{\Leftrightarrow} x=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

$LHS=2(x+y)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+4=\sum\left(2x+\frac{1}{2x}+2\right)\overset{Lema}{\geq}2\left(\sqrt{4x+1}+\sqrt{4y+1}\right)=RHS$.

Deducem că ecuația admite soluția unică $(x,y)=\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2},\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$.

1). Let be $\lambda>0$ fixed. Solve for positive reals x,y the equation:

$$\lambda(x+y)+\frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+2\lambda=2\left(\sqrt{\lambda^2x+1}+\sqrt{\lambda^2y+1}\right).$$

Soluție.

Lema.

If $x>0$, $\lambda>0$ then

$$\lambda x+\frac{1}{\lambda x}+\lambda\geq 2\sqrt{\lambda^2x+1}.$$

Demonstrație.

$\lambda x+\frac{1}{\lambda x}+\lambda=\lambda x+\frac{\lambda^2x+1}{\lambda x}\overset{AG}{\geq}2\sqrt{\lambda x\cdot\frac{\lambda^2x+1}{\lambda x}}\geq 2\sqrt{\lambda^2x+1}$, cu egal pentru $\lambda x=\frac{\lambda^2x+1}{\lambda x}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda^2x^2-\lambda^2x-1=0\overset{x>0}{\Leftrightarrow} x=\frac{\lambda+\sqrt{\lambda^2+4}}{2\lambda}$.

$LHS=\lambda(x+y)+\frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+2\lambda=\sum\left(\lambda x+\frac{1}{\lambda x}+2\lambda\right)\overset{Lema}{\geq}2\left(\sqrt{\lambda^2x+1}+\sqrt{\lambda^2y+1}\right)=RHS$.

Deducem că ecuația admite soluția unică $(x,y)=\left(\frac{\lambda+\sqrt{\lambda^2+4}}{2\lambda},\frac{\lambda+\sqrt{\lambda^2+4}}{2\lambda}\right)$.

Cazul $\lambda=1$

2). Solve for positive reals x,y the equation:

$$x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+2=2\sqrt{x+1}+2\sqrt{y+1}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Ecuația admite soluția unică $(x,y)=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Problema600.

If $x,y>0$, $x+y=2$ then

$$\frac{x}{\sqrt{y^3+1}}+\frac{y}{\sqrt{x^3+1}}\geq\sqrt{2}.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam, RMM 5/2025

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{x}{\sqrt{y^3+1}}=\sum\frac{x^2}{x\sqrt{y^3+1}}\overset{CS}{\geq}\frac{(x+y)^2}{\sum x\sqrt{y^3+1}}=\frac{4}{\sum x\sqrt{y^3+1}}\overset{(1)}{\geq}\sqrt{2}=RHS,$$

unde $\frac{4}{\sum x\sqrt{y^3+1}}\overset{(1)}{\geq}\sqrt{2}\Leftrightarrow\sum x\sqrt{y^3+1}\leq2\sqrt{2}$, care rezultă din CBS:

$$\sum x\sqrt{y^3+1}\overset{CBS}{\leq}\sqrt{2\sum x^2\left(y^3+1\right)}=\sqrt{2\left(x^2y^3+x^3y^2+x^2+y^2\right)}=\sqrt{2\left(x^2y^2(x+y)+x^2+y^2\right)}=$$

$$=\sqrt{2\left(2x^2y^2+x^2+y^2\right)}\leq\sqrt{2\left(2xy\frac{(x+y)^2}{4}+(x+y)^2-2xy\right)}=\sqrt{2\left(2xy\frac{2^2}{4}+2^2-2xy\right)}=2\sqrt{2}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=1$.

Remarcă.

If $x,y>0$, $x+y=2$ and $0\leq\lambda\leq1$ then

$$\frac{x}{\sqrt{y^3+\lambda}}+\frac{y}{\sqrt{x^3+\lambda}}\geq\frac{2}{\sqrt{\lambda+1}}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{x}{\sqrt{y^3+\lambda}}=\sum\frac{x^2}{x\sqrt{y^3+\lambda}}\overset{CS}{\geq}\frac{(x+y)^2}{\sum x\sqrt{y^3+\lambda}}=\frac{4}{\sum x\sqrt{y^3+\lambda}}\overset{(1)}{\geq}\frac{2}{\sqrt{\lambda+1}}=RHS,$$

unde $\frac{4}{\sum x\sqrt{y^3+\lambda}}\overset{(1)}{\geq}\frac{2}{\sqrt{\lambda+1}} \Leftrightarrow \sum x\sqrt{y^3+1}\leq 2\sqrt{\lambda+1}$, care rezultă din CBS.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=1$.

Problema601.

If $a,b,c,d>0$, $\prod(a+1)=16$ then

$$\sum\frac{a^2+a-1}{a+1}\geq 2.$$

Kunihiko Chikaya, Japan, Mathematical Inequalities 6/2017

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{a^2+a-1}{a+1}=\sum\left(a-\frac{1}{a+1}\right)\overset{(1)}{\geq}2=RHS,$$

unde $\sum\left(a-\frac{1}{a+1}\right)\overset{(1)}{\geq}2 \Leftrightarrow \sum\left(a+1-\frac{1}{a+1}\right)\geq 6 \overset{a+1=x}{\Leftrightarrow} \sum\left(x-\frac{1}{x}\right)\geq 6, \prod x=16$,

care rezultă din: $\sum x\sum\frac{1}{x}\geq 16$ și $\sum x\geq 8$, vezi $\sum x\overset{AG}{\geq}4\sqrt[4]{\prod x}=4\sqrt[4]{16}=8$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=d=1$.

Problema602.

If $abc\in(0,1)$, $a+b+c=\sqrt{3}$ then

$$\sum\frac{1}{1+a}+\sum\frac{1}{1-a}\geq 9.$$

Panagiotis Danousis, Greece, MathAtelier 5/2025

Remarcă.

If $a,b,c>0$, $a+b+c=1$ and $\lambda\geq 0$ then

$$\sum\frac{1}{1+a}+\sum\frac{\lambda}{1-a}\geq\frac{9}{4}(2\lambda+1).$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{1}{1+a}+\sum\frac{\lambda}{1-a}\overset{CS}{\geq}\frac{9}{\sum(1+a)}+\frac{9\lambda}{\sum(1-a)}=\frac{9}{3+\sum a}+\frac{9\lambda}{3-\sum a}=$$

$$=\frac{9}{3+1}+\frac{9\lambda}{3-1}=\frac{9}{4}(2\lambda+1)=RHS$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Problema603.

If $x,y,z,t>0$, $xyzt=1$ then

$$\sum\frac{1}{x^3(yz+yt+zt)}\geq\frac{4}{3}.$$

Crăciun Gheorghe, RMM 5/2025

Remarcă.

If $x,y,z,t>0$, $xyzt=1$ and $n\in\mathbf{N}$, $n\geq 2$ then

$$\sum\frac{1}{x^{n+1}(yz+yt+zt)}\geq\frac{1}{4^{n-3}\cdot 3}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{1}{x^{n+1}(yz+yt+zt)}=\sum\frac{\frac{1}{x^n}}{x(yz+yt+zt)}=\sum\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^n}{\frac{1}{t}+\frac{1}{z}+\frac{1}{y}}\overset{Holder}{\geq}\frac{\left(\sum\frac{1}{x}\right)^n}{4^{n-2}\sum\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{z}+\frac{1}{y}\right)}=$$

$$=\frac{\left(\sum\frac{1}{x}\right)^n}{4^{n-2}\cdot 3\sum\frac{1}{x}}=\frac{1}{4^{n-2}\cdot 3}\left(\sum\frac{1}{x}\right)^{n-1}\overset{AG}{\geq}\frac{1}{4^{n-2}\cdot 3}\cdot 4\sqrt[4]{\frac{1}{xyzt}}=\frac{1}{4^{n-2}\cdot 3}\cdot 4=\frac{1}{4^{n-3}\cdot 3}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=t=1$.

Problema604.

In ΔABC

$$\sum \frac{1}{w_a^2} \geq \frac{9}{p^2}.$$

GM-3/1970

Soluție.

$$\sum \frac{1}{w_a^2} \overset{CS}{\geq} \frac{9}{\sum w_a^2} \geq \frac{9}{p^2}.$$

Am folosit mai sus $\sum w_a^2 \leq p^2$, vezi $w_a \leq \sqrt{p(p-a)}$.

Problema605.

In ΔABC

$$\sum a \tan \frac{A}{2} \geq 6r.$$

GM-3/1972

Soluție.

Folosim $\sum a \tan \frac{A}{2} = 2(2R-r)$ și inegalitatea lui Euler.

Problema606.

In ΔABC

$$\sum \sin^2 \frac{A}{2} \geq \frac{3}{4}.$$

Mircea Ganga, Teoreme

Soluție.

Folosim inegalitatea lui Euler și $\sum \sin^2 \frac{A}{2} = 1 - \frac{r}{2R}$.

Remarcă.

In ΔABC

$$\sum \sin^2 \frac{A}{2} \geq \frac{3r}{2R}.$$

GM-3/1972

Soluție.

Folosim $\sum \sin^2 \frac{A}{2} = 1 - \frac{r}{2R}$ și inegalitatea lui Euler.

Remarcă.

In ΔABC

$$\sum \sin^2 \frac{A}{2} \geq \frac{3}{4} \geq \frac{3r}{2R}.$$

Soluție.

Folosim $\sum \sin^2 \frac{A}{2} = 1 - \frac{r}{2R}$ și inegalitatea lui Euler.

Problema607.

In ΔABC

$$p\sqrt{3} \leq \sum r_a \leq \frac{p^2}{3r}.$$

GM-10/1971

Soluție.

Folosim $\sum r_a = 4R + r$ și inegalitatea lui Gerretsen.

Problema608.

In ΔABC

$$18\sqrt{3}r^2 \leq \sum aw_a \leq \frac{2}{\sqrt{3}} p^2 .$$

GM-6/1987

Soluție.

Inegalitatea din dreapta.

$$\sum aw_a \leq \frac{1}{3} \sum a \sum w_a \leq \frac{1}{3} \cdot 2p \cdot p\sqrt{3} = \frac{2}{\sqrt{3}} p^2 .$$

Am folosit mai sus $\sum w_a \leq p\sqrt{3}$, vezi $w_a \leq \sqrt{p(p-a)}$.

Inegalitatea din stânga.

$$\sum aw_a \geq \sum ah_a = \sum 2S = 6rp \overset{Mitrinovic}{\geq} 6r \cdot 3\sqrt{3}r = 18\sqrt{3}r^2 .$$

Problema609.

In ΔABC

$$\sum r_a \geq \sum h_a .$$

GM-10/1971

Soluție.

$$LHS = \sum r_a = 4R + r \overset{(1)}{\geq} \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{2R} = \sum h_a = RHS .$$

Problema610.

In ΔABC, $C = 60^\circ$, then

$$\frac{c}{a} + \frac{c}{b} \geq 2 .$$

Geometric Inequality 4/2017

Soluție.

Folosind teorema cosinusului în ΔABC, $C = 60^\circ \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2 - ab$.

Inegalitatea de demonstrat este echivalentă cu $\frac{c}{a} + \frac{c}{b} \geq 2 \Leftrightarrow c(a+b) \geq 2ab \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow c^2(a+b)^2 \geq 4a^2b^2 \Leftrightarrow (a^2 + b^2 - ab)(a+b)^2 \geq 4a^2b^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[(a-b)^2 + ab\right]\left[(a-b)^2 + 4ab\right] = 4a^2b^2 \Leftrightarrow (a-b)^4 + 5ab(a-b)^4 \geq 0$, cu egal pentru $a = b$, $C = 60^\circ \Leftrightarrow a = b = c$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarcă.

In ΔABC, $C = 60^\circ$, $n \in \mathbf{N}$ then

$$c^n\left(\frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n}\right) \geq 2 .$$

Marin Chirciu

Soluție.

Pentru $n=0$ se obține egalitatea 2=2.

Pentru $n=1$ se obține $\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\geq 2$, vezi Lema mai jos.

Pentru $n\geq 2$ se folosește inegalitatea lui Holder.

Lema.

In ΔABC, $C=60^\circ$, then

$$\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\geq 2.$$

$$LHS=c^n\left(\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}\right)=\left(\frac{c}{a}\right)^n+\left(\frac{c}{b}\right)^n\overset{Holder}{\geq}\frac{\left(\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\right)^n}{2^{n-1}}\overset{Lema}{\geq}\frac{2^n}{2^{n-1}}=2=RHS$$

Problema611.

If $a,b,c>0$, $abc=1$ then

$$\sum\frac{1}{a^3\left(b+c\right)}\geq\frac{3}{2}.$$

Luigj Gjoka, Mathematics(College and High School) 5/2025

Remarcă.

If $a,b,c>0$, $abc=1$ and $\lambda\geq 0$ then

$$\sum\frac{1}{a^3\left(b+\lambda c\right)}\geq\frac{3}{\lambda+1}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{1}{a^3\left(b+\lambda c\right)}=\sum\frac{\frac{1}{a^2}}{a\left(b+\lambda c\right)}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum\frac{1}{a}\right)^2}{\sum a\left(b+\lambda c\right)}=\frac{\left(\sum bc\right)^2}{\left(\lambda+1\right)\sum bc}=\frac{1}{\lambda+1}\sum bc\overset{AG}{\geq}$$

$$\overset{AG}{\geq}\frac{1}{\lambda+1}\cdot 3\sqrt[3]{\left(abc\right)^2}=\frac{3}{\lambda+1}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Problema612.

If $a,b,c>0$, $abc=1$ then

$$\sum\frac{a^3}{\sqrt{a^2+2bc+a}}\geq\frac{3}{2}.$$

Konstantinos Geronikolas, Greece,MathAtelier 5/2025

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{a^3}{\sqrt{a^2+2bc+a}}=\sum\frac{\left(a^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(a^2+2bc+a\right)^{\frac{1}{2}}}\overset{Radon}{\geq}\frac{\left(\sum a^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\sum\left(a^2+2bc+a\right)\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{\left(\sum a^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\sum a^2+2\sum bc+\sum a\right)^{\frac{1}{2}}}\overset{SOS}{\geq}$$

$$\overset{SOS}{\geq}\frac{\left(\frac{1}{3}\left(\sum a\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\left(\sum a\right)^2+\sum a\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{\left(\frac{1}{3}p^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(p^2+p\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{\frac{1}{3\sqrt{3}}p^3}{\left(p^2+p\right)^{\frac{1}{2}}}\overset{(1)}{\geq}\frac{3}{2}=RHS,$$

unde $\frac{\frac{1}{3\sqrt{3}}p^3}{\left(p^2+p\right)^{\frac{1}{2}}}\overset{(1)}{\geq}\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{p^6}{27\left(p^2+p\right)}\geq\frac{9}{4}\Leftrightarrow 4p^5\geq 243\left(p+1\right)\Leftrightarrow 4p^5-243p-243\geq 0\Leftrightarrow$

$\left(p-3\right)\left(4p^4+12p^3+36p^2+108p+81\right)\geq 0\Leftrightarrow p\geq 3$, veziAM-GMși $abc=1$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarcă.

If $a,b,c>0$, $abc=1$ and $\lambda\geq 0$ then

$$\sum\frac{a^3}{\sqrt{a^2+2bc+\lambda a}}\geq\frac{3}{\sqrt{\lambda+3}}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{a^3}{\sqrt{a^2+2bc+\lambda a}}=\sum\frac{\left(a^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(a^2+2bc+\lambda a\right)^{\frac{1}{2}}}\overset{Radon}{\geq}\frac{\left(\sum a^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\sum\left(a^2+2bc+\lambda a\right)\right)^{\frac{1}{2}}}=$$

$$=\frac{\left(\sum a^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\sum a^2+2\sum bc+\lambda\sum a\right)^{\frac{1}{2}}}\overset{SOS}{\geq}\overset{SOS}{\geq}\frac{\left(\frac{1}{3}\left(\sum a\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\left(\sum a\right)^2+\lambda\sum a\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{\left(\frac{1}{3}p^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(p^2+\lambda p\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{\frac{1}{3\sqrt{3}}p^3}{\left(p^2+\lambda p\right)^{\frac{1}{2}}}\overset{(1)}{\geq}$$

$$\overset{(1)}{\geq}\frac{3}{\sqrt{\lambda+3}}=RHS,$$

unde $\frac{\frac{1}{3\sqrt{3}}p^3}{\left(p^2+\lambda p\right)^{\frac{1}{2}}}\overset{(1)}{\geq}\frac{3}{\sqrt{\lambda+3}}\Leftrightarrow\frac{p^6}{27\left(p^2+p\right)}\geq\frac{9}{\lambda+3}\Leftrightarrow(\lambda+3)p^5\geq 243(p+\lambda)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow(\lambda+3)p^5-243p-243\lambda\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(p-3)\left[(\lambda+3)p^4+3(\lambda+3)p^3+9(\lambda+3)p^2+2(\lambda+3)p+81\lambda\right]\geq 0\Leftrightarrow p\geq 3.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Problema613.

If $z\in\mathbf{C}$ then

$$|z+4|+|z+1|\geq\left|z+\frac{5-3\sqrt{3}i}{2}\right|.$$

OL-1994-Argeș, Liceul ”Nicolae Bălcescu”, Pitești

Soluție.

Punctele $A(z_1),B(z_2),C(z_3)$, unde $z_1=-4,z_2=-1,z_3=-\frac{5}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i$ sunt vârfurile unui triunghi echilateral.

Folosind teorema lui Pompeiu, oricare ar fi $M(z)$ cu distanțele MA,MB,MC se poate forma un triunghi, eventual degenerat întrun segment dacă $M\in\mathrm{C}(ABC)$.

Rezultă $MA+MB\geq MC\Leftrightarrow|z_M-z_A|+|z_M-z_B|\geq|z_M-z_C|\Leftrightarrow|z+4|+|z+1|\geq\left|z+\frac{5-3\sqrt{3}i}{2}\right|$.

Remarca.

1). If $z \in \mathbf{C}$ and $\lambda > 0$ then

$$|z+4\lambda|+|z+\lambda| \geq \left|z+\frac{5\lambda-3\lambda\sqrt{3}i}{2}\right|.$$

Soluție.

Punctele $A(z_1), B(z_2), C(z_3)$, unde $z_1=-4\lambda, z_2=-\lambda, z_3=-\frac{5\lambda}{2}+\frac{3\lambda\sqrt{3}}{2}i$ sunt vârfurile unui triunghi echilateral și folosim teorema lui Pompeiu.

Rezultă $MA+MB \geq MC \Leftrightarrow |z_M-z_A|+|z_M-z_B| \geq |z_M-z_C| \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow |z+4\lambda|+|z+\lambda| \geq \left|z+\frac{5\lambda-3\lambda\sqrt{3}i}{2}\right|.$$

2). If $z \in \mathbf{C}$ and $\lambda > 0$ then

$$|z+2\lambda|+|z+\lambda| \geq \left|z+\frac{3\lambda-\lambda\sqrt{3}i}{2}\right|.$$

Soluție.

Punctele $A(z_1), B(z_2), C(z_3)$, unde $z_1=-2\lambda, z_2=-\lambda, z_3=-\frac{3\lambda}{2}+\frac{\lambda\sqrt{3}}{2}i$ sunt vârfurile unui triunghi echilateral și folosim teorema lui Pompeiu.

Rezultă $MA+MB \geq MC \Leftrightarrow |z_M-z_A|+|z_M-z_B| \geq |z_M-z_C| \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow |z+2\lambda|+|z+\lambda| \geq \left|z+\frac{3\lambda-\lambda\sqrt{3}i}{2}\right|.$$

3).If $z \in \mathbf{C}$ and $\lambda > 0$ then

$$|z+6\lambda|+|z+3\lambda| \geq \left|z+\frac{9\lambda-3\lambda\sqrt{3}i}{2}\right|.$$

Soluție.

Punctele $A(z_1), B(z_2), C(z_3)$, unde $z_1=-6\lambda, z_2=-3\lambda, z_3=-\frac{9\lambda}{2}+\frac{3\lambda\sqrt{3}}{2}i$ sunt vârfurile unui triunghi echilateral și folosim teorema lui Pompeiu.

Rezultă $MA+MB \geq MC \Leftrightarrow |z_M - z_A| + |z_M - z_B| \geq |z_M - z_C| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z+6\lambda| + |z+3\lambda| \geq \left|z + \dfrac{9\lambda - 3\lambda\sqrt{3}i}{2}\right|$.

4). If $z \in \mathbf{C}$ and $\lambda > 0$ then

$$|z+3\lambda+1| + |z+\lambda+1| \geq \left|z+2\lambda+1+\left(1-\lambda\sqrt{3}\right)i\right|.$$

Soluție.

Punctele $A(z_1), B(z_2), C(z_3)$, unde $z_1 = -3\lambda - 1, z_2 = -\lambda - 1, z_3 = -2\lambda - 1 + \left(\lambda\sqrt{3} - 1\right)i$ sunt vârfurile unui triunghi echilateral și folosim teorema lui Pompeiu.

Rezultă $MA+MB \geq MC \Leftrightarrow |z_M - z_A| + |z_M - z_B| \geq |z_M - z_C| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z+3\lambda+1| + |z+\lambda+1| \geq \left|z+2\lambda+1+\left(1-\lambda\sqrt{3}\right)i\right|$.

Remarca.

5). If $z \in \mathbf{C}$ and $\lambda > 0$ then

$$|z+3\lambda| + |z+\lambda| \geq \left|z+2\lambda-\lambda\sqrt{3}i\right|.$$

Soluție.

Punctele $A(z_1), B(z_2), C(z_3)$, unde $z_1 = -3\lambda, z_2 = -\lambda, z_3 = -2\lambda + \lambda\sqrt{3}i$ sunt vârfurile unui triunghi echilateral și folosim teorema lui Pompeiu.

Rezultă $MA+MB \geq MC \Leftrightarrow |z_M - z_A| + |z_M - z_B| \geq |z_M - z_C| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z+3\lambda+1| + |z+\lambda+1| \geq \left|z+2\lambda+1+\left(1-\lambda\sqrt{3}\right)i\right|$.

6).If $z \in \mathbf{C}$ and $\lambda > 0$ then

$$|z+2\lambda| + |z+2\lambda i| \geq \left|z+\lambda-\lambda\sqrt{3}+\left(\lambda-\lambda\sqrt{3}\right)i\right|.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Punctele $A(z_1), B(z_2), C(z_3)$, unde $z_1 = -2\lambda, z_2 = -2\lambda i, z_3 = \lambda\sqrt{3} - \lambda + \left(\lambda\sqrt{3} - \lambda\right)i$ sunt vârfurile unui triunghi echilateral și folosim teorema lui Pompeiu.

Rezultă $MA+MB\ge MC \Leftrightarrow |z_M-z_A|+|z_M-z_B|\ge|z_M-z_C|\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z+2\lambda|+|z+2\lambda i|\ge\left|z+\lambda-\lambda\sqrt{3}+\left(\lambda-\lambda\sqrt{3}\right)i\right|$.

7)If $z\in\mathbf{C}$ then

$$|z+2|+|z+2i|\ge\left|z+1-\sqrt{3}+\left(1-\sqrt{3}\right)i\right|.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Punctele $A(z_1),B(z_2),C(z_3)$, unde $z_1=2\lambda,z_2=2\lambda i,z_3=\lambda\sqrt{3}+\lambda+\left(\lambda\sqrt{3}+\lambda\right)i$ sunt vârfurile unui triunghi echilateral și folosim teorema lui Pompeiu.

Rezultă $MA+MB\ge MC \Leftrightarrow |z_M-z_A|+|z_M-z_B|\ge|z_M-z_C|\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z-2\lambda|+|z-2\lambda i|\ge\left|z-\lambda-\lambda\sqrt{3}-\left(\lambda+\lambda\sqrt{3}\right)i\right|$.

8). If $z\in\mathbf{C}$ and $\lambda>0$ then

$$|z+2\lambda|+|z+2\lambda i|\ge\left|z+\lambda-\lambda\sqrt{3}+\left(\lambda-\lambda\sqrt{3}\right)i\right|.$$

Soluție.

Punctele $A(z_1),B(z_2),C(z_3)$, unde $z_1=-2\lambda,z_2=-2\lambda i,z_3=\lambda\sqrt{3}-\lambda+\left(\lambda\sqrt{3}-\lambda\right)i$ sunt vârfurile unui triunghi echilateral și folosim teorema lui Pompeiu.

Rezultă $MA+MB\ge MC \Leftrightarrow |z_M-z_A|+|z_M-z_B|\ge|z_M-z_C|\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z+2\lambda|+|z+2\lambda i|\ge\left|z+\lambda-\lambda\sqrt{3}+\left(\lambda-\lambda\sqrt{3}\right)i\right|$.

If $z\in\mathbf{C}$ then

9). $$|z+2|+|z+2i|\ge\left|z+1-\sqrt{3}+\left(1-\sqrt{3}\right)i\right|.$$

Soluție.

Punctele $A(z_1),B(z_2),C(z_3)$, unde $z_1=-2,z_2=-2i,z_3=\sqrt{3}-1+\left(\sqrt{3}-1\right)i$ sunt vârfurile unui triunghi echilateral și folosim teorema lui Pompeiu.

Rezultă $MA+MB\ge MC \Leftrightarrow |z_M-z_A|+|z_M-z_B|\ge|z_M-z_C|\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow |z+2|+|z+2i| \ge \left|z+1-\sqrt{3}+\left(1-\sqrt{3}\right)i\right|.$$

Remarca.

10). If $z \in \mathbf{C}$ and $\lambda > 0$ then

$$|z-2\lambda|+|z+2\lambda i| \ge \left|z-\lambda+\lambda\sqrt{3}+\left(\lambda-\lambda\sqrt{3}\right)i\right|.$$

Soluție.

Punctele $A(z_1), B(z_2), C(z_3)$, unde $z_1 = 2\lambda, z_2 = -2\lambda i, z_3 = \lambda-\lambda\sqrt{3}+\left(\lambda\sqrt{3}-\lambda\right)i$ sunt vârfurile unui triunghi echilateral și folosim teorema lui Pompeiu.

Rezultă $MA+MB \ge MC \Leftrightarrow |z_M - z_A|+|z_M - z_B| \ge |z_M - z_C| \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow |z-2\lambda|+|z+2\lambda i| \ge \left|z-\lambda+\lambda\sqrt{3}+\left(\lambda-\lambda\sqrt{3}\right)i\right|.$$

11). If $z \in \mathbf{C}$ then

$$|z-2|+|z+2i| \ge \left|z-1+\sqrt{3}+\left(1-\sqrt{3}\right)i\right|.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Punctele $A(z_1), B(z_2), C(z_3)$, unde $z_1 = 2, z_2 = -2i, z_3 = 1-\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}-1\right)i$ sunt vârfurile unui triunghi echilateral și folosim teorema lui Pompeiu.

Rezultă $MA+MB \ge MC \Leftrightarrow |z_M - z_A|+|z_M - z_B| \ge |z_M - z_C| \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow |z-2|+|z+2i| \ge \left|z-1+\sqrt{3}+\left(1-\sqrt{3}\right)i\right|.$$

Problema614.

In ΔABC

$$\sum(\cot B+\cot C)\tan\frac{A}{2} \ge 2.$$

Zaza Mzhavanadze, Georgia, RMM 5/2025

Soluție.

$$LHS = \sum(\cot B+\cot C)\tan\frac{A}{2} \overset{Chebyshev}{\ge} \frac{1}{3}\sum(\cot B+\cot C)\sum\tan\frac{A}{2} = \frac{1}{3}\cdot 2\sum\cot A\sum\tan\frac{A}{2} =$$

$=\frac{2}{3}\sum\cot A\sum\tan\frac{A}{2}\geq\frac{2}{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=2$, vezi $\sum\cot A\geq\sqrt{3}$ și $\sum\tan\frac{A}{2}\geq\sqrt{3}$.

Remarcă.

In ΔABC

$$\sum(\cot B+\cot C)\cot\frac{A}{2}\leq\frac{R^3}{4r^3}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS=\sum(\cot B+\cot C)\cot\frac{A}{2}\overset{Chebyshev}{\leq}\frac{1}{3}\sum(\cot B+\cot C)\sum\cot\frac{A}{2}=\frac{1}{3}\cdot 2\sum\cot A\sum\cot\frac{A}{2}=$$

$$=\frac{2}{3}\sum\cot A\sum\tan\frac{A}{2}\leq\frac{2}{3}\cdot\frac{2R^2+r^2}{pr}\cdot\frac{4R+r}{p}=\frac{2\left(2R^2+r^2\right)(4R+r)}{3rp^2}\overset{Gerretsen\&Mitrinovic}{\leq}$$

$$\overset{Gerretsen\&Mitrinovic}{\leq}\frac{2\left(2R^2+\frac{R^2}{4}\right)\left(4R+\frac{R}{2}\right)}{3r\cdot 27r^2}=\frac{R^3}{4r^3}.$$

Am folosit mai sus:

$$\sum\cot A=\frac{p^2-r^2-4Rr}{2pr}\overset{Gerretsen}{\leq}\frac{4R^2+4Rr+3r^2-r^2-4Rr}{2pr}=\frac{4R^2+2r^2}{2pr}=\frac{2R^2+r^2}{pr}.$$

Problema615.

In ΔABC

$$\sum h_a\left(\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)\geq 6\sqrt{3}r.$$

Zaza Mzhavanadze, Georgia, RMM 5/2025

Soluție.

$$LHS=\sum h_a\left(\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)\overset{Chebyshev}{\geq}\frac{1}{3}\sum h_a\sum\left(\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)=\frac{1}{3}\sum h_a\cdot 2\sum\tan\frac{A}{2}=$$

$$=\frac{2}{3}\sum h_a\sum\tan\frac{A}{2}=\frac{2}{3}\cdot\frac{p^2+r^2+4Rr}{2R}\cdot\frac{4R+r}{p}\geq\frac{2}{3}\cdot 9r\cdot\sqrt{3}=6\sqrt{3}r=RHS.$$

Remarcă.

In ΔABC

$$\sum h_a\left(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)\leq\frac{9\sqrt{3}R^2}{2r}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS=\sum h_a\left(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)\overset{Chebyshev}{\leq}\frac{1}{3}\sum h_a\sum\left(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)=\frac{1}{3}\sum h_a\cdot 2\sum\cot\frac{A}{2}=$$

$$=\frac{2}{3}\sum h_a\sum\cot\frac{A}{2}\leq\frac{2}{3}\cdot p\sqrt{3}\cdot\frac{p}{r}=\frac{2\sqrt{3}p^2}{3r}\overset{Mitrinovic}{\leq}\frac{2\sqrt{3}\cdot\frac{27R^2}{4}}{3r}=\frac{9\sqrt{3}R^2}{2r}=RHS.$$

Problema617.

If $a,b,c>0$ then

$$\sum\frac{a}{\sqrt{b(a+b)+bc}}\geq\sqrt{3}.$$

Konstantinos Geronikolas, Greece, Matematical Inequalities 5/2025

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{a}{\sqrt{b(a+b)+bc}}=\sum\frac{a}{\sqrt{b(a+b+c)}}=\sum\frac{a}{\sqrt{b}\sqrt{\sum a}}=\sum\frac{a}{\sqrt{b}}\frac{1}{\sqrt{\sum a}}\overset{(1)}{\geq}\sqrt{3}=RHS,$$

unde (1) rezultă din:

$$\sum\frac{a}{\sqrt{b}}\sum\frac{a}{\sqrt{b}}\sum ab\overset{Holder}{\geq}\left(\sum a\right)^3\Rightarrow\left(\sum\frac{a}{\sqrt{b}}\right)^2\sum ab\geq\left(\sum a\right)^3\Leftrightarrow\left(\sum\frac{a}{\sqrt{b}}\right)^2\frac{1}{\sum a}\geq\frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum ab};$$

$$\frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum ab}\geq 3\Rightarrow\left(\sum\frac{a}{\sqrt{b}}\right)^2\frac{1}{\sum a}\geq 3\Leftrightarrow\sum\frac{a}{\sqrt{b}}\frac{1}{\sqrt{\sum a}}\geq\sqrt{3}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

Remarcă.

1). If $a,b,c>0$, $a+b+c=1$ then

$$\sum\frac{a}{\sqrt{3b}}\geq 1.$$

Soluție.

$$\sum\frac{a}{\sqrt{b}}\sum\frac{a}{\sqrt{b}}\sum ab\overset{Holder}{\geq}\left(\sum a\right)^3=1\Rightarrow\left(\sum\frac{a}{\sqrt{b}}\right)^2\sum ab\geq 1\Leftrightarrow\sum\frac{a}{\sqrt{b}}\geq\frac{1}{\sqrt{\sum ab}}\overset{(1)}{\geq}\sqrt{3},$$

unde $\frac{1}{\sqrt{\sum ab}}\overset{(1)}{\geq}\sqrt{3}\Leftrightarrow\frac{1}{\sum ab}\geq 3\Leftrightarrow\sum ab\leq\frac{1}{3}$, vezi $1=(a+b+c)^2\overset{SOS}{\geq}3\sum ab\Rightarrow\sum ab\leq\frac{1}{3}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=\frac{1}{3}$.

2). In ΔABC

$$\sum\frac{1}{r_a}\sqrt{\frac{rr_b}{3}}\geq 1.$$

Lema.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=1$ then $\sum\frac{x}{\sqrt{3y}}\geq 1$

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum\frac{r}{r_a}=1$.

Folosind **Lema** pentru $(x,y,z)=\left(\frac{r}{r_a},\frac{r}{r_b},\frac{r}{r_c}\right)$ obținem: $\sum\frac{1}{r_a}\sqrt{\frac{rr_b}{3}}\geq 1$

3). In ΔABC

$$\sum\frac{1}{h_a}\sqrt{\frac{rh_b}{3}}\geq 1.$$

Dezvotări, Marin Chirciu

Lema.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=1$ then $\sum\frac{x}{\sqrt{3y}}\geq 1$

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum\frac{r}{h_a}=1$.

Folosind **Lema** pentru $(x,y,z)=\left(\frac{r}{h_a},\frac{r}{h_b},\frac{r}{h_c}\right)$ obținem: $\sum\frac{1}{h_a}\sqrt{\frac{rh_b}{3}}\geq 1$

Problema618.

In ΔABC

$$\sum \frac{a}{\cos^2 \frac{A}{2}} \geq 4\sqrt{3}R .$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam, RMM 5/2025

Soluție.

Folosim inegalitatea lui Doucet și $\sum \frac{a}{\cos^2 \frac{A}{2}} = \frac{4R(4R+r)}{p}$.

Remarcă.

1). In ΔABC

$$\frac{36Rr}{p} \leq \sum \frac{a}{\cos^2 \frac{A}{2}} \leq \frac{18R^2}{p} .$$

Soluție.

Folosind identitatea în triunghi $\sum \frac{a}{\cos^2 \frac{A}{2}} = \frac{4R(4R+r)}{p}$ inegalitatea lui Euler.

2).In ΔABC

$$12\sqrt{3}R \leq \sum \frac{a}{\sin^2 \frac{A}{2}} \leq \frac{6\sqrt{3}R^2}{r} .$$

Soluție.

Folosind identitatea în triunghi $\sum \frac{a}{\sin^2 \frac{A}{2}} = \frac{4Rp}{r}$ inegalitatea lui Mitrinovic.

Remarcă.

In ΔABC

$$\sum \frac{a}{\sin^2 \frac{A}{2}} \geq 3\sum \frac{a}{\cos^2 \frac{A}{2}} .$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Folosind $\sum \frac{a}{\sin^2 \frac{A}{2}} = \frac{4Rp}{r}$ și $\sum \frac{a}{\cos^2 \frac{A}{2}} = \frac{4R(4R+r)}{p}$ inegalitatea se scrie:

$\frac{4Rp}{r} \geq 3 \cdot \frac{4R(4R+r)}{p} \Leftrightarrow p^2 \geq 3r(4R+r)$, vezi $p^2 \geq 16Rr - 5r^2$,(Gerretsen).

Problema619.

In ΔABC

$$\sum \sin \frac{A}{2} \sin BIC \left(\sum \frac{1}{\sin \frac{A}{2}} \right)^3 \geq 108 \sum \sin A .$$

Kunihiko Chikaya, Japan, Mathematical Inequalities 4/2022

Soluție.

$$LHS = \sum \sin \frac{A}{2} \sin BIC \left(\sum \csc \frac{A}{2} \right)^3 = \sum \frac{1}{2} \sin A \left(\sum \csc \frac{A}{2} \right)^3 \overset{\sum \csc \frac{A}{2} \geq 6}{\geq} \sum \frac{1}{2} \sin A (6)^3 =$$

$$= \frac{6^3}{2} \sum \sin A = 108 \sum \sin A = RHS$$

Remarcă.

1). In ΔABC , I -incenter

$$\sum \sin \frac{A}{2} \sin BIC \left(\sum \csc \frac{A}{2} \right)^3 \geq 324\sqrt{3} \cdot \frac{r}{R} .$$

Soluție.

$$LHS = \sum \sin \frac{A}{2} \sin BIC \left(\sum \csc \frac{A}{2} \right)^3 = \sum \frac{1}{2} \sin A \left(\sum \csc \frac{A}{2} \right)^3 \overset{\sum \csc \frac{A}{2} \geq 6}{\geq} \sum \frac{1}{2} \sin A (6)^3 =$$

$$= \frac{6^3}{2} \sum \sin A = 108 \sum \sin A = 108 \cdot \frac{p}{R} \overset{Mitrinovic}{\geq} 108 \cdot \frac{3\sqrt{3}r}{R} = 324\sqrt{3} \cdot \frac{r}{R} = RHS$$

2).In ΔABC , I -incenter

$$\sum \sin\frac{A}{2}\sin BIC\left(\sum \csc\frac{A}{2}\right)^n \geq 6^n \cdot \frac{3\sqrt{3}r}{2R}, n \in \mathbf{N}.$$

Soluție.

$$LHS = \sum \sin\frac{A}{2}\sin BIC\left(\sum \csc\frac{A}{2}\right)^n = \sum \frac{1}{2}\sin A\left(\sum \csc\frac{A}{2}\right)^n \overset{\sum \csc\frac{A}{2} \geq 6}{\geq} \sum \frac{1}{2}\sin A(6)^n =$$

$$= \frac{6^n}{2}\sum \sin A = \frac{6^n}{2}\cdot\frac{p}{R} \overset{Mitrinovic}{\geq} \frac{6^n}{2}\cdot\frac{3\sqrt{3}r}{R} = 6^n \cdot \frac{3\sqrt{3}r}{2R} = RHS.$$

Cazul $n = 1$.

3). In ΔABC, I -incenter

$$\sum \sin\frac{A}{2}\sin BIC\sum \csc\frac{A}{2} \geq \frac{9\sqrt{3}r}{R}.$$

Soluție.

$$LHS = \sum \sin\frac{A}{2}\sin BIC\left(\sum \csc\frac{A}{2}\right)^n = \sum \frac{1}{2}\sin A\sum \csc\frac{A}{2} \overset{\sum \csc\frac{A}{2} \geq 6}{\geq} \sum \frac{1}{2}\sin A \cdot 6 =$$

$$= 3\sum \sin A = 3\cdot\frac{p}{R} \overset{Mitrinovic}{\geq} 3\cdot\frac{3\sqrt{3}r}{R} = \frac{9\sqrt{3}r}{R} = RHS.$$

Remarcă.

In ΔABC, I -incenter

$$\frac{3\sqrt{3}r}{2R} \leq \sum \sin\frac{A}{2}\sin BIC \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS = \sum \sin\frac{A}{2}\sin BIC = \sum \frac{1}{2}\sin A = \frac{1}{2}\sum \sin A = \frac{1}{2}\cdot\frac{p}{R} = \frac{p}{2R}.$$

Inegalitatea lui Mitrinovic $3\sqrt{3}r \leq p \leq \frac{3\sqrt{3}R}{2} \Rightarrow \frac{3\sqrt{3}r}{2R} \leq \frac{p}{2R} \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Problema620.

If $a,b,c > 0$, $\sum a^2b^2 = 12$ then

$$\sum a\sqrt[3]{bc^2} \leq 6.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam, RMM 5/2025

Remarcă.

1). If $a,b,c>0$, $\sum a^2b^2=12$ and $n\in\mathbf{N}, n\geq 2$ then

$$\sum a\sqrt[n]{bc^{n-1}} \leq 6.$$

Soluție.

$$LHS=\sum a\sqrt[n]{bc^{n-1}}=\sum\sqrt[n]{a^nbc^{n-1}}=\sum\sqrt[n]{(ab)(ac)^{n-1}}\overset{AG}{\leq}\sum\frac{(ab)+\underbrace{(ac)+\ldots+(ac)}_{n-1}}{n}=$$

$$=\sum ab\overset{(1)}{\leq}6=RHS,$$

unde $\sum ab\overset{(1)}{\leq}6$ rezultă din $\sum ab\overset{CBS}{\leq}\sqrt{3\sum a^2b^2}=\sqrt{3\cdot 12}=\sqrt{36}=6$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=\sqrt{2}$.

2). If $a,b,c>0$, $\sum a^2b^2=12$ then

$$\sum a\sqrt[4]{bc^3} \leq 6.$$

Soluție.

$$LHS=\sum a\sqrt[4]{bc^3}=\sum\sqrt[4]{a^4bc^3}=\sum\sqrt[4]{(ab)(ac)^3}\overset{AG}{\leq}\sum\frac{(ab)+(ac)+(ac)+(ac)}{4}=$$

$$=\sum ab\overset{(1)}{\leq}6=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=\sqrt{2}$.

Remarcă.

3). If $a,b,c>0$, $\sum a^2b^2=12$ then

$$\sum a\sqrt[5]{bc^4} \leq 6.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS=\sum a\sqrt[5]{bc^4}=\sum\sqrt[5]{a^5bc^4}=\sum\sqrt[5]{(ab)(ac)^4}\overset{AG}{\leq}\sum\frac{(ab)+(ac)+(ac)+(ac)+(ac)}{5}=$$

$$=\sum ab\overset{(1)}{\leq}6=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=\sqrt{2}$.

Problema621.

If $a,b,c>0$, $abc=1$ then

$$\sum\frac{1}{\frac{a^2}{b}+\frac{a^2}{c}}\geq\frac{1}{2}(ab+bc+ca).$$

Crăciun Gheorghe, Matematical Inequalities 5/2025

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{1}{\frac{a^2}{b}+\frac{a^2}{c}}\sum\frac{\left(\frac{1}{a}\right)^2}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum\frac{1}{a}\right)^2}{\sum\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}=\frac{\left(\sum\frac{1}{a}\right)^2}{2\sum\frac{1}{a}}=\frac{1}{2}\sum\frac{1}{a}=\frac{1}{2}\frac{\sum ab}{abc}=\frac{\sum ab}{2}=RHS$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarcă.

If $a,b,c>0$, $abc=1$ and $\lambda\geq 0$ then

$$\sum\frac{1}{\frac{a^2}{b}+\frac{a^2}{c}}\geq\frac{1}{\lambda+1}(ab+bc+ca).$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{1}{\frac{a^2}{b}+\lambda\frac{a^2}{c}}\sum\frac{\left(\frac{1}{a}\right)^2}{\frac{1}{b}+\lambda\frac{1}{c}}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum\frac{1}{a}\right)^2}{\sum\left(\frac{1}{b}+\lambda\frac{1}{c}\right)}=\frac{\left(\sum\frac{1}{a}\right)^2}{(\lambda+1)\sum\frac{1}{a}}=\frac{1}{\lambda+1}\sum\frac{1}{a}=\frac{1}{\lambda+1}\frac{\sum ab}{abc}=$$

$$=\frac{\sum ab}{\lambda+1}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Problema622.

In acute ΔABC

$$\sum \frac{a}{\cos^2 A} \geq 12\sqrt{3}R .$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam, RMM 5/2025

Soluție.

$$\sum \frac{a}{\cos^2 A} = \sum \frac{2R\sin A}{\cos^2 A} \overset{AG}{\geq} 2R\cdot 3\sqrt[3]{\prod \frac{\sin A}{\cos^2 A}} = 6R\sqrt[3]{\frac{\prod \tan A}{\prod \cos A}} \geq 6R\sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3}}{\frac{1}{8}}} = 6R\cdot 2\sqrt{3} =$$

Remarcă.

1). In acute ΔABC

$$\sum \frac{a}{\cos^3 A} \geq 24\sqrt{3}R .$$

Soluție.

$$\sum \frac{a}{\cos^3 A} = \sum \frac{2R\sin A}{\cos^3 A} \overset{AG}{\geq} 2R\cdot 3\sqrt[3]{\prod \frac{\sin A}{\cos^3 A}} = 6R\sqrt[3]{\frac{\prod \tan A}{\prod \cos^2 A}} \geq 6R\sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3}}{\frac{1}{8^2}}} = 6R\cdot 4\sqrt{3} =$$

2). In acute ΔABC

$$\sum \frac{a}{\cos^n A} \geq 3\cdot 2^n\sqrt{3}R ,\, n\in \mathbf{N}^* .$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

$$\sum \frac{a}{\cos^n A} = \sum \frac{2R\sin A}{\cos^n A} \overset{AG}{\geq} 2R\cdot 3\sqrt[3]{\prod \frac{\sin A}{\cos^n A}} = 6R\sqrt[3]{\frac{\prod \tan A}{\prod \cos^{n-1} A}} \geq 6R\sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3}}{\frac{1}{8^{n-1}}}} = 6R\cdot 2^{n-1}\sqrt{3} =$$

$$= 3\cdot 2^n\sqrt{3}R = RHS .$$

Problema623.

If $a,b,c,d>0$, $a+b+c+d=4$ then

$$\sum\frac{b^2}{\sqrt[4]{1+a}}\geq\frac{16}{5}.$$

Crăciun Gheorghe, MateMaraton, 5/2025

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{b^2}{\sqrt[4]{1+a}}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum b\right)^2}{\sum\sqrt[4]{1+a}}=\frac{4^2}{\sum\sqrt[4]{1\cdot1\cdot1\cdot(1+a)}}\overset{Holder}{\geq}\frac{16}{\sqrt[4]{\sum1\sum1\sum1\sum(1+a)}}=$$
$$=\frac{16}{\sqrt[4]{4\cdot4\cdot4\left(4+\sum a\right)}}=\frac{16}{\sqrt[4]{4^3(4+4)}}=\frac{16}{\sqrt[4]{4^4\cdot2}}=\frac{16}{4\sqrt[4]{2}}=\frac{4}{\sqrt[4]{2}}>\frac{16}{5}=RHS.$$

Inegalitatea este strictă.

1). If $a,b,c,d>0$, $a+b+c+d=4$ and $\lambda\geq0$ then

$$\sum\frac{a^2}{\sqrt[4]{\lambda+b}}\geq\frac{4}{\sqrt[4]{\lambda+1}}.$$

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{a^2}{\sqrt[4]{\lambda+b}}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum\sqrt[4]{\lambda+b}}=\frac{4^2}{\sum\sqrt[4]{1\cdot1\cdot1\cdot(\lambda+b)}}\overset{Holder}{\geq}\frac{16}{\sqrt[4]{\sum1\sum1\sum1\sum(\lambda+b)}}=$$
$$=\frac{16}{\sqrt[4]{4\cdot4\cdot4\left(4\lambda+\sum b\right)}}=\frac{16}{\sqrt[4]{4^3(4\lambda+4)}}=\frac{16}{\sqrt[4]{4^4\cdot(\lambda+1)}}=\frac{16}{4\sqrt[4]{\lambda+1}}=\frac{4}{\sqrt[4]{\lambda+1}}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=d=1$.

Remarcă.

2). If $a,b,c>0$, $a+b+c=3$ and $\lambda\geq0$ then

$$\sum\frac{a^2}{\sqrt[3]{\lambda+b}}\geq\frac{3}{\sqrt[3]{\lambda+1}}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{a^2}{\sqrt[3]{\lambda+b}}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum\sqrt[3]{\lambda+b}}=\frac{3^2}{\sum\sqrt[3]{1\cdot 1\cdot(\lambda+b)}}\overset{Holder}{\geq}\frac{9}{\sqrt[3]{\sum 1\sum 1\sum(\lambda+b)}}=$$

$$=\frac{9}{\sqrt[3]{3\cdot 3\left(3\lambda+\sum b\right)}}=\frac{9}{\sqrt[3]{3^2(3\lambda+3)}}=\frac{9}{\sqrt[3]{3^3\cdot(\lambda+1)}}=\frac{9}{3\sqrt[3]{\lambda+1}}=\frac{3}{\sqrt[3]{\lambda+1}}=RHS\,.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Problema624.

In ΔABC

$$\sum\frac{r_a}{r_b}+\frac{2r}{R}\geq 4\,.$$

Adil Abdullayev, Azerbaijan,RMM 4/2017

Soluție.

$$\sum\frac{r_a}{r_b}=\sum\frac{r_a^2}{r_ar_b}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum r_a\right)^2}{\sum r_ar_b}=\frac{(4R+r)^2}{p^2}\overset{Gerretsen}{\geq}\frac{(4R+r)^2}{\frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}}=\frac{2(2R-r)}{R}=4-\frac{2r}{R}\,.$$

Remarcă.

In ΔABC

$$\sum\frac{h_a}{h_b}+\frac{2r^2}{R^2}\geq 3+\frac{r}{R}\,.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$\sum\frac{h_a}{h_b}=\sum\frac{h_a^2}{h_ah_b}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum h_a\right)^2}{\sum h_ah_b}=\frac{\left(\frac{p^2+r^2+4Rr}{2R}\right)^2}{\frac{2rp^2}{R}}=\frac{\left(p^2+r^2+4Rr\right)^2}{8Rrp^2}=$$

$$=\frac{p^4+2p^2\left(r^2+4Rr\right)+r^2\left(4R+r\right)^2}{8Rrp^2}=\frac{1}{8Rr}\left[p^2+2\left(r^2+4Rr\right)+\frac{r^2\left(4R+r\right)^2}{p^2}\right]\overset{Gerretsen}{\geq}$$

$$\overset{Gerretsen}{\geq}\frac{1}{8Rr}\left[16Rr-5r^2+2\left(r^2+4Rr\right)+\frac{r^2\left(4R+r\right)^2}{\frac{R\left(4R+r\right)^2}{2\left(2R-r\right)}}\right]=\frac{1}{8Rr}\left[24Rr-3r^2+\frac{2r^2\left(2R-r\right)}{R}\right]=$$

$$=\frac{1}{8R}\left[24R-3r+\frac{2r\left(2R-r\right)}{R}\right]=\frac{24R^2-3Rr+4Rr-2r^2}{8R^2}=\frac{24R^2+Rr-2r^2}{8R^2}=3+\frac{r}{R}-\frac{2r^2}{R^2}.$$

Problema625.

If $x,y,z>0$ then

$$\sum\frac{x^2}{y}\geq\sqrt{9\sum x^2-6\sum xy}.$$

Rahim Shahbazov, RMM 5/2020

Soluție.

Lema.

If $x,y,z>0$ then

$$\sum\frac{x^2}{y}\geq\frac{6\sum x^2-\left(\sum x\right)^2}{\sum x}.$$

Pham Hun Duc Inequality

Folosim pqr -Method: $p\sum x,q=\sum xy,r=xyz$

Inegalitatea Pham Hun Duc se scrie echivalent $\sum\frac{x^2}{y}\geq\frac{6\sum x^2-\left(\sum x\right)^2}{\sum x}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\sum\frac{x^2}{y}\geq\frac{6\left(p^2-2q\right)-p^2}{p}=\frac{5p^2-12q}{p}$$

Inegalitatea de demonstrat se scrie echivalent $\sum \frac{x^2}{y} \geq \sqrt{9\sum x^2 - 6\sum xy} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sum \frac{x^2}{y} \geq \sqrt{9\left(p^2-2q\right)-6q} = \sqrt{9p^2-24q}.$$

Este suficient să arătăm că:

$$\frac{5p^2-12q}{p} \geq \sqrt{9p^2-24q} \Leftrightarrow \left(5p^2-12q\right)^2 \geq p^2\left(9p^2-24q\right) \Leftrightarrow 16p^4-96p^2q+144q^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(p^2-3q\right)^2 \geq 0.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z$.

Remarcă.

If $x,y,z>0$, $x^2+y^2+z^2=3$ then

$$2\sum \frac{x^2}{y} + \sum x \geq 9.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Inegalitatea lui Cârtoaje.

If $x,y,z>0$ then

$$\sum \frac{x^2}{y} + \sum x \geq \frac{6\sum x^2}{\sum x}.$$

Lemă.

Fie $x,y,z>0$. Arătați că:

$$\sum \frac{x^2}{y} \geq \frac{3\sum x^2}{\sum x}.$$

Demonstrație.

Lemă.

Fie $a,b,c>0$ astfel încât $a+b+c=1$. Arătați că:

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge 3\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

Proof.

$$M_s=\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}=\frac{a^4}{a^2b}+\frac{b^4}{b^2c}+\frac{c^4}{c^2a}\ge\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{a^2b+b^2c+c^2a}\overset{(1)}{\ge}3\left(a^2+b^2+c^2\right)=M_d$$, unde (1)

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2\ge 3\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)\Leftrightarrow (a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge 3\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \sum a^3+\sum ab^2\ge 2\sum a^2b \Leftrightarrow \sum a(a-b)^2\ge 0$, evident cu egalitate pentru $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Punând în **Lemă** $a=\frac{x}{x+y+z},b=\frac{y}{x+y+z},c=\frac{z}{x+y+z}$ avem $a+b+c=1$ și obținem concluzia, cu egalitate pentru $x=y=z$.

Adunând inegalitățile $\sum\frac{x^2}{y}+\sum x\ge\frac{6\sum x^2}{\sum x}$ și $\sum\frac{x^2}{y}\ge\frac{3\sum x^2}{\sum x}$ obținem

$2\sum\frac{x^2}{y}+\sum x\ge\frac{9\sum x^2}{\sum x}$ și folosim ipoteza $\sum x^2=3$ rezultă $2\sum\frac{x^2}{y}+\sum x\ge\frac{27}{\sum x}$.

Avem $3=\sum x^2\ge\frac{\left(\sum x\right)^2}{3}\Rightarrow\sum x\le 3$.

Din $2\sum\frac{x^2}{y}+\sum x\ge\frac{27}{\sum x}$ și $\sum x\le 3\Rightarrow 2\sum\frac{x^2}{y}+\sum x\ge 9$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1$.

Problema626

In ΔABC

$$\sum\frac{1}{h_a^2}\ge\frac{1}{3r^2}.$$

Titu Andreescu, Dorin Andrica, 360 Problems for Mathematical Contest, GIL 2003

Soluție.

Folosim inegalitatea lui Gerretsen și $\sum\frac{1}{h_a^2}=\frac{p^2-r^2-4Rr}{2p^2r^2}$

Remarcă.

1). In ΔABC

$$\frac{1}{3r^2} \le \sum \frac{1}{h_a^2} \le \frac{R}{6r^3}.$$

Soluție.

Folosim inegalitatea lui Gerretsen și $\sum \frac{1}{h_a^2} = \frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{2p^2r^2}$

2). In ΔABC

$$\frac{1}{3r^2} \le \sum \frac{1}{r_a^2} \le \frac{2}{27Rr}\left(\frac{2R}{r} - 1\right)^2.$$

Soluție.

Folosim inegalitatea lui Gerretsen și $\sum \frac{1}{r_a^2} = \frac{p^2 - 2r^2 - 8Rr}{p^2r^2}$

Remarcă.

In ΔABC

$$\sum \frac{1}{h_a^2} \le \sum \frac{1}{r_a^2}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Folosind identitățile în triunghi $\sum \frac{1}{h_a^2} = \frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{2p^2r^2}$ și $\sum \frac{1}{r_a^2} = \frac{p^2 - 2r^2 - 8Rr}{p^2r^2}$ inegalitatea se scrie:

$$\frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{2p^2r^2} \le \frac{p^2 - 2r^2 - 8Rr}{p^2r^2} \Leftrightarrow p^2 - r^2 - 4Rr \le 2\left(p^2 - 2r^2 - 8Rr\right) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow p^2 \ge 12Rr + 3r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \ge 16Rr - 5r^2$.

Problema627.

PP41413. If $0 < a \le b$ then

$$\int_a^b \frac{x\,dx}{\sqrt{\left(x^2+2\right)\left(2x^2+1\right)}} \ge \frac{1}{3}\ln\frac{b^2+1}{a^2+1}.$$

Mihaly Bencze, Brașov, Octogon

Soluție.

Lema.

If $0<a\le x\le 1\le b$ then:

$$\sqrt{\left(x^2+2\right)\left(2x^2+1\right)}\le\frac{3}{2}\left(x^2+1\right).$$

Demonstrație.

$$\sqrt{\left(x^2+2\right)\left(2x^2+1\right)}\overset{AG}{\le}\frac{\left(x^2+2\right)+\left(2x^2+1\right)}{2}=\frac{3x^2+3}{2}=\frac{3}{2}\left(x^2+1\right).$$

$$\int_a^b\frac{xdx}{\sqrt{\left(x^2+2\right)\left(2x^2+1\right)}}\overset{Lema}{\ge}\int_a^b\frac{xdx}{\frac{3}{2}\left(x^2+1\right)}=\frac{1}{3}\int_a^b\frac{2xdx}{x^2+1}=\frac{1}{3}\ln\left(x^2+1\right)\Big|_a^b=\frac{1}{3}\ln\frac{b^2+1}{a^2+1}.$$

Remarcă.

If $0<a\le b$ and $\lambda\ge 0$ then

$$\int_a^b\frac{xdx}{\sqrt{\left(x^2+\lambda\right)\left(\lambda x^2+1\right)}}\ge\frac{1}{\lambda+1}\ln\frac{b^2+1}{a^2+1}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema.

If $0<a\le x\le 1\le b$ then:

$$\sqrt{\left(x^2+\lambda\right)\left(\lambda x^2+1\right)}\le\frac{\lambda+1}{2}\left(x^2+1\right).$$

Demonstrație.

$$\sqrt{\left(x^2+\lambda\right)\left(\lambda x^2+1\right)}\overset{AG}{\le}\frac{\left(x^2+\lambda\right)+\left(\lambda x^2+1\right)}{2}=\frac{\left(\lambda+1\right)x^2+\left(\lambda+1\right)}{2}=\frac{\lambda+1}{2}\left(x^2+1\right).$$

$$\int_a^b\frac{xdx}{\sqrt{\left(x^2+\lambda\right)\left(\lambda x^2+1\right)}}\overset{Lema}{\ge}\int_a^b\frac{xdx}{\frac{\lambda+1}{2}\left(x^2+1\right)}=\frac{1}{\lambda+1}\int_a^b\frac{2xdx}{x^2+1}=\frac{1}{\lambda+1}\ln\left(x^2+1\right)\Big|_a^b=\frac{1}{\lambda+1}\ln\frac{b^2+1}{a^2+1}.$$

Problema628.

Evaluate:

$$\int \frac{2e^x + e^{-x}}{3e^x - 2e^{-x}} dx .$$

Sanong Huayrerai, Math 5/2025.

Soluție.

Scriem $2e^x + e^{-x} = A\left(3e^x - 2e^{-x}\right) + B\left(3e^x + 2e^{-x}\right) \Rightarrow \begin{cases} 3A + 3B = 2 \\ -2A + 2B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow (A, B) = \left(\frac{1}{12}, \frac{7}{12}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2e^x + e^{-x} = \frac{1}{12}\left(3e^x - 2e^{-x}\right) + \frac{7}{12}\left(3e^x + 2e^{-x}\right)$

Obținem $\int \frac{2e^x + e^{-x}}{3e^x - 2e^{-x}} dx = \int \frac{\frac{1}{12}\left(3e^x - 2e^{-x}\right) + \frac{7}{12}\left(3e^x + 2e^{-x}\right)}{3e^x - 2e^{-x}} dx = \frac{1}{12}\int dx + \frac{7}{12}\int \frac{3e^x + 2e^{-x}}{3e^x - 2e^{-x}} dx =$

$= \frac{1}{12}x + \frac{7}{12}\ln\left|3e^x - 2e^{-x}\right| + C .$

Deducem $\int \frac{2e^x + e^{-x}}{3e^x - 2e^{-x}} dx = \frac{1}{12}x + \frac{7}{12}\ln\left|3e^x - 2e^{-x}\right| + C .$

Remarcă.

Evaluate:

$$\int \frac{\lambda e^x + e^{-x}}{(\lambda + 1)e^x - \lambda e^{-x}} dx , \lambda > 0 .$$

Marin Chirciu

Soluție.

Scriem $\lambda e^x + e^{-x} = A\left((\lambda + 1)e^x - \lambda e^{-x}\right) + B\left((\lambda + 1)e^x + \lambda e^{-x}\right) \Rightarrow \begin{cases} (\lambda + 1)A + 3(\lambda + 1)B = \lambda \\ -\lambda A + \lambda B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$(A, B) = \left(\frac{\lambda^2 - \lambda - 1}{2\lambda(\lambda + 1)}, \frac{\lambda^2 + \lambda + 1}{2\lambda(\lambda + 1)}\right).$

Deducem $\int \frac{\lambda e^x + e^{-x}}{(\lambda + 1)e^x - \lambda e^{-x}} dx == \frac{\lambda^2 - \lambda - 1}{2\lambda(\lambda + 1)}x + \frac{\lambda^2 + \lambda + 1}{2\lambda(\lambda + 1)}\ln\left|(\lambda + 1)e^x - \lambda e^{-x}\right| + C .$

Problema629.

If $A, B \in M_n(\mathbf{R})$, $AB = BA$,then

$$\det\left(2A^2 + 2B^2 - 3AB - A - B + I_n\right) \geq 0.$$

D.M.Bătinețu-Giurgiu, București

Soluție.

Avem $2A^2 + 2B^2 - 3AB - A - B + I_n = 2\left[\left(A + \frac{3}{4}B + \frac{1}{4}I_n\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{4}B - \frac{\sqrt{7}}{4}I_n\right)^2\right] = X^2 + Y^2$.

Cum $\det\left(X^2 + Y^2\right) \geq 0$, deducem concluzia.

Problema630.

22781. Fie $I_n = \int_a^b \frac{1}{x + nx^n} dx$, unde $a > 1, b > 1$, $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$. Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} I_n$.

Sorin Bogde,elev,Călărași, GM 2-3/1993

Soluție.

$$\int \frac{1}{x + nx^n} dx = \int \frac{1}{x^n\left(\frac{1}{x^{n-1}} + n\right)} dx \overset{\frac{1}{x^{n-1}} = t}{=} \int \frac{1}{x^n\left(\frac{1}{x^{n-1}} + n\right)} dx = \int \frac{1}{x^n(t+n)}\left(\frac{-x^n}{t-1}\right) dt =$$

$$= \int \frac{-1}{(n-1)(t+n)} dt = \frac{-1}{n-1}\int \frac{1}{t+n} dt = \frac{-1}{n-1}\ln(t+n) = \frac{-1}{n-1}\ln\left(\frac{1}{x^{n-1}} + n\right).$$

$$I_n = \int_a^b \frac{1}{x + nx^n} dx = \frac{-1}{n-1}\ln\left(\frac{1}{x^{n-1}} + n\right)\Bigg|_a^b = \frac{-1}{n-1}\ln\left(\frac{1 + nb^{n-1}}{1 + na^{n-1}} \frac{a^{n-1}}{b^{n-1}}\right) = \frac{-1}{n-1}\ln\frac{1 + \frac{1}{nb^{n-1}}}{1 + \frac{1}{na^{n-1}}}.$$

Obținem: $\lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n-1}\ln\frac{1 + \frac{1}{nb^{n-1}}}{1 + \frac{1}{na^{n-1}}} = 0 \cdot 0 = 0$, (am folosit $a > 1, b > 1$).

Problema631.

22795. Să se arate că șirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, unde

$$a_n = n\left(\sqrt[n]{2+\frac{1}{n}}-1\right)$$, $\forall n \geq 1$ este convergent și să se calculeze $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Marius Crainic, student Cluj-Napoca, GM 4/1993

Soluție.

Funcția $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=x\left(\left(2+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}-1\right)$ este bine definită pe $(0,\infty)$.

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(2+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}} \underset{l`Hospital}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{t\to 0}\frac{\left((2+t)^t-1\right)'}{t'}=\lim_{t\to 0}\frac{(2+t)^t\ln(2+t)+t(2+t)^{t-1}}{1}=$$

$$=\lim_{t\to 0}(2+t)^t\left(\ln(2+t)+t(2+t)^{-1}\right)=\lim_{t\to 0}(2+t)^t\left(\ln(2+t)+\frac{t}{2+t}\right)=1(\ln 2+0)=\ln 2.$$

Deducem că $\lim_{n\to\infty} a_n=\ln 2$.

Remarcă.

Fie $\lambda>0$ fixed. Să se arate că șirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, unde

$$a_n = n\left(\sqrt[n]{\lambda+\frac{1}{n}}-1\right)$$, $\forall n \geq 1$ este convergent și să se calculeze $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Marin Chirciu

Soluție.

Funcția $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=x\left(\left(\lambda+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}-1\right)$ este bine definită pe $(0,\infty)$.

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\lambda+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}} \underset{l`Hospital}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{t\to 0}\frac{\left((\lambda+t)^t-1\right)'}{t'}=\lim_{t\to 0}\frac{(\lambda+t)^t\ln(\lambda+t)+t(\lambda+t)^{t-1}}{1}=$$

$$=\lim_{t\to 0}(\lambda+t)^t\left(\ln(\lambda+t)+t(\lambda+t)^{-1}\right)=\lim_{t\to 0}(\lambda+t)^t\left(\ln(\lambda+t)+\frac{t}{\lambda+t}\right)=1(\ln\lambda+0)=\ln\lambda.$$

Deducem că $\lim_{n\to\infty} a_n = \ln\lambda$.

Problema632.

22797. Arătați că

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx\cdot\int_0^1 e^{x^2}dx\ge 1$$

Daniel Sitaru, Drobeta-Turnu Severin, GM 4/1993

Soluție.

Funcțiile $f:[0,1]\to\mathbf{R}$, $f(x)=e^{\frac{-x^2}{2}}$ și $g:[0,1]\to\mathbf{R}$, $g(x)=e^{\frac{x^2}{2}}$ sunt continue pe $[0,1]$ și aplicăm inegalitatea CBS $\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right|\le\sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}\sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\int_0^1 e^{\frac{-x^2}{2}}\cdot e^{\frac{x^2}{2}}dx\le\sqrt{\int_0^1 e^{-x^2}dx}\sqrt{\int_0^1 e^{x^2}dx}\Leftrightarrow\int_0^1 e^{\frac{-x^2}{2}}\cdot e^{\frac{x^2}{2}}dx\le\sqrt{\int_0^1 e^{-x^2}dx}\sqrt{\int_0^1 e^{x^2}dx}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1\le\sqrt{\int_0^1 e^{-x^2}dx}\sqrt{\int_0^1 e^{x^2}dx}\Leftrightarrow 1\le\int_0^1 e^{-x^2}dx\cdot\int_0^1 e^{x^2}dx.$$

Se observă că nu sunt îndeplinite condițiile pentru a avea egalitatea în relația CBS

($f=g$ sau $\exists c\in[0,1]$ astfel încât $\frac{f(c)}{g(c)}=k, k\in\mathbf{R}$).

Deducem că inegalitatea este strictă.

Remarcă.

Fie $a>1$ fixed. Arătați că

$$\int_0^1 a^{-x^2}dx\cdot\int_0^1 a^{x^2}dx\ge 1$$

Marin Chirciu

Problema633.

Fie $A\in M_n(\mathbf{C})$,cu proprietatea că $A^2=A$. Să se calculeze $(A+I)^n$, $\forall n\ge 1$, unde I este matricea unitate din $M_n(\mathbf{C})$.

OL-1993-Sălaj

Soluție.

Deoarece A și I comută la înmulțire se poate aplica formula binomului lui Newton.

$$\left(A+I\right)^n = A^n + C_n^1 A^{n-1} + C_n^2 A^{n-2} + \ldots + C_n^{n-2} A^2 + C_n^{n-1} A^1 + I^n .$$

Prin recurență se obține $A^n = A \ \forall n \geq 1$.

$$\left(A+I\right)^n = A + C_n^1 A + C_n^2 A + \ldots + C_n^{n-2} A + C_n^{n-1} A + I = A\left(1 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-2} + C_n^{n-1}\right) + I =$$

$$= A\left(2^n - 1\right) + I .$$

Remarcă.

Fie $A \in M_n\left(\mathbf{C}\right)$,cu proprietatea că $A^2 = \lambda A$, $\lambda \in \mathbf{C}^*$. Să se calculeze $\left(A+I\right)^n$, $\forall n \geq 1$, unde I este matricea unitate din $M_n\left(\mathbf{C}\right)$.

Marin Chirciu

Soluție.

$$\left(A+I\right)^n = A + \lambda^{n-2} C_n^1 A + \lambda^{n-3} C_n^2 A + \ldots + \lambda C_n^{n-2} A + C_n^{n-1} A + I =$$

$$= A\left(1 + \lambda^{n-2} C_n^1 + \lambda^{n-3} C_n^2 + \ldots + \lambda C_n^{n-2} + C_n^{n-1}\right) + I .$$

Problema634.

Arătați că șirul $\left(x_n\right)_{n\geq 0}$,definit prin $x_0 = a$ și $2nx_n = \left(2n-1\right)x_{n-1}$, $\forall n \geq 1$ este convergent și să se calculeze limita sa.

OL-1993-Caraș-Severin

Soluție.

Avem $x_n = \dfrac{2n-1}{2n} x_{n-1}$, $x_{n-1} = \dfrac{2n-3}{2n-2} x_{n-2}$,..., $x_1 = \dfrac{1}{2} x_0 \Rightarrow x_n = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \dfrac{2n-1}{2n} \cdot a$.

Prin inducție matematică $\Rightarrow x_n = \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}} \cdot a$.

Din $0 \leq x_n = \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}} \cdot a$ și teorema cleștelui $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Remarcă.

Să se arate că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$,definit prin $x_1 = a > 0$ și $(n+1)x_{n+1} = nx_n$, $\forall n \geq 1$ este convergent și să se calculeze limita sa.

Marin Chirciu

Soluție.

Avem $x_{n+1} = \frac{n}{n+1}x_n$, $x_n = \frac{n-1}{n}x_{n-1}$, $x_{n-1} = \frac{n-2}{n-1}x_{n-2}$, $x_{n-2} = \frac{n-3}{n-2}x_{n-3}$ ..., $x_3 = \frac{2}{3}x_2$, $x_2 = \frac{1}{2}x_1 \Rightarrow$ $x_{n+1} = \frac{1}{n+1}\cdot x_1$. Din $x_{n+1} = \frac{1}{n+1}\cdot a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Problema635.

22825. Să se determine funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,derivabilă, pentru care

$$f(x) = x^2 + \int_0^x e^{-t} f(x-t)\,dt \text{ , } \forall x \in \mathbf{R} .$$

Aurel Chiriță, Slatina, GM 5-6/1993

Soluție.

În integrala $\int_0^x e^{-t} f(x-t)\,dt$ făcând schimbarea de variabilă $x-t=u$ obținem:

$$\int_0^x e^{-t} f(x-t)\,dt = \int_x^0 e^{u-x} f(u)(-du) = \int_0^x e^{u-x} f(u)\,du = e^{-x}\int_0^x e^u f(u)\,du .$$

$f(x) = x^2 + e^{-x}\int_0^x e^u f(u)\,du$, care prin derivare dă:

$$f'(x) = 2x - e^{-x}\int_0^x e^u f(u)\,du + e^{-x}e^x f(x) \Leftrightarrow f'(x) = 2x - e^{-x}\int_0^x e^u f(u)\,du + f(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = 2x - \left(f(x) - x^2\right) + f(x) \Leftrightarrow f'(x) = 2x + x^2 \Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + C .$$

Din relația dată în enunț pentru $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0$.

Din $f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + C$ și $f(0) = 0 \Rightarrow C = 0$.

Deducem că $f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2$.

Remarcă.

Să se determine funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,derivabilă, pentru care

$$f(x)=x^3+\int_0^x e^{-t}f(x-t)\,dt\ ,\forall x\in\mathbf{R}\ .$$

Marin Chirciu

Soluție.

Obținem $f(x)=\dfrac{x^4}{4}+x^3$.

Remarcă.

Să se determine funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,derivabilă, pentru care

$$f(x)=x^n+\int_0^x e^{-t}f(x-t)\,dt\ ,\forall x\in\mathbf{R}\ ,n\in\mathbf{N}^*\ .$$

Marin Chirciu

Soluție.

Din $f(x)=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+x^n+C$ și $f(0)=0\Rightarrow C=0$. Obținem $f(x)=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+x^n$.

Problema636.

Evaluate

$$\int_0^{\frac{1}{3}}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)^{14}dx\ .$$

Math 5/2025

Soluție.

Substituție $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}=t\Rightarrow t-\sqrt{x}=\sqrt{x+1}\Rightarrow\left(t-\sqrt{x}\right)^2=x+1\Rightarrow t^2+x-2t\sqrt{x}=x+1\Rightarrow$

$$\Rightarrow\sqrt{x}=\frac{t^2-1}{2t}\Rightarrow x=\left(\frac{t^2-1}{2t}\right)^2\Rightarrow dx=\frac{t^4-1}{2t^3}dt\ .$$

$$I=\int_0^{\frac{1}{3}}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)^{14}dx=\int_1^{\sqrt{3}}t^{14}\cdot\frac{t^4-1}{2t^3}dt=\frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}}t^{11}\left(t^4-1\right)dt=\frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}}\left(t^{15}-t^{11}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{t^{16}}{16}-\frac{t^{12}}{12}\right)\Bigg|_1^{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\left(\sqrt{3}\right)^{16}}{16}-\frac{\left(\sqrt{3}\right)^{12}}{12}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1^{16}}{16}-\frac{1^{12}}{12}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{3^8}{16}-\frac{3^6}{12}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{12}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{3^6}{4}\left(\frac{3^2}{4}-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{2}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)=\frac{3^6}{8}\cdot\frac{23}{12}-\frac{1}{8}\cdot\frac{-1}{12}=\frac{3^6\cdot 23+1}{8\cdot 12}=\frac{16768}{32\cdot 3}=\frac{524}{3}.$$

Remarcă.

If $n\in\mathbf{N}, n\geq 2$, evaluate:

$$\int_0^{\frac{1}{3}}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)^{2n}dx.$$

Marin Chirciu

Obținem $\int_0^{\frac{1}{3}}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)^{2n}dx=\frac{3^{n-1}(4n-5)+1}{2\left(n^2-1\right)}$.

Remarcă.

If $n\in\mathbf{N}, n\geq 2$ and $a>0$ evaluate:

$$\int_0^{\frac{a}{3}}\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{x}\right)^{2n}dx.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Obținem $\int_0^{\frac{a}{3}}\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{x}\right)^{2n}dx=\frac{a^n}{4\left(n^2-1\right)}\left[a(n-1)\left(3^{n+1}-1\right)+(n+1)\left(1-3^{n-1}\right)\right]$.

Problema637.

Fie șirul cu termenul general

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{nx}\left(tg^{n-1}x+tg^n x+tg^{n+1}x\right)dx, n\geq 1.$$

Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt[n^2]{nI_n}-1\right)$.

OL-2014-Vâlcea

Soluție.

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{nx}tg^{n-1}x\left(1+tg^2x\right)dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{nx}tg^n xdx=I_1+I_2 .$$

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{nx}tg^{n-1}x\left(1+tg^2x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{nx}\left(\frac{1}{n}tgx\right)'dx\overset{parti}{=}e^{nx}\cdot\frac{1}{n}tgx\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(e^{nx}\right)'\cdot\frac{1}{n}tg^n xdx=$$

$$=\frac{1}{n}e^{\frac{n\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{nx}tg^n xdx=\frac{1}{n}e^{\frac{n\pi}{4}}-I_2 .$$

$\Rightarrow I_1=\frac{1}{n}e^{\frac{n\pi}{4}}-I_2\Rightarrow I_1+I_2=\frac{1}{n}e^{\frac{n\pi}{4}}$ și $I_n=I_1+I_2\Rightarrow I_n=\frac{1}{n}e^{\frac{n\pi}{4}}\Rightarrow nI_n=e^{\frac{n\pi}{4}}$.

Calculăm $\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt[n^2]{nI_n}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt[n^2]{e^{\frac{n\pi}{4}}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{\frac{n\pi}{4}}{n^2}-1}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{\pi}{4n}-1}}{\frac{1}{n}}=\frac{\pi}{4}$.

Remarca.

Fie șirul cu termenul general

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{nx}\left(tg^{n-1}x+\lambda tg^n x+tg^{n+1}x\right)dx\ ,n\ge 1 .$$

Marin Chirciu

Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt[n^2]{nI_n}-1\right)$.

Soluție.

Calculăm $\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt[n^2]{nI_n}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt[n^2]{e^{\frac{n\pi}{4}}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{\frac{n\pi}{4}}{n^2}-1}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{\pi}{4n}-1}}{\frac{1}{n}}=\frac{\pi}{4}$.

Problema638.

Q112. Compute

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}\left(\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{n+1}-\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\right).$$

D.M.Bătinețu-Giurgiu, Bucharest, Sclipirea Minții Nr35

Solution (Marin Chirciu, Octavian Stroe, Pitești)

Using $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}\right)=\frac{1}{e}$,(Traian Lalescu) and $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{e}$, we have:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\left(\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}\right)-\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{n+1}\right)=\frac{1}{e}\left(\frac{1}{e}-\frac{1}{e}\right)=0.$$

Q114. In ΔABC

$$\sum\frac{r_a}{h_a}+1=\sum\frac{bc}{h_a r_a}.$$

Florin Rotaru, Focșani, Sclipirea Minții Nr35

Solution

Folosim $\sum\frac{r_a}{h_a}=\frac{2R-r}{r}$ și $\sum\frac{bc}{h_a r_a}=\frac{2R}{r}$.

Problema638.

J692. If $a,b,c>0$, $a+b+c+2=abc$ and denote $t=ab+bc+ca$ then

$$\sqrt{t+a^2}+\sqrt{t+b^2}+\sqrt{t+c^2}\le t.$$

An Zhenping, China, Mathematical Reflections Nr.2/2025

Solution .

$$\sum\sqrt{t+a^2}=\sum\sqrt{ab+bc+ca+a^2}=\sum\sqrt{(a+b)(a+c)}\overset{AM-GM}{\le}\sum\frac{(a+b)+(a+c)}{2}=2\sum a.$$

It is enough to show that $a+b+c+2=abc\Rightarrow 2(a+b+c)\le ab+bc+ca$.

$$a+b+c+2=abc\Leftrightarrow (a,b,c)=\left(\frac{x}{y+z},\frac{y}{z+x},\frac{z}{x+y}\right).$$

$$2(a+b+c)\le ab+bc+ca\Leftrightarrow 2\sum\frac{x}{y+z}\le\sum\frac{y}{z+x}\cdot\frac{z}{x+y}\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 2\sum xy(x+y) \le \sum x(x+y)(x+z) \Leftrightarrow 2\sum xy(x+y) \le \sum x^3 + \sum xy(x+y) + 3xyz \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sum x^3 + 3xyz \ge \sum xy(x+y)$,(Schur`inequality).

Equality occurs if and only if $x = y = z \Leftrightarrow a = b = c$.

Problema639.

J694. If $x, y, z > 0$, $xy + yz + zx = 12$ then

$$\sqrt{(4x+y+z)(x+y)(y+z)(z+x)} \ge 2\sqrt{3}(2x+y+z).$$

Mihaela Berindeanu, București, Mathematical Reflections Nr.2/2025

Solution .

By homogenizing obtain:

$(4x+y+z)(x+y)(y+z)(z+x) \ge (xy+yz+zx)(2x+y+z)^2 \Leftrightarrow x^2y^2 + x^2z^2 \ge 2x^2yz \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad x^2(y-z)^2 \ge 0$, equally if $x = 0$ or $y = z$.

Problema640.

JP.584. In ΔABC

$$\sum \cos^3\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \ge \frac{3}{16}\sum \sin A.$$

Marian Ursărescu and Florică Anastase, Romania,RMM 39, Winter 2025

Soluție.

Lema.

In ΔABC

$$\sum \cos^3\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{p}{4R}\left(1-\frac{r}{2R}\right).$$

$\frac{p}{4R}\left(1-\frac{r}{2R}\right) \ge \frac{3}{16}\sum \sin A$, vezi identitatea în triunghi: $\sum \sin A = \frac{p}{R}$.

$\frac{p}{4R}\cdot\left(1-\frac{r}{2R}\right) \ge \frac{3}{16}\cdot\frac{p}{R} \Leftrightarrow 1-\frac{r}{2R} \ge \frac{3}{4} \Leftrightarrow R \ge 2r$,(Euler).

Remarcă.

In ΔABC

$$\sum \cos^3 \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \le \frac{p}{8}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2R}\right).$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosind identitatea în triunghi $\sum \cos^3 \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \frac{p}{4R}\left(1 - \frac{r}{2R}\right)$ obținem:

$$\sum \cos^3 \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \frac{p}{4R}\left(1 - \frac{r}{2R}\right) \overset{Euler}{\le} \frac{p}{8r}\left(1 - \frac{r}{2R}\right) = \frac{p}{8}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2R}\right).$$

Problema641.

Fie șirul $(a_n)_{n\ge1}$ definit prin $a_1 > 0$ și $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a} + a_n$, $\forall n \ge 1$, unde $a > 0$ dat.

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$.

Corneliu Vlădoreanu, Pitești, OL-1996-Argeș

Soluție.

Arătăm că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Într-adevăr, șirul $(a_n)_{n\ge1}$ este monoton crescător, deoarece $a_{n+1} - a_n = \frac{a_n^2}{a} > 0$.

Presupunând că șirul este mărginit superior , ar însemna că este convergent și are limita l.

Trecînd la limită în relația de recurență $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a} + a_n$ obținem $l = \frac{l^2}{a} + l \Leftrightarrow l = 0$, contradicție.

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a} + a_n \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n = \frac{a_n^2}{a} \Leftrightarrow \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} \Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} = a\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right).$$

Obținem $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_{n+1}} = a\left[\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right) + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)\right] = a\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$.

Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_{n+1}}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} a\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}}\right) = a\left(\frac{1}{a_1} - 0\right) = \frac{a}{a_1}$.

Deducem că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\ldots+\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)=\frac{a}{a_1}$.

Remarcă.

Fie șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_1>0$ și $a_{n+1}=\frac{1}{\lambda}a_n^3+a_n$, $\forall n\geq 1$, unde $\lambda>0$ dat.

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_1^2}{a_2}+\frac{a_2^2}{a_3}+\ldots+\frac{a_n^2}{a_{n+1}}\right)$.

Marin Chirciu

Soluție.

Avem $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$.

$$a_{n+1}=\frac{1}{\lambda}a_n^3+a_n \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda}a_n^3 \Leftrightarrow \frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{a_n^2}{a_{n+1}} \Leftrightarrow \frac{a_n^2}{a_{n+1}}=\lambda\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right).$$

Obținem $\frac{a_1^2}{a_2}+\frac{a_2^2}{a_3}+\ldots+\frac{a_n^2}{a_{n+1}}=\lambda\left[\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)\right]=\lambda\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$.

Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_1^2}{a_2}+\frac{a_2^2}{a_3}+\ldots+\frac{a_n^2}{a_{n+1}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\lambda\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)=\lambda\left(\frac{1}{a_1}-0\right)=\frac{\lambda}{a_1}$.

Deducem că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_1^2}{a_2}+\frac{a_2^2}{a_3}+\ldots+\frac{a_n^2}{a_{n+1}}\right)=\frac{\lambda}{a_1}$.

Problema642.

In ΔABC

$$m_b+m_c\geq\sqrt{h_a^2+\frac{9}{4}a^2}.$$

Bogdan Fuștei, RMM 11/2023

Soluție.

Fie G_1 proiecția lui G pe $BC \Rightarrow GG_1=\frac{1}{3}h_a$.

Cu teorema lui Pitagora în ΔGG_1B obținem $GB^2=GG_1^2+BG_1^2 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}m_b\right)^2=BG_1^2+\left(\frac{1}{3}h_a\right)^2$.

Cu teorema lui Pitagora în ΔGG_1C obținem $GC^2 = GG_1^2 + CG_1^2 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}m_b\right)^2 = CG_1^2 + \left(\frac{1}{3}h_a\right)^2$.

$$\frac{2}{3}(m_b + m_c) \geq \sqrt{BG_1^2 + \left(\frac{1}{3}h_a\right)^2} + \sqrt{CG_1^2 + \left(\frac{1}{3}h_a\right)^2} \overset{CBS}{\geq} \sqrt{(BG_1 + CG_1)^2 + \left(\frac{1}{3}h_a + \frac{1}{3}h_a\right)^2} =$$

$$= \sqrt{a^2 + \left(\frac{2}{3}h_a\right)^2} = \sqrt{a^2 + \frac{4}{9}h_a^2}.$$

Din $\frac{2}{3}(m_b + m_c) \geq \sqrt{a^2 + \frac{4}{9}h_a^2} \Rightarrow m_b + m_c \geq \sqrt{h_a^2 + \frac{9}{4}a^2}$, cu egalitate pentru $b = c$.

Remarca.

1). In ΔABC

$$\sum (m_b + m_c)^2 \geq 108r^2.$$

Soluție.

Lema.

In ΔABC

$$(m_b + m_c)^2 \geq h_a^2 + \frac{9}{4}a^2.$$

$$LHS = \sum (m_b + m_c)^2 \overset{Lema}{\geq} \sum \left(h_a^2 + \frac{9}{4}a^2\right) = \sum h_a^2 + \frac{9}{4}\sum a^2 \overset{Neuberg}{\geq} 27r^2 + \frac{9}{4} \cdot 36r^2 =$$

$$= 27r^2 + 81r^2 = 108r^2 = RHS.$$

2). In ΔABC

$$\sum \sqrt{m_b + m_c} \geq 3\sqrt[12]{S^4\left(\frac{148}{R^2} + \frac{729}{p^2}\right)}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Lema.

In ΔABC

$$m_b + m_c \geq \sqrt{h_a^2 + \frac{9}{4}a^2}.$$

$$LHS=\sum\sqrt{m_b+m_c}\overset{Lema}{\geq}\sum\sqrt[4]{h_a^2+\frac{9}{4}a^2}\overset{AM-GM}{\geq}3\sqrt[12]{\prod\left(h_a^2+\frac{9}{4}a^2\right)}\overset{(1)}{\geq}3\sqrt[12]{S^4\left(\frac{148}{R^2}+\frac{729}{p^2}\right)}$$

$$=27r^2+81r^2=108r^2=RHS\ .$$

Problema643.

J.2502. If $a,b,c>0$ then

$$1).\ \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+\sqrt{ab}\leq a+b,$$

$$2).\ \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}+2\sqrt[3]{abc}\leq a+b+c.$$

Lucian Tuțescu, Craiova, RMM 43, Winter-2024

,

Soluție.

$$1).\ \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+\sqrt{ab}\leq a+b\Leftrightarrow\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+\sqrt{ab}\right)^2\leq(a+b)^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{a^2+b^2}{2}+ab+2\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\cdot\sqrt{ab}\leq a^2+2ab+b^2\Leftrightarrow 2\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\cdot\sqrt{ab}\leq\frac{a^2+ab+b^2}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\cdot\sqrt{ab}\leq a^2+ab+b^2\Leftrightarrow 8ab\left(a^2+b^2\right)\leq\left(a^2+ab+b^2\right)^2\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4\geq 0\Leftrightarrow(a-b)^4\geq 0$, cu egalitate pentru $a=b$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b$.

$$2).\ \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}+2\sqrt[3]{abc}\leq a+b+c\Leftrightarrow\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}+2\sqrt[3]{abc}\right)^2\leq(a+b+c)^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{a^2+b^2+c^2}{3}+4\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\cdot\sqrt[3]{abc}+4\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\leq a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\cdot\sqrt[3]{abc}+12\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\leq 2a^2+2b^2+2c^2+6ab+6bc+6ca\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 6\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}}\cdot\sqrt[3]{abc}+6\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\le a^2+b^2+c^2+3(ab+bc+ca)$, care rezultă din:

Notez $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}}=t$ și $\sqrt[3]{abc}=x$. Din $ab+bc+ca\ge 3\sqrt[3]{(abc)^2}=3x^2$,

este suficient să arătăm că:

$6t\cdot x+6x^2\le 3t^2+3\cdot 3x^2 \Leftrightarrow 3t^2+3x^2-6tx\ge 0 \Leftrightarrow 3(t-x)^2\ge 0$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

Remarca.

If $a,b,c,d>0$ then

$$3).\ \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}}+3\sqrt[4]{abcd}\le a+b+c+d.$$

Marin Chirciu

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}}+3\sqrt[4]{abcd}\le a+b+c+d \Leftrightarrow$$

$$\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}}+3\sqrt[4]{abcd}\right)^2\le (a+b+c+d)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}+6\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}}\cdot\sqrt[4]{abcd}+9\sqrt[4]{(abcd)^2}\le a^2+b^2+c^2+d^2+2\sum ab \Leftrightarrow$$

$24\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}}\cdot\sqrt[4]{abcd}+36\sqrt[4]{(abcd)^2}\le 3a^2+3b^2+3c^2+3d^2+8\sum ab$,vezi

Notez $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}}=t$ și $\sqrt[4]{abcd}=x$. Din $\sum ab\ge 6\sqrt[6]{(abcd)^3}=6\sqrt{abcd}=6x^2$,

este suficient să arătăm că:

$24t\cdot x+36x^2\le 3\cdot 4t^2+8\cdot 6x^2 \Leftrightarrow 12t^2+12x^2-24tx\ge 0 \Leftrightarrow 12(t-x)^2\ge 0$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=d$.

Problema643.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=3$ then

$$\sum\sqrt{\frac{x+1}{xy+1}}\geq 3.$$

Jalil Hajimir, Canada, RMM 5/2020

Remarcă.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=3$ and $\lambda\geq 1$ then

$$\sum\sqrt{\frac{x+\lambda}{xy+\lambda}}\geq 3.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS=\sum\sqrt{\frac{x+\lambda}{xy+\lambda}}\overset{AG}{\geq}3\sqrt[3]{\prod\sqrt{\frac{x+\lambda}{xy+\lambda}}}=3\sqrt[6]{\frac{\prod(x+\lambda)}{\prod(xy+\lambda)}}\overset{(1)}{\geq}3=RHS,$$

unde $3\sqrt[6]{\frac{\prod(x+\lambda)}{\prod(xy+\lambda)}}\overset{(1)}{\geq}3\Leftrightarrow\prod(x+\lambda)\geq\prod(xy+\lambda)$.

care rezultă din $\lambda\geq 1$ și:

1). $xyz\leq 1$, vezi $3=x+y+z\geq 3\sqrt[3]{xyz}\Rightarrow xyz\leq 1$;

2). $\sum xy\leq 3$, vezi $9=(x+y+z)^2\geq 3\sum xy\Rightarrow\sum xy\leq 3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1$.

Problema643.

In ΔABC fie D,E,F picioarele bisectoarelor interioare.

Arătați că

$$[DEF]=\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}[ABC].$$

Mucenic Ionescu, Pitești, Concursul ”Dan Barbilian”, Pitești, 1992

Soluție.

Cu teorema bisectoarei obținem $BD=\frac{ac}{b+c}$, $DC=\frac{ab}{b+c}$ și $CE=\frac{ab}{a+c}\Rightarrow$

$$\Rightarrow [CDE]=\frac{1}{2}CD\cdot CE\cdot\sin C=\frac{1}{2}\cdot\frac{ab}{b+c}\cdot\frac{ab}{a+c}\cdot\sin C=\frac{a^2b^2\sin C}{2(b+c)(a+c)}=\frac{abF}{(b+c)(a+c)}.$$

Analog $[AEF]=\frac{bcF}{(a+c)(a+b)}$ și $[BDF]=\frac{acF}{(b+c)(a+b)}$.

$$[DEF]=[ABC]-[AEF]-[BDF]-[CDE]=F-\sum\frac{bcF}{(a+c)(a+b)}=\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}F.$$

Remarcă.

Dacă în ΔABC fie D,E,F picioarele bisectoarelor interioare, atunci:

$$\frac{[DEF]}{[ABC]}\le\frac{1}{4}.$$

Soluție.

Lema.

Dacă în ΔABC fie D,E,F picioarele bisectoarelor interioare, atunci:

$$\frac{[DEF]}{[ABC]}=\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

$$\frac{[DEF]}{[ABC]}=\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\overset{Cesaro}{\le}\frac{2abc}{8abc}=\frac{1}{4}.$$

Remarcă.

Dacă în ΔABC fie D,E,F picioarele bisectoarelor interioare, atunci:

$$\frac{r}{2R}\le\frac{[DEF]}{[ABC]}\le\frac{2R}{9R-2r}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema.

Dacă în ΔABC fie D,E,F picioarele bisectoarelor interioare, atunci:

$$\frac{[DEF]}{[ABC]}=\frac{4Rr}{p^2+r^2+4Rr}.$$

Folosind **Lema** și inegalitatea lui Gerretsen obținem concluzia.

Problema644.

In ΔABC

$$\sum 2^{r_a} \geq \sum 2^{h_a}.$$

Marian Ionescu, Pitești, Concursul ”Dan Barbilian”, Pitești, 1992

Soluție.

Lema.

In ΔABC

$$r_b + r_c \geq 2h_a.$$

Demonstrație.

$$r_b + r_c \geq 2h_a \Leftrightarrow \frac{F}{p-b} + \frac{F}{p-c} \geq 2 \cdot \frac{2F}{a} \Leftrightarrow \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq \frac{4}{a} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\frac{a+b+c}{2} - b} + \frac{1}{\frac{a+b+c}{2} - c} \geq \frac{4}{a} \Leftrightarrow \frac{2}{a+c-b} + \frac{2}{a+b-c} \geq \frac{4}{a} \Leftrightarrow \frac{1}{a+c-b} + \frac{1}{a+b-c} \geq \frac{2}{a} \Leftrightarrow$$

$\frac{2a}{a^2 - (b-c)^2} \geq \frac{2}{a} \Leftrightarrow (b-c)^2 \geq 0$, cu egal pentru $b = c$.

$$2^{r_b} + 2^{r_c} \overset{AG}{\geq} 2\sqrt{2^{r_b} \cdot 2^{r_c}} = 2 \cdot 2^{\frac{r_b + r_c}{2}} \overset{Lema}{\geq} 2 \cdot 2^{h_a} \Rightarrow 2^{r_b} + 2^{r_c} \geq 2 \cdot 2^{h_a}.$$

Se scriu și celelalte două inegalități analoage și se adună, de unde obținem concluzia.

Remarcă.

In ΔABC

$$r_b^n + r_c^n \geq 2h_a^n, n \in \mathbf{N}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Pentru $n = 0$ avem 2=2. Pentru $n = 1$ se obține $r_b + r_c \geq 2h_a$, vezi Lema.

Lema.

In $\Delta ABC\ r_b + r_c \ge 2h_a$.

$$LHS = r_b^n + r_c^n \overset{Holder}{\ge} \frac{(r_b + r_c)^n}{2^{n-1}} \overset{Lema}{\ge} \frac{(2h_a)^n}{2^{n-1}} = 2\left(\frac{2h_a}{2}\right)^n = 2h_a^n = RHS.$$

Problema645.

If $a,b,c>0$, $abc=1$ then

$$\sum \frac{a^2+b}{a+1} \ge 3.$$

Amir Sofi, Kosovo. Mathematics(College and High School) 5/2025

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{a^2+b}{a+1} \overset{CS}{\ge} \frac{\left(\sum a\right)^2 + \left(\sum \sqrt{b}\right)^2}{\sum (a+1)} \overset{CS}{\ge} \frac{\left(\sum a\right)^2 + \left(3\sqrt[3]{\sqrt{abc}}\right)^2}{\sum a + 3} = \frac{p^2+9}{p+3} \overset{(1)}{\ge} 3 = RHS,$$

unde $\frac{p^2+9}{p+3} \overset{(1)}{\ge} 3 \Leftrightarrow p \ge 3$, vezi $p = a+b+c \overset{AG}{\ge} 3\sqrt[3]{abc} = 3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarcă.

1). If $a,b,c>0$, $abc=1$ and $\lambda \ge 1$ then

$$\sum \frac{a^2+b}{a+\lambda} \ge \frac{6}{\lambda+1}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{a^2+b}{a+\lambda} \overset{CS}{\ge} \frac{\left(\sum a\right)^2 + \left(\sum \sqrt{b}\right)^2}{\sum (a+\lambda)} \overset{CS}{\ge} \frac{\left(\sum a\right)^2 + \left(3\sqrt[3]{\sqrt{abc}}\right)^2}{\sum a + 3\lambda} = \frac{p^2+9}{p+3\lambda} \overset{(1)}{\ge} \frac{6}{\lambda+1} = RHS,.$$

Remarcă.

1). If $a,b,c>0$, $abc=1$ and $\lambda \ge 0$ then

$$\sum \frac{a^2+\lambda b}{a+\lambda} \ge 3.$$

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{a^2+\lambda b}{a+\lambda}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum a\right)^2+\lambda\left(\sum\sqrt{b}\right)^2}{\sum(a+\lambda)}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum a\right)^2+\lambda\left(3\sqrt[3]{\sqrt{abc}}\right)^2}{\sum a+3\lambda}=\frac{p^2+9\lambda}{p+3\lambda}\overset{(1)}{\geq}3=RHS\ .$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

2). If $a,b,c>0$, $abc=1$ and $\lambda\geq n\geq 0$ then

$$\sum\frac{a^2+nb}{a+\lambda}\geq 3\frac{n+1}{\lambda+1}.$$

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{a^2+nb}{a+\lambda}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum a\right)^2+n\left(\sum\sqrt{b}\right)^2}{\sum(a+\lambda)}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum a\right)^2+n\left(3\sqrt[3]{\sqrt{abc}}\right)^2}{\sum a+3\lambda}=$$

$$=\frac{p^2+9n}{p+3\lambda}\overset{(1)}{\geq}3\frac{n+1}{\lambda+1}=RHS\ .$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

3). If $a,b,c>0$, $abc=1$ and $0\leq\lambda\leq 1$ then

$$\sum\frac{a^2+\lambda b}{a+1}\geq\frac{3}{2}(\lambda+1).$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{a^2+\lambda b}{a+1}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum a\right)^2+\lambda\left(\sum\sqrt{b}\right)^2}{\sum(a+1)}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum a\right)^2+\lambda\left(3\sqrt[3]{\sqrt{abc}}\right)^2}{\sum a+3}=\frac{p^2+9\lambda}{p+3}\overset{(1)}{\geq}\frac{3(\lambda+1)}{2}=$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Problema646.

In acute ΔABC

$$\sum\frac{a}{p-a}\sqrt{\tan A}\geq 6\sqrt[4]{3}\ .$$

Vasile Mircea Popa, RMM 5/2025

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{a}{p-a}\sqrt{\tan A}\overset{Chebyshev}{\geq}\frac{1}{3}\sum\frac{a}{p-a}\sum\sqrt{\tan A}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2(2R-r)}{r}\sum\sqrt{\tan A}\overset{AM-GM}{\geq}$$

$$\overset{AM-GM}{\geq}\frac{2(2R-r)}{3r}\cdot 3\sqrt[3]{\prod\sqrt{\tan A}}=\frac{2(2R-r)}{r}\cdot\sqrt[6]{\prod\tan A}\geq\frac{2(2R-r)}{r}\cdot\sqrt[6]{3\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{2(2R-r)}{r}\cdot\sqrt[6]{\left(\sqrt{3}\right)^3}=\frac{2(2R-r)}{r}\cdot\sqrt{\sqrt{3}}=\frac{2(2R-r)}{r}\cdot\sqrt[4]{3}\overset{Euler}{\geq}\frac{3R}{r}\cdot\sqrt[4]{3}\overset{Euler}{\geq}6\sqrt[4]{3}=RHS.$$

Remarcă.

In acute ΔABC

$$\sum\frac{a}{p-a}\sqrt{\tan A}\geq 3\sqrt[4]{3}\,\frac{R}{r}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{a}{p-a}\sqrt{\tan A}\overset{Chebyshev}{\geq}\frac{1}{3}\sum\frac{a}{p-a}\sum\sqrt{\tan A}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2(2R-r)}{r}\sum\sqrt{\tan A}\overset{AM-GM}{\geq}$$

$$\overset{AM-GM}{\geq}\frac{2(2R-r)}{3r}\cdot 3\sqrt[3]{\prod\sqrt{\tan A}}=\frac{2(2R-r)}{r}\cdot\sqrt[6]{\prod\tan A}\geq\frac{2(2R-r)}{r}\cdot\sqrt[6]{3\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{2(2R-r)}{r}\cdot\sqrt[6]{\left(\sqrt{3}\right)^3}=\frac{2(2R-r)}{r}\cdot\sqrt{\sqrt{3}}=\frac{2(2R-r)}{r}\cdot\sqrt[4]{3}\overset{Euler}{\geq}\frac{3R}{r}\cdot\sqrt[4]{3}=RHS.$$

Problema647.

22939. Șirul $(x_n)_{n\geq1}$ verifică inegalitățile $0<x_n<a$ și $(a-x_n)x_{n+1}\geq\frac{a^2}{4}$, $\forall n\in\mathbf{N}, a>0$.

Arătați că șirul este convergent și să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

Mihai Haivas, Iași, GM 1/1994

Soluție.

$0<x_n<a\Rightarrow(x_n)_{n\geq1}$ este mărginit,(1). $\frac{a^2}{4}\geq(a-x_n)x_n\Leftrightarrow\left(\frac{a}{2}-x_n\right)^2\geq0$.

Obținem $(a-x_n)x_{n+1}\geq\frac{a^2}{4}\geq(a-x_n)x_n\Rightarrow x_{n+1}\geq x_n\Rightarrow(x_n)_{n\geq1}$ este crescător,(2).

Din (1) și (2) $\Rightarrow \left(x_n\right)_{n\geq 1}$ este convergent $\Rightarrow \left(x_n\right)_{n\geq 1}$ are limită finită l.

Trecând la limită în $\left(a-x_n\right)x_{n+1} \geq \frac{a^2}{4}$ obținem $\left(a-l\right)l \geq \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{a}{2}-l\right)^2 \leq 0 \Leftrightarrow l = \frac{a}{2}$.

Deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{a}{2}$.

Problema648.

VI.611. Determinați cel mai mic număr natural care are 1961 de divizori.

Doina Stoica și Mircea Mario Stoica, Arad, RMT-2/2025

Soluție.

Lema.

Numărul divizorilor lui $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_n^{\alpha_n}$ este $\left(\alpha_1+1\right)\left(\alpha_2+1\right)...\left(\alpha_n+1\right)$.

Deoarece $1961 = 37\cdot 53 \Rightarrow \left(\alpha_1+1\right)\left(\alpha_2+1\right) = 37\cdot 53 \Rightarrow \alpha_1 = 36, \alpha_2 = 52$.

Numărul căutat este $2^{36}\cdot 3^{52}$.

Remarcă.

1).Determinați cel mai mic număr natural care are 323 de divizori.

Soluție.

Deoarece $323 = 17\cdot 19 \Rightarrow \left(\alpha_1+1\right)\left(\alpha_2+1\right) = 17\cdot 19 \Rightarrow \alpha_1 = 16, \alpha_2 = 18$.

Numărul căutat este $2^{16}\cdot 3^{18}$.

2). Determinați cel mai mic număr natural care are 1271 de divizori.

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Deoarece $1271 = 31\cdot 41 \Rightarrow \left(\alpha_1+1\right)\left(\alpha_2+1\right) = 31\cdot 41 \Rightarrow \alpha_1 = 30, \alpha_2 = 40$.

Numărul căutat este $2^{30}\cdot 3^{40}$.

Problema649.

If $x, y, z > 0$, $x+y+z = 3$ then

$$\frac{x^3+y^3+z^3}{\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(x^4+y^4+z^4\right)} \le \frac{1}{3}.$$

George Apostolopoulos, Greece, Mathematical Inequalities4/2022

Soluție

Lema

If $x, y, z > 0$, $x+y+z=3$ then $x^4+y^4+z^4 \ge x^3+y^3+z^3$.

Demonstrație

$$\sum x^4 \overset{Cebyshev}{\ge} \frac{1}{3}\sum x \sum x^3 = \frac{1}{3}\cdot 3\sum x^3 = \sum x^3.$$

$$LHS = \frac{x^3+y^3+z^3}{\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(x^4+y^4+z^4\right)} \overset{Lema}{\le} \frac{x^3+y^3+z^3}{\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(x^3+y^3+z^3\right)} = \frac{1}{x^2+y^2+z^2} \overset{(1)}{\le} \frac{1}{3} = RHS,$$

unde (1) $\Leftrightarrow \frac{1}{x^2+y^2+z^2} \le \frac{1}{3} \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2 \ge 3$, vezi din $\sum x^2 \overset{SOS}{\ge} \frac{1}{3}\left(\sum x\right)^2 = \frac{1}{3}\cdot 3^2 = 3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1$.

Remarca.

If $x, y, z > 0$, $x+y+z=3$ then

$$\frac{x^{n+1}+y^{n+1}+z^{n+1}}{\left(x^n+y^n+z^n\right)\left(x^{n+2}+y^{n+2}+z^{n+2}\right)} \le \frac{1}{3}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Lema

If $x, y, z > 0$, $x+y+z=3$ and $n \in \mathbf{N}$ then $x^{n+2}+y^{n+2}+z^{n+2} \ge x^{n+1}+y^{n+1}+z^{n+1}$.

Demonstrație

$$\sum x^{n+2} \overset{Cebyshev}{\ge} \frac{1}{3}\sum x \sum x^{n+1} = \frac{1}{3}\cdot 3\sum x^{n+1} = \sum x^{n+1}.$$

$$LHS = \frac{\sum x^{n+1}}{\sum x^n \sum x^{n+2}} \overset{Lema}{\le} \frac{\sum x^{n+1}}{\sum x^n \sum x^{n+1}} = \frac{1}{\sum x^n} \overset{(1)}{\le} \frac{1}{3} = RHS$$

unde (1) $\Leftrightarrow \frac{1}{\sum x^n} \le \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sum x^n \ge 3$, care rezultă din $\sum x^2 \overset{SOS}{\ge} \frac{1}{3}\left(\sum x\right)^2 = \frac{1}{3}\cdot 3^2 = 3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = 1$.

Problema650.

If $a,b,c,x,y > 0$ then

$$\prod\left(\left(\frac{a}{bx+cy}\right)^2 + 1\right) \ge \frac{27}{4(x+y)^2}.$$

D.M.Bătinețu-Giurgiu, Mihaly Bencze, RMM 5/2025

Soluție.

Lema.

Inegalitatea lui Arkady Alt.

If $x,y,z,t > 0$ then

$$\left(x^2+t^2\right)\left(y^2+t^2\right)\left(z^2+t^2\right) \ge \frac{3}{4}t^4\left(x+y+z\right)^2.$$

Arkady Alt ,USA

Soluție.

Avem $\left(x^2+t^2\right)\left(y^2+t^2\right) \ge \frac{3}{4}t^2\left(\left(x+y\right)^2+t^2\right) \Leftrightarrow \left(xy-\frac{1}{2}t^2\right)^2 + \frac{1}{4}t^2\left(x-y\right)^2 \ge 0$,

cu egalitate pentru $x = y = \frac{t}{\sqrt{2}}$.

$$\Rightarrow LHS = \left(x^2+t^2\right)\left(y^2+t^2\right)\left(z^2+t^2\right) \ge \frac{3}{4}t^2\left(\left(x+y\right)^2+t^2\right)\left(t^2+z^2\right) \overset{CBS}{\ge} \frac{3}{4}t^2\left(t\left(x+y\right)+tz\right)^2 =$$

$$= \frac{3}{4}t^4\left(x+y+z\right)^2 = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = \frac{t}{\sqrt{2}}$.

$$LHS = \prod\left(\left(\frac{a}{bx+cy}\right)^2+1\right) \overset{Arkady}{\ge} \frac{3}{4}\left(\sum\frac{a}{bx+cy}\right)^2 \overset{Nesbitt}{\ge} \frac{3}{4}\left(\frac{3}{x+y}\right)^2 = \frac{27}{4\left(x+y\right)^2} = RHS.$$

Egalitatea are loc pentru $\frac{a}{bx+cy}=\frac{b}{cx+ay}=\frac{c}{ax+by}=\frac{a+b+c}{(a+b+c)(x+y)}=\frac{1}{x+y}=\frac{1}{\sqrt{2}}$,

$a=b=c \Rightarrow x+y=\sqrt{2}$, $a=b=c$.

Remarcă.

If $a,b,c,x,y,\lambda>0$ then

$$\prod\left(\left(\frac{a}{bx+cy}\right)^2+\lambda\right)\geq\frac{27\lambda^2}{4(x+y)^2}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Inegalitatea lui Arkady Alt.

If $x,y,z,t>0$ then

$$\left(x^2+t^2\right)\left(y^2+t^2\right)\left(z^2+t^2\right)\geq\frac{3}{4}t^4(x+y+z)^2.$$

Arkady Alt ,USA

$$LHS=\left(x^2+t^2\right)\left(y^2+t^2\right)\left(z^2+t^2\right)\geq\frac{3}{4}t^2\left((x+y)^2+t^2\right)\left(t^2+z^2\right)\overset{CBS}{\geq}\frac{3}{4}t^2\left(t(x+y)+tz\right)^2=$$

$$LHS=\prod\left(\left(\frac{a}{bx+cy}\right)^2+\lambda\right)\overset{Arkady}{\geq}\frac{3}{4}\lambda^2\left(\sum\frac{a}{bx+cy}\right)^2\overset{Nesbitt}{\geq}\frac{3}{4}\lambda^2\left(\frac{3}{x+y}\right)^2=\frac{27\lambda^2}{4(x+y)^2}=RHS.$$

Egalitatea are loc pentru $\frac{a}{bx+cy}=\frac{b}{cx+ay}=\frac{c}{ax+by}=\frac{a+b+c}{(a+b+c)(x+y)}=\frac{1}{x+y}=\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}}$,

$a=b=c \Rightarrow x+y=\sqrt{\frac{2}{\lambda}}$, $a=b=c$.

Bibliografie:

1. C.Năstăsescu, C.Niță, M.Brandiburu, D. Joița , Exerciții de algebră, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1992.
2. O. Bottema, R. Z. Djordjević, R. R. Janić, D. S. Mitrinović și P. M. Vasić, „Geometric Inequalities”, Groningen 1969, Olanda .
3. Marin Chirciu, Inegalități trigonometrice, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2016.

4. Marin Chirciu, Inegalități cu linii importante în triunghi ,de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2018.
5. Marin Chirciu, Inegalități cu laturi și cu raze în triunghi, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2017.
6. George Apostolopoulos, Greece , Mathematical Inequalites 4/2022.
7. Kostantinos Geronikolas, Greece, Pure Inequalities 5/2025.
8. Nguyen Van Hoa, Vietnam, Mathematical Inequalities 2/2025.
9. Crăciun Gheorghe,Ploiești, Mathematical Inequalities 5/2025.
10. Sarkhan Adgozalov,Georgia, Mathematical Inequalities 5/2025.
11. Ertan Yildirim Turkey, RMM 5/2025.
12. Nguyen Hung Cuong, Vietnam, RMM 5/2025.
13. Adil Abdullayev Azerbaijan, RMM 5/2025.
14. Panagiotis Danousis, Greece, Math Atelier 5/2025.
15. Gheorghe Iacob, Pașcani, RMT-2/2025.
16. Mirela Bișoc, Pașcani, RMT-2/2025.
17. Kostas Geronikolas, Greece, Mathematical Inequalities 4/2021.
18. Liviu Nicolescu, Teoreme de geometrie plană, Universitatea București, 1986.
19. Vlad Boskoff, Teoreme de geometrie plană, Universitatea București, 1986.
20. Dorin Marghidanu, Corabia, Olt, Mathematical Inequalities 52024.
21. D.M. Bătinețu-Giurgiu, București, RMM 5/2025.
22. Mihaly Bencze, Brașov, RMM 5/2025.
23. Neculai Stanciu, Buzău, RMM 5/2025.
24. Zaza Mzhavanadze, Georgia, RMM 5/2025.
25. Titu Andreescu, 360 probleme pentru concursuri,GIL2003.
26. Dorin Andrica, 360 probleme pentru concursuri,GIL2003.
27. Ilie Dinulescu, Pitești, OL-1994-Argeș.
28. Sarkhan Adgozalov, Georgia,RMM 5/2025.
29. Sanong Huyrerai,Math 5/2025.
30. Kunihiko Chikaya, Japan, Mathematical Inequalities 6/2012.
31. Paul Peter Dalyay, Hungary, American Mathematical Monthly, 2011.
32. Imad Zak, Lebanon, Mathematical Inequalities 5/2025.
33. M.Ganga, Teoreme și probleme de matematică, 1995.
34. Nguyen Van Hoa, Vietnam, RMM 5/2025.
35. Gheorghe Stoica, Petroșani, RMT-2/2025.
36. Nicolae Ivășchescu, Canada, RMT-2/2025.
37. Viorel Gh.Vodă, Vraja geometriei demodate, 1980.
38. Nguyen Viet Hung, Vietnam,Mathematical Inequalites, 5/2025.
39. Daniel Sitaru, Romania, RMM 5/2025.
40. Dang Ngoc Minh, Vietnam, RMM 5/2025.
41. Mihai Vijdeluc, Baia Mare, RMT-2/2025.
42. Elton Papanikolla,MathOlymp, 5/2025.
43. Mehmet Șahin, Turkey, RMM 5/2017.
44. Khoon Yu T, Vietnam, THCS 5/2025.
45. Luigj Gjoka, Mathematics(College and High School) 5/2025.
46. Adil Abdullayev, Azerbaijan,RMM 4/2017.
47. Mircea Becheanu, Canada, Mathematical Reflections 1/2025.
48. Vasile Cârtoaje, Mathematical Inequalities 5/2025.

49. Nguyen Minh Tho, Vietnam, Mathematical Inequalites 2/2025.
50. Rahim Shahbazov, RMM 5/2020.

51. Marius Stănean, Zalău, Romania, Mathematical Reflections 1/2025.

52.An Zhenping, China, Mathematical Reflections, Nr.2/2025.

53.Mihaela Berindeanu, București, Mathematical Reflections Nr.2/2025.

54. Jose Luis Diaz-Barrero, JOZSEF WILDT INTERNATIONAL MATH-2017 .

55. Bogdan Fuștei, RMM 11/2023.

56.Lucian Tuțescu, Craiova, RMM 43, Winter-2024.

57.Jalil Hajimir, Canada, RMM 5/2020.

58.Amir Sofi, Kosovo. Mathematics(College and High School) 5/2025.

59.Vasile Mircea Popa, RMM 5/2025.

60.Doina Stoica , Arad, RMT-2/2025.

61. Mircea Mario Stoica, Arad, RMT-2/2025.

62.Arkady Alt ,USA, RMM 5/2025.

63. Pham Van Tuyen, Vietnam, THCS 1/2022.

64. Aurel Doboșan,Lugoj, RMT 1/2025.

65. George Florin Șerban, Brăila, GM 1/2025.

66. Maria Elena Panaitopol, 1985,SGM 1/2025.

67. Michel Bataille, France, Mathematical Inequalities 2/2025.

68.Pham Hun Duc, RMM 5/2020.

69 .Sorin Bogde,elev,Călărași, GM 2-3/1993.

70.Marius Crainic, student Cluj-Napoca, GM 4/1993.

71.Aurel Chiriță, Slatina, GM 5-6/19936.

72.Octavian Stroe, Pitești, Sclipirea Minții Nr35.

73.Florin Rotaru, Focșani, Sclipirea Minții Nr35.

74.Marian Ursărescu , Romania,RMM 39, Winter 2025.

75.Florică Anastase, Romania,RMM 39, Winter 2025.

76.Corneliu Vlădoreanu, Pitești, OL-1996-Argeș.

77.Mucenic Ionescu, Pitești, Concursul ”Dan Barbilian”, Pitești, 1992.

78.Marian Ionescu, Pitești, Concursul ”Dan Barbilian”, Pitești, 1992.

79.Mihai Haivas, Iași, GM 1/1994.

80.Marin Chirciu, Inegalități algebrice 2,de inițiere la perf, Ed.Paralela 45, Pitești, 2021.

81.Marin Chirciu, Inegalități geometrice2, inițiere și perf, Ed. Paralela 45, Pitești, 2021.

Art 9000

1 Iunie 2024