WWW.MATEINFO.RO

REVISTA ELECTRONICA MATEINFO.RO

MARTIE 2025
ISSN 2065 - 6432

REVISTĂ DIN FEBRUARIE 2009

COORDONATOR:
ANDREI OCTAVIAN DOBRE

REDACTORI PRINCIPALI ȘI SUSȚINĂTORI PERMANENȚI AI REVISTEI

NECULAI STANCIU
MARIN CHIRCIU
ROXANA MIHAELA STANCIU

ARTICOLE

R.E.M.I. MARTIE 2025

PUTEȚI TRIMITE ARTICOLE ÎN FORMAT WORD PE REVISTA.MATEINFO@YAHOO.COM

1. Clase speciale de numere

Prof.Gheorghiță Adrian Ștefan,

Școala Gimnazială "Dan Barbilian", Galați

CUPRINS

INTRODUCERE

Într-un interviu dat de matematicianul *Radu Gologan*, preşedintele SSMR , care a afirmat că în copilărie era fascinat de numere în sine. De aceea încerca să numere până la 1 milion. După cum mărturisea, nu reuşea niciodată dar, observa în amănunt ce se întâmpla cu fiecare număr în parte şi cum se pot exprima unele numere mai mari în funcţie de celelalte.

Începând de la vârste fragede copii sunt învăţaţi să numere şi să grupeze, reuşind astfel să realizeze operaţiile elementare. Interesant este că ei tind să se întrecă în obţinerea rezultatelor cât mai mari, de parcă ar putea atinge infinitul.

În continuare voi face referire la anumite tipuri speciale de numere care sunt întâlnite de către elevi încă din ciclul gimnazial. Ele sunt prezente în diferite probleme date la olimpiadele școlare și au aplicații practice în societate pentru a codifica sau a decodifica diferite informații cu ajutorul calculatoarelor.

1. Numerele prime

Referitor la infinitatea numerelor prime putem afirma că un număr $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ se numește *prim* dacă, singurii săi divizori naturali sunt 1 şi *n*. Numărul natural 2 este singurul număr prim par, iar pentru $n \geq 3$, dacă *n* este prim, atunci cu necesitate *n* este impar (condiţie insuficientă după cum se poate dovedi facil în cazul lui 9 care este impar dar nu este prim). S-a pus de foarte mult timp întrebarea: câte numere prime există?

În anul 1909 au fost editate tabele cu numere prime < 10.000.000, în care se dau cei mai mici divizori primi pentru fiecare număr natural ≤ 10.170.600 care nu se divid la 2, 3, 5 sau 7.

În anul 1951 au fost publicate tabele de numere prime până la 11.000.000. Jacob Philipp Kulik (1793-1863) a întocmit tabele de numere prime până la 100.000.000 (manuscrisul se păstrează la Academia Austriacă de Ştiinţe din Viena). În finalul lucrării, în cadrul Anexei 1 prezentă numerele prime de la 1 la 10.000. C.I. Baker şi J.F. Gruenberger au întocmit în anul 1959 un microfilm care conţine toate numerele prime mai mici decât $p_{6000000} = 101395301$.

Vom nota cu *P* mulţimea numerelor prime.

Teorema lui Euclid. *Mulţimea P este infinită.*

Demonstraţie. Să presupunem prin absurd că, mulţimea *P* este finită, $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ (unde în mod evident $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$ etc.). Vom considera $p = p_1 p_2 \dots p_n + 1$ şi să observăm că $p > 1$ iar $p_1 \nmid p$ pentru $1 \leq i \leq n$. Ţinând cont de teorema fundamentală a aritmeticii va exista un număr prim

$q > 1$ care să dividă pe *p*. Cum toate numerele prime sunt presupuse a fi doar $p_1, \dots, p_n$ deducem că $q = p_i$ pentru un $i \in \{1, \dots, n\}$, ceea ce este absurd căci, $p_i \nmid p$ pentru orice $1 \leq i < n$. Deci *P*, este mulţime infinită.

1.1 Numere prime gemene

Dacă *p* şi *p* + 2 sunt simultan numere prime, vom spune despre ele că sunt *gemene*. Exemple: (3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19) etc.

În 1949, Clément [Clément, P.A.: Congruences for sets of primes, Amer. Math. Monthly, 56, 1949, 23-25] a prezentat următorul rezultat legat de numerele prime gemene: Pentru $n \geq 2$, *n* şi $n + 2$ sunt simultan prime dacă şi numai dacă $4[(n-1)! + 1] + n \equiv 0\big(mod\ n(n+2)\big)$ (din păcate, din punct de vedere practic, acest rezultat nu are nicio utilitate).

Problema principală este de a decide dacă există sau nu o infinitate de numere prime gemene.

Dacă notăm pentru $x > 1$ prin $\pi_2(x) =$ numărul numerelor prime *p* astfel încât $p + 2$ este prim şi $p + 2 \leq x$, atunci Brun a demonstrat în 1920 că există un număr x_0 (efectiv calculabil) astfel încât pentru orice $x \geq x_0$ să avem $\pi_2(x) < \frac{100x}{(\lg x)^2}$.

Într-un articol celebru din 1010 (La serie $\frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} +$ ..., ou les denominateurs sont nombres premiers jumeaux este convergente ou finie, Bull. Sc. Math., vol. 43, pp. 100-104 şi 124-128) tot Brun a demonstrat că seria $B = \sum\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p+2}\right)$ (unde suma este extinsă după perechile de numere gemene (*p*, *p* + 2)) este convergentă sau mulţimea acestor numere gemene este finită. Numărul *B* poartă numele de *constanta lui Brun*, iar Shanks şi Wrench (în 1974) şi Brent (în 1976) au arătat că

$B \approx 1{,}90216054\dots$.

Printre cele mai mari numere prime gemene cunoscute amintim $1706595 \cdot 2^{11235} \pm 1$ şi $571305 \cdot 2^{7701} \pm 1$ ([38]) ca şi $665551035 \cdot 2^{80025} \pm 1$ (David Underbakke).

De aici rezultă că mulţimea numerelor prime gemene, dacă este infinită (lucru neprobat până acum), atunci ele se apropie foarte mult unele de altele.

1.2.Numere prime Fermat.

Piere Fermat (1601-1665) a studiat şirul $F_n = 2^n + 1$. Avem deci $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 65537$, $F_4 = 2294967297$ ş.a.m.d.

Observând că termenii şirului sunt relativ primi doi câte doi şi că F_0, F_1, F_2, F_3, F_4 sunt numere prime, el a emis conjectura că F_n este prim pentru orice $n \in \mathbb{N}$. În anul 1732, Euler a arătat că $F_5 = 2^{32} + 1 = 641 \cdot 6700417$. Prezentăm o demonstraţie simplă a faptului că 641 divide F_5.

Notăm $a = 2^7$ şi b = 5, deci $a - b^3 = 2$, $1 + ab - b^4 = 1 + 3b = 2^4$. Se obţine că:

$$2^{32} + 1 = (2a)^4 + 1) = (1 + ab - b^4)a^4 + 1 = (1 + ab)a^4 + 1 - a^4b^4$$

este divizibil cu 1 + ab = 641.

Până în prezent niciun număr F_n n-a fost identificat ca fiind prim, pentru $n \geq 5$.

Observaţie. Gauss a arătat că un poligon regulat cu n laturi poate fi construit cu rigla şi compasul dacă şi numai dacă n este de forma $n = 2^d p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_s$, unde p_i sunt prime distincte din şirul $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (pentru o demonstraţie elementară se poate consulta: H.G. Forder, (Fundamentele geometriei euclidiene", Editura Ştiinţifică, 1970). Până în prezent nu s-a demonstrat că există o infinitate de numere F_n reductibile.

Fermat a ajuns la studiul numerelor de forma F_n din mai multe considerente.

El a observat că dacă numărul $2^m + 1 (m \geq 1)$ este prim, atunci cu necesitate m este de forma m = 2^n cu $n \in \mathbb{N}$. Într-adevăr, dacă există un divizor impar k al lui m, atunci m = kt, $t \in \mathbb{N}$ şi atunci $2^m + 1 = (2^t)^k = (2^t + 1)[(2^t)^{k-1} - (2^t)^{k-2} + \cdots - 2^t + 1]$ contrazicând faptul că $2^m + 1$ este prim.

Pe de altă parte, tot Fermat a observat că numerele F_0, F_1, F_2, F_3 şi F_4 sunt prime, iar de aici el a tras concluzia pripită că F_n este număr prim pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Numai că Euler l-a contrazis, arătând că F_5 este compus avându-l ca divizor pe 641 (vom vedea mai târziu cum arată divizorii primi ai unui număr F_n). Iată însă rapid o soluţie a faptului că F_5 se divide prin 641. Avem:

$$F_5 = 2^{2^5} + 1 = 2^{28}(5^4 + 2^4) - (5 \cdot 2^7)^4 = 2^{28} \cdot 641 - (640^4 - 1)$$
$$= 2^{28} \cdot 641 - (640 - 1)(640 + 1)(640^2 + 1)$$
$$= 641\,[2^{28} - 639 \cdot (640^2 + 1)] = 641 \cdot 6700417.$$

Importanţa numerelor lui Fermat a început să crească datorită unui celebru rezultat al lui Gauss potrivit căruia un poligon regulat cu n laturi ($n > 3$) poate fi construit cu rigla şi compasul dacă şi numai dacă n este de forma $n = 2^k p_1 p_2 \dots p_r$ unde $k, r \in \mathbb{N}$, iar fiecare dintre numerele $3 \leq p_1 < p_2 < \cdots < p_r$ sunt numere Fermat prime.

Legat de mulţimea numerelor Fermat $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se pun mai multe probleme (nerezolvate încă!):

P1: În şirul $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ există o infinitate de numere prime?

P2: În şirul $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ există o infinitate de numere compuse?

Legat de P1 să amintim că în afară de numerele F_0, F_1, F_2, F_3, F_4 şi F_5 nu se mai cunoaşte un alt număr Fermat prim!

Legat de P2, să amintim că se cunosc peste 100 de numere Fermat compuse (cel mai mare fiind F_{23471} care are un număr de 10^{7000} cifre şi care se divide prin $5 \cdot 2^{23473} + 1$). Nu se ştie în schimb dacă F_{22} este prim sau compus.

1.3. Numere de tip Mersene

Definiţie. Un număr de forma $M_p = 2^p - 1$ cu p prim se numeşte număr al lui Mersenne (sau număr Mersenne).

O problemă interesantă o constituie stabilirea faptului dacă un anumit număr al lui Mersenne este număr prim sau nu.

Exemple,. $M_2 = 2^2 - 1 = 3$, $M_3 = 2^3 - 1 = 7$, $M_5 = 2^5 - 1 = 31$, $M_7 = 2^7 - 1 = 127$ sunt numere prime. În schimb M_{13}, M_{17}, M_{19} sunt prime.

Observaţie. Euler a stabilit (în anul 1750) că M_{31} este număr prim; Lucas a stabilit (în anul 1876) că M_{127} de asemenea prim; se ştie că dacă p este unul din numerele: 61, 89, 107, 257, 451, 607, 1279, 2203, 2281, 3217, 4253, 4423, 9689, 9941 ,11213 atunci numărul lui Mersenne corespunzător este prim. Cel mai mare număr prim cunoscut în mod explicit (în 1994) este M_p, cu p = 859433, număr ce are, în reprezentare zecimală, 258716 cifre.

Se numesc *numere de tip Mersenne*, numerele naturale de forma $M_n = 2^n - 1$. Astfel, $M_0 = 0$, $M_1 = 1$, $M_2 = 3$, $M_3 = 7$, $M_4 = 15$ etc. În mod evident, dacă n este compus, atunci M_n este compus, astfel că pentru ca M_n să fie prim cu necesitate şi n trebuie să fie prim. Cum $M_{11} = 2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$, tragem concluzia că pentru ca M_n să fie prim nu este suficient doar ca n să fie prim.

Marin Mersenne a trăit în secolul al XVII-lea (1588-1648), însă numerele ce-i poartă azi numele erau cunoscute încă din antichitate de Euclid.

Din păcate, nu se ştie până azi dacă există o infinitate de numere prime p, astfel încât M_p să fie prim după cum nici dacă există o infinitate de numere prime p pentru care M_p este compus. Unul din lucrurile importante care a impus studiul numerelor Mersenne este acela că cele mai mari numere prime cunoscute până acum sunt de tip Mersenne (se cunosc 42 de astfel de numere).

Iată un criteriu care ne permite să stabilim dacă un număr Mersenne este compus sau nu:

Propoziţie Fie p un număr prim, $p \geq 3$, astfel încât $q = 2p + 1$ este prim şi $p \equiv 3 (\text{mod } 4)$. Atunci $q \mid M_p$, deci M_p este compus.

Demonstraţie. Din $p = 4k + 3$ deducem că $q = 8k + 7$, deci $\left(\frac{2}{p}\right) = 1$, adică $2^{\frac{q-1}{2}} \equiv 1 (mod\ q) \Rightarrow 2^{q-1} \equiv 1 (mod\ q) \Rightarrow q | 2^{q-1} - 1$. ■

Observaţie. Din propoziţia de mai înainte deducem că:

23 | M_{11}, 47 | M_{23}, 167 | M_{83}, 263 | M_{131}, 2039 | M_{1019} etc.

Alte observaţii:

1. Nu se ştie încă dacă există o infinitate de numere Mersenne M_p cu p prim; cel mai mare număr Mersenne prim cunoscut este $M_{6972593}$ şi are 2098960 cifre (a fost determinat în 1999 de Nayan Hajratwala).
   1. Cel mai mare număr Mersenne comupus cunoscut este M_p cu p ? $39051 \cdot 2^{6001} - 1$ (care este prim); acest număr a fost pus în evidenţă în 1987 de A. Keller.

1.4. Numere de tip Fibonacci

Şirul lui Fibonacci: 0, 1,1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597… Acest şir exemplificat îşi are ca utilitate geometrică aplicaţiile în natură prin realizarea spiralei ce conţine proporţii şi simetrii perfecte la nivel microscopic şi macroscopic. Graţie aplicabilităţii şirului lui Fiobonacci avem un exemplu pertinent cum matematica intră în armonie cu natura. Numerele lui Fibonacci sunt foarte obişnuite la flori. Micile inflorenscenţe sunt dispuse sub forma unor spirale care merg în sensul acelor de ceasornic şi în sens invers. Numărul de spirale pe fiecare sens este număr Fibonacii. În acest caz, sunt exact 21 de spirale în sensul acelor de ceas şi 34 în sens invers.

sursa youtube

Numim *şir Fibonacci* şirul $(F_n)_{n\geq 1}$ definit prin $F_1 = F_2 = 1$ şi $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ pentru $n \geq 2$.

Acest şir de numere a fost introdus în anul 1228 de către matematicianul italian Leonardo Fibonacci, pornind de la studiul înmulţirii iepurilor de casă.

Ţinând cont că ecuaţia caracteristică ataşată şirului lui Fibonacci este $x^2 - x - 1 = 0$ cu rădăcinile $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ şi $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, deducem imediat că pentru orice $n \geq 1$,

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(x_2^n - x_1^n) = \frac{1}{2^n\sqrt{5}}\left[\left(1+\sqrt{5}\right)^n - \left(1-\sqrt{5}\right)^n\right]$$

Următorul rezultat conţine o serie de proprietăţi interesante ale şirului $(F_n)_{n\geq 1}$.

Propoziţie

(i) Pentru orice $m, n \geq 2$ are loc egalitatea $F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_mF_{n-1}$;

(ii) Pentru orice $n \geq 1$ avem $(F_n, F_{n+1}) = 1$;

(iii) Dacă $m \mid n$, atunci $F_m | F_n$;

(iv) Dacă $n \geq 5$ şi F_n este prim, atunci şi n este prim.

Demonstrație.

(i) Se face inducţie matematică după m (sau n).

(ii) Presupunem prin absurd că există $m \geq 1$, astfel încât $(F_m, F_{m+1}) = d > 1$ şi îl alegem pe m minim cu această proprietate. Cum $F_{m+1} = F_m + F_{m-1}$ deducem că $d|F_{m-1}$ şi atunci $(F_{m-1}, F_m) \geq d > 1$, contrazicând minimalitatea lui m.

(iii) Să presupunem că $m \mid n$, adică $n = mk$ cu $k \geq 1$. Cum $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(x_2^n - x_1^n)$ şi $F_m = \frac{1}{\sqrt{5}}(x_2^m - x_1^m)$ avem:

$$\frac{F_n}{F_m} = \frac{x_2^n - x_1^n}{x_2^m - x_1^m} = \frac{(x_2^m)^k - (x_1^m)^k}{x_2^m - x_1^m} = x_1^{m(k-1)} + x_1^{m(k-2)}x_2^m + \cdots + x_2^{m(k-1)}$$
$$= \left[x_1^{m(k-1)} + x_2^{m(k-1)}\right] + \left[x_1^{m(k-2)}x_2^m + x_1^m x_2^{m(k-2)}\right] + \cdots \in \mathbb{Z}$$

(deoarece din $x_1 + x_2 = 1$ şi $x_1 x_2 = -1$ deducem că $x_1^t + x_2^t \in \mathbb{Z}$ pentru orice $t \geq 1$), de unde concluzia.

(iv) Să presupunem prin absurd că n nu este prim; atunci $n = kt$ *cu* $k \geq 3$ şi din (i) deducem că $F_k|F_n$ (cu $F_k \geq 2$), contrazicând faptul că F_n este prim. ■

2.Alte cazuri speciale de numere

2.1.Numere perfecte

Un număr natural n se zice *perfect* dacă $\sigma(n) = 2n$ (adică suma $\sigma(n) - n$ a divizorilor săi naturali strict mai mici decât n este egală cu n).

Exemple: 6, 29, 496 sunt numere perfecte.

Numerele perfecte au fost studiate încă din antichitate, fiind cunoscute numerele perfecte mai mici decât 10 000 şi anume: 6, 28, 496 şi 8128.

Caracterizarea numerelor perfecte este dată de:

Propoziţie. Dacă un număr natural par n este perfect, atunci el este de forma $n = 2^q(2^{q+1} - 1)$, unde $2^{q+1} - 1$ este prim.

Demonstraţie. Putem scrie $b = 2^q \cdot u$, unde $q > 0$ iar u este impar. Numărul n, fiind perfect, avem $\sigma(n) = 2 \cdot n = 2^{q+1} \cdot u$. Dar, conform corolarului 13.9, avem:

$$\sigma(n) = \sigma(2^q \cdot u) = \sigma(2^q) \cdot \sigma(u) = (2^{q+1} - 1) \cdot \sigma(u)$$

Deci:

$$(2^{q+1} - 1) \cdot \sigma(u) = 2^{q+1} \cdot u \qquad (1)$$

Cum $2^{q+1} - 1$ este impar, rezultă că $2^{q+1}|\sigma(u)$, adică există un număr natural d astfel încât $\sigma(u) = 2^{q+1} \cdot d$. Relaţia (1) devine: $(2^{q+1} - 1) \cdot 2^{q+1} \cdot d = 2^{q+1} \cdot u$, de unde $u = (2^{q+1} - 1) \cdot d$.

Presupunând că $d \neq 1$, am obţine:

$$\sigma(u) \geq 1 + d + (2^{q+1} - 1) + d \cdot (2^{q+1} - 1) > d + d \cdot (2^{q+1} - 1) = d \cdot 2^{q+1} = \sigma(u)$$

Ceea ce este absurd. Prin urmare, $d = 2$, iar $u = 2^{q+1} - 1$ nu admite divizori diferiţi de 1 şi $2^{q+1} - 1$, adică u este prim, iar $n = 2^q \cdot (2^{q+1} - 1)$.

Observaţie. Nu se ştie dacă există numere perfecte impare. Se poate arăta relativ simplu că un astfel de număr ar trebui să aibă cel puţin patru factori primi distincţi. Pe de altă parte, se ştie că un număr perfect impar ar trebui să fie mai mare decât 2^{50}.

Suficienţa (Euclid). Dacă $n = 2^t(2^{t+1} - 1)$ cu $t \in \mathbb{N}$ şi $2^{t+1} - 1$ prim, atunci:

$\sigma(n) = \sigma\big(2^t(2^{t+1} - 1)\big) = \sigma(2^t) \cdot \sigma(2^{t+1} - 1) = (1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^t)\big(1 + (2^{t+1} - 1)\big) = (2^{t+1} - 1)2^{t+1} = 2^n$,adică n este perfect.

Astfel, numerele pare perfecte sunt strâns legate de numerele prime Mersenne; cum nu se ştie încă dacă există sau nu o infinitate de numere prime Mersenne, nu se ştie nici dacă există sau nu o infinitate de numere pare perfecte.

Legat de numerele impare perfecte, din păcate nu se ştie până acum nici dacă există astfel de numere!

Ne sunt totuşi date anumite rezultate ale lui Euler, Pomerance, Chein, Muskat, Grun, Touchard şi Perisastri legate de condiţii necesare ca un număr perfect să fie perfect.

Propoziţie. Dacă $2^p = 1, p \geq 2$ este prim, atunci $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ este un număr perfect.

Demonstraţie. Într-adevăr, dacă $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$, cu $a = 2^p - 1$ număr prim, atunci, putem scrie:

$$a(n) = \sigma\big(2^{p-1} \cdot (2^p - 1)\big) = \sigma(2^{p-1}) \cdot \sigma(2^p - 1)$$

deoarece numerele 2^{p-1} şi $2^p - 1$ sunt prime între ele. Ţinând seama de corolarul 13.9, avem: $\sigma(2^{p-1}) = 1 + 2^1 + \cdots + 2^{p-1} = \frac{2^p - 1}{2 - 1} = 2^p - 1$. Dar, dacă q este număr prim, atunci $\sigma(q) = 1 + q$, iar în cazul nostru $\sigma(2^p - 1) = 1 + (2^p - 1) = 2^p$,

Deci, $\sigma(n) = 2^p \cdot (2^p - 1) = 2 \cdot 2^p \cdot (2^p - 1) = 2n$.

Euler a demonstrat o reciprocă a acestei propoziţii:

Propoziţie. Dacă x şi b sunt numere naturale $x \geq 1, n \geq 2$, astfel încât $x^n - 1$ este număr prim, atunci x= 2, iar n este număr prim.

Demonstraţie. Din relaţia $x^n - 1 = (x - 1) \cdot (x^{n-1} + \cdots + x + 1)$ rezultă că pentru $x > 2$, numărul $x^n - 1$ este reductibil.

Dacă d este un divizor al lui n, $1 < d < n$, putem scrie $n = d \cdot m$, cu $m < 1$, iar relaţia

$$2^n - 1 = 2^{d \cdot m} - 1 = (2^d)^m - 1 = (2^d - 1) \cdot ((2^d)^{m-1} + \cdots + 2^d + 1)$$

Arată că $2^n - 1$ este ireductibil în acest caz. Propoziţia este demonstrată.

2.2.Numere pseudo-prime, absolut pseudo-prime şi Carmichael

Un număr natural compus n se zice:

i) *pseudo-prim* dacă $2^n \equiv 2(\text{mod } n)$;

ii) *absolut pseudo-prim* dacă pentru orice întreg a avem $a^n \equiv a(\text{mod } n)$;

iii) *număr Carmichael* dacă $a^{n-1} \equiv 1(\text{mod } n)$ pentru orice întreg a pentru care $(a, n) = 1$.

Legat de aceste numere, o concluzie este clară: aceste categorii de numere au apărut în strânsă legătură cu mica teoremă a lui Fermat (dacă p este prim, atunci pentru orice număr întreg a, $a^p \equiv a(\text{mod } p)$.

În particular, $2^p \equiv 2(\text{mod } p)$ pentru orice număr prim p.

Astfel, o întrebare se pune în mod natural: dacă $n \in \mathbb{N}$ şi $2^p \equiv 2(\text{mod } p)$ (adică n este pseudo-prim) rezultă că n este prim?

Pentru $n \leq 300$ se ştie (încă de acum 4500 de ani de matematicienii chinezi!) că răspunsul la întrebarea de mai sus este afirmativ.

Numai că pentru $n = 341$, avem că $2^{341} \equiv 2(\text{mod } 341)$ pe când 341 nu este prim, ci compus: $341 = 11 \cdot 31$.

Observaţii

1. Numerele pseudo-prime mai mici ca 10 000 sunt 341, 361 şi 1103.
2. H. Beezer a demonstrat că există o infinitate de numere pare ce sunt pseudo-perfecte, cel mai mic fiind $161038 = 2 \cdot 73 \cdot 1103$.
3. Există numere pseudo-prime ce sunt pătrate perfecte precum 1093^2 şi 3511^2; nu se ştie încă dacă există o infinitate de astfel de numere.

Legat de numerele pseudo-prime impare, avem următorul rezultat:

Teorema Dacă n este impar, pseudo-prim, atunci $N = 2^n - 1$ este pseudo-prim.

Demonstrație. Avem $2^{n-1} \equiv$ (mod n) şi deci $\frac{2^{n-1}-1}{n} = k \in \mathbb{N}$, astfel că:

$$2^{N-1} - 1 = 2^{2^n-2} - 1 = (2^n)^{2k} - 1 = (2^n - 1)\left(2^{n(2k-1)} + 2^{n(2k-2)} + \cdots + 1\right) \equiv 0 \ (mod\ N)$$

deci $2^N \equiv (mod\ N)$. ■

Corolar. Există o infinitate de numere pseudo-prime impare.

Ca exemple de numere absolut pseudo-prime avem pe 561 = 3 · 11 · 17 sau 275845 = 5 · 17 · 113 În schimb, numărul 341 nu este absolut pseudo-prim, deşi este pseudo-prim. Cel mai mic număr Carmichael este 561; alte exemple sunt: 1105, 1729, 2465, 2821, 6001 sau 8911; cel mai mare număr Carmichael cunoscut are 1057 cifre.

Nu se ştie însă dacă există sau nu o infinitate de numere Carmichael.

Este dată următoarea teoremă de caracterizare a numerelor Carmichael:

Teoremă. Un număr compus $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ este număr Carmichael dacă şi numai dacă sunt îndeplinite următoarele condiţii:

(i) n este impar;

(ii) $k \geq 3$;

(iii) $\alpha_i = 1$ şi $p_1 - 1 | n - 1$ pentru orice $1 \leq i \leq k$.

Demonstrație. „⇒” Presupunem că există $1 \leq i \leq k$ astfel încât $\alpha_i \geq 2$. Fie $a = p_1 p_2 \dots p_k + 1$ şi deci $(a, n) = 1$. Dacă $a^{n-1} \equiv 1$(mod n), atunci avem succesiv:

$$a^{n-1} \equiv 1(mod\ p_i^2) \Leftrightarrow (p_1 p_2 \dots p_k + 1)^{n-1} \equiv 1(mod\ p_i^2)$$
$$\Leftrightarrow C_{n-1}^0 (p_1 p_2 \dots p_k)^{n-1} + \cdots + C_{n-1}^{n-3} (p_1 p_2 \dots p_k)^2 + C_{n-1}^{n-2} (p_1 p_2 \dots p_k)^{n-2}$$
$$\equiv 0(mod\ p_i^2) \Leftrightarrow (n-1) p_1 p_2 \dots p_k \equiv 0(mod\ p_i^2).$$

Cum $(p_i^2, n) = 1$, rezultă contradicţia $p_i^2 | p_1 p_2 \dots p_k$ deci $\alpha_i = 1$ pentru orice $1 \leq i \leq k$, adică $n = p_1 p_2 \dots p_k$.

Fie b o rădăcină primitivă (mod p_i) şi $m = \frac{n}{p_i}$. Considerăm ecuaţia $b + \lambda p_i = \mu m + 1$. Deoarece $(p_i, m) = 1$, această ecuaţie are soluţia (λ_0, μ_0). Numărul $a = b + \lambda_0 p_i$ este rădăcina primitivă (mod p_i) şi în plus $(a, n) = 1$.

Avem deci $a^{n-1} \equiv 1(mod\, p_i)$ şi $n-1=(p_i-1)c_i+r_i, 0 \leq r_i < p_i-1$. Aşadar $a^{r_i} \equiv 1(mod\, p_i)$ şi cum a este rădăcină primitivă, rezultă $r_i=0$, adică $p_i-1|n-1$ pentru orice $1 \leq i \leq k$.

Cel puţin unul dintre factorii p_i este impar şi deci p_i-1 este par şi, cum $p_i-1|n-1$, rezultă că *n* este impar.

Pentru *k* = 2 avem $n=p_1p_2, p_1<p_2$. Fie *a* o rădăcină primitivă pentru p_2 şi în plus (*a*, *n*) = 1. Din $a^{p_1p_2-1} \equiv 1(mod\, p_2)$ rezultă că $a^{p_1(p_2-1)+p_1-1} \equiv 1(mod\, p_2)$ şi deci $a^{p_1-1} \equiv 1(mod\, p_2)$. Aceasta constituie o contradicţie, deoarece $p_1-1<p_2-1$ şi a este rădăcină primitivă.

„⇐" Fie (*a*, *n*) = 1. Rezultă $a^{p_i-1} \equiv 1(mod\, p_i)$ pentru orice $1 \leq i \leq k$ şi deci, notând $M = [p_1-1, p_2-1, \dots, p_k-1]$, rezultă $a^M \equiv 1(mod\, p_i)$, $1 \leq i \leq k$. Cum $n=p_1p_2 \dots p_k$, rezultă $a^M \equiv 1(mod\, n)$. Deoarece $p_i-1|n-1$ pentru orice $1 \leq i \leq k$ rezultă $M|n-1$ şi $a^{n-1} \equiv 1(mod\, n)$. ■

2.3.Numere triunghiulare

Un număr se numește triunghiular dacă corespunde cu numărul de puncte dintr-un triunghi echilateral umplut uniform de puncre. Spre exemplu trei puncte pot forma un triunghi prin urmare 3 este un număr triunghiular.Al n-lea număr triunghiular este numărul de puncte dintr-un triunghi cu n puncte pe latură.

Pentru $n \in \mathbb{N}$, al *n*-ulea număr triunghiular se defineşte ca fiind:

$$t_n = \frac{n(n+1)}{2} = 1+2+\cdots+n.$$

Iată câteva proprietăţi importante ale numerelor triunghiulare:

Teoremă

(1) Există o infinitate de numere triunghiulare care sunt pătrate perfecte;

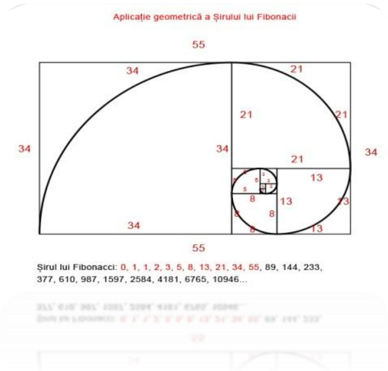
(2) Nu există numere triunghiulare care să fie puterea a patra a unui număr natural;

(3) Dacă $r \in \mathbb{Q}_+$ şi $\sqrt{r} \notin \mathbb{Q}_+$, atunci există m, n naturale astfel încât $r = \frac{t_m}{t_n}$;

(4) Dintre numerele $r \in \mathbb{Q}_+$ cu $\sqrt{r} \in \mathbb{Q}_+$ există o infinitate care se scriu sub forma $r = \frac{t_m}{t_n}$ şi o infinitate care nu se scriu sub această formă.

2.4.Numărul phi (numărul de aur)

Numărul phi denumit și numărul de aur este egal cu 1,6180339887… Este o veritabilă cheie ascunsă a universului. Dacă desenezi un dreptunghi cu laturile 1 şi phi vei avea un ”dreptunghi de aur” cum îl numesc artiştii, considerat de unii cel mai frumos dreptunghi posibil. Împarte-l în pătrat şi dreptunghi, iar dreptunghiul mai mic obţinut va fi tot unul de aur. Continuând aşa, vei obţine un model spirală. Această “spirală de aur” este asemănătoare cochiliei unui mic animal marin, numit nautilus dar, în fapt, cele două forme nu sunt chiar identice. Cochilia de nautilius devine de phi ori mai mare, la fiecare jumătate de rotaţie, în timp ce spirala de aur devine de phi ori mai mare la fiecare sfert de rotaţie.Dreptunghiurile de aur creează o spirală care se continuă la infinit.



De ce artiştii îl foloseau pe phi?

Acest număr a fost denumit φ (phi) fiind considerat încă din antichitate *raportul de aur sau numărul de aur*, datorită întâlnirii frecvente a acestui raport în lumea care ne înconjoară. Se află în raportul de aur oricare două numere care îndeplinesc condiţia de mai jos:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \varphi$$

Este deasemenea un număr iraţional calculat după formula: $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ =1,6180339887…

Leonardo da Vinci şi alţi artişti europeni din evul mediu au fost fascinaţi de matematică. Ei considerau că formele care îl includ pe phi au proporţiile cele mai plăcute vederii şi, de aceea, puneau aceste forme în picturile lor. Se crede deasemenea că arhitecţii Greciei antice se foloseau de phi în construcţii. Unii susţin că forma Pantenonului din Atena se bazează pe dreptunghiuri de aur. Vechii egipteni îl cunoşteau, de vreme ce Camera regelui din Marea Piramidă stă mărturie nepieritoare.

În "Elementele", *Euclid* enunţă problema:

" Să se taie o dreaptă dată aşa încât dreptunghiul cuprins între dreapta întreagă şi unul din segmente să fie egal cu pătratul segmentului rămas."

Rezolvarea acestei probleme ne duce la ecuaţia $x^2 - x - 1 = 0$, cu soluţiile $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ şi $\phi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, dintre care prima este tocmai raportul (numărul) de aur.

Numărul ϕ este singurul număr pozitiv din care, dacă scădem unitatea de dă inversul lui: $\phi - 1 = \frac{1}{\phi}$.

Originea şirului lui Fibonacci îşi are sorgintea în problema concepută de acesta, problemă cu următorul enunţ:

1. Un cuplu de iepuri adulţi reproduc un cuplu de iepuri în fiecare lună. Un iepure nou-născut devine adult după două luni. Câte perechi adulte există după *n* luni?

Din formularea problemei, rezultă că după 1, 2, 3, 4, 5, 6,… luni vor exista respectiv

1, 1, 2, 3, 5, 8, … cupluri adulte. Rezultă că modelul matematic al problemei lui Fibonacci este determinarea termenului general al şirului: 1, 1, 2, 3, 5, 8,…, definit prin relaţia de recurenţă:

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad n \geq 3, \ a_1 = 1, \ a_2 = 1$. Se poate demonstra că :

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right], \ \forall \, n \geq 1.$$

BIBLIOGRAFIE:

1. Ball J., Hai, Alege un număr, Ed. Litera Internaţional,2007
2. Shidlovsky, A.B., Transcendetal numbers, Walter de Gayter, 1989.
3. Tofan I., Elemente de Algebra, Ed. Universităţii, Iasi, 1998
4. www.google.ro
5. https:// www.mathmoreeasy.activehosted.com
6. https://matematicasiteologie.wordpress.com/2012/09/19/sirul-lui-fibonacci-una-din-cheile-de-acces-la-codul-sursa-al-creatiei-lui-dumnezeu/

Art 8000

2. Math Journal
-5-

Marin Chirciu [1]

Mathematical Journal prezintă o selecție de probleme recente din diverse publicații de specialitate .

Problema362.

If $x, y, z > 0$, $x + y + z = 3$ then

$$\sum \frac{x}{\sqrt{2x + yz}} \le \frac{3}{\sqrt{xy + yz + zx}} .$$

Nguyen Van Hoa, Vietnam, Mathematical Inequalities 2/2025

Soluție.

$$\sum \frac{x}{\sqrt{2x + yz}} = \sum \sqrt{x} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x + yz}} \overset{CBS}{\le} \sqrt{\sum x \sum \frac{x}{2x + yz}} = \sqrt{3\sum \frac{x}{2x + yz}} \overset{(1)}{\le} \frac{3}{\sqrt{xy + yz + zx}} = RHS ,$$

unde $\sqrt{3\sum \frac{x}{2x + yz}} \overset{(1)}{\le} \frac{3}{\sqrt{xy + yz + zx}} \Leftrightarrow \sum \frac{x}{2x + yz} \le \frac{3}{\sum yz} \overset{reverse}{\Leftrightarrow} \sum \frac{yz}{2x + yz} \ge 3 - \frac{6}{\sum yz}$, vezi

$$\sum \frac{yz}{2x + yz} = \sum \frac{y^2 z^2}{2xyz + y^2 z^2} \overset{CS}{\ge} \frac{\left(\sum yz\right)^2}{\sum \left(2xyz + y^2 z^2\right)} = \frac{\left(\sum yz\right)^2}{6xyz + \sum y^2 z^2} = \frac{\left(\sum yz\right)^2}{6xyz + \left(\sum yz\right)^2 - 2xyz\sum x} =$$

$$= \frac{\left(\sum yz\right)^2}{6xyz + \left(\sum yz\right)^2 - 2xyz \cdot 3} = \frac{\left(\sum yz\right)^2}{\left(\sum yz\right)^2} = 1 \overset{(2)}{\ge} 3 - \frac{6}{\sum yz} = RHS ,$$

unde $1 \overset{(2)}{\ge} 3 - \frac{6}{\sum yz} \Leftrightarrow \sum yz \le 3 \Leftrightarrow 3\sum yz \le \left(\sum x\right)^2 \Leftrightarrow \sum (x - y)^2 \ge 0$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = 1$.

Remarca.

If $x, y, z > 0$, $x + y + z = 3$ and $0 \le \lambda \le 2$ then

---

[1] *Profesor, Colegiul Național „Zinca Golescu”Pitești*

$$\sum \frac{x}{\sqrt{\lambda x+yz}} \le \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{(\lambda+1)(xy+yz+zx)}}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{x}{\sqrt{\lambda x+yz}} = \sum \sqrt{x}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\lambda x+yz}} \overset{CBS}{\le} \sqrt{\sum x \sum \frac{x}{\lambda x+yz}} = \sqrt{3\sum \frac{x}{\lambda x+yz}} \le$$

$$\le \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{(\lambda+1)(xy+yz+zx)}} = RHS.$$

Remarca.

In ΔABC

1). $$\sum \frac{1}{r_a\sqrt{6r_br_c+9rr_a}} \le \frac{1}{9r^2}.$$

Soluție.

Lema.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=3$ then

$$\sum \frac{x}{\sqrt{2x+yz}} \le \frac{3}{\sqrt{xy+yz+zx}}.$$

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum \frac{r}{r_a}=1 \Leftrightarrow \sum \frac{3r}{r_a}=3$.

Folosind **Lema** pentru $(x,y,z)=\left(\frac{3r}{r_a},\frac{3r}{r_b},\frac{3r}{r_c}\right)$ obținem: $\sum \frac{1}{r_a\sqrt{6r_br_c+9rr_a}} \le \frac{1}{9r^2}$.

2). $$\sum \frac{1}{h_a\sqrt{2h_bh_c+3rh_a}} \le \frac{1}{r\sqrt{3r\sum h_a}}.$$

Dezvoltări,Marin Chirciu

Problema363.

If $x,y,z>0$, $xy+yz+zx=3$ then

$$\sum \frac{yz}{\sqrt{x^2+3}} \le \frac{3}{2}.$$

Konstantinos Geronikolas, Greece

Soluție.

Lema.

If $x,y,z>0$, $xy+yz+zx=3$ then

$$\frac{yz}{\sqrt{x^2+3}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{yz}{x+y}+\frac{yz}{x+z}\right).$$

Demonstrație.

$$\frac{yz}{\sqrt{x^2+3}}=\frac{yz}{\sqrt{x^2+xy+yz+zx}}=\frac{yz}{\sqrt{(x+y)(x+z)}}\overset{AM-GM}{\le}\frac{1}{2}\left(\frac{yz}{x+y}+\frac{yz}{x+z}\right).$$

$$LHS=\sum\frac{yz}{\sqrt{x^2+3}}\le\sum\frac{1}{2}\left(\frac{yz}{x+y}+\frac{yz}{x+z}\right)=\frac{3}{2}=RHS\ .$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1$.

Remarca.

If $x,y,z,\lambda>0$, $xy+yz+zx=\lambda$ then

$$\sum\frac{yz}{\sqrt{x^2+\lambda}}\le\frac{3}{2}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{yz}{\sqrt{x^2+\lambda}}\le\sum\frac{1}{2}\left(\frac{yz}{x+y}+\frac{yz}{x+z}\right)=\frac{3}{2}=RHS\ .$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=\frac{\lambda}{3}$.

Remarca.

In ΔABC

$$1).\ \sum\frac{\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}}{\sqrt{\tan^2\frac{A}{2}+1}}\le\frac{3}{2}.$$

Soluție.

Lema.

If $x, y, z > 0$, $xy + yz + zx = 1$ then

$$\sum \frac{yz}{\sqrt{x^2+1}} \le \frac{3}{2}.$$

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} = 1$.

Folosind **Lema** pentru $(x, y, z) = \left(\tan\frac{A}{2}, \tan\frac{B}{2}, \tan\frac{C}{2}\right)$ obținem: $\sum \frac{\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}}{\sqrt{\tan^2\frac{A}{2}+1}} \le \frac{3}{2}$.

2). $\sum \frac{\cot B \cot C}{\sqrt{\cot^2 A+1}} \le \frac{3}{2}$.

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema364.

Rezolvați ecuația $\frac{1}{\sqrt{x^2+4}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+11}} = \frac{7}{11}$.

Concursul ”Florica T.Câmpan”, Iași, 2003

Soluție.

Dacă $|x| < 5 \Rightarrow$ LHS>RHS; dacă $|x| > 5 \Rightarrow$ LHS<RHS ,iar $x = \pm\sqrt{5}$ verifica ecuatia.

Multimea solutiilor ecuatiei este $S = \left\{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right\}$.

Remarca.

Rezolvați ecuația:

a). $\frac{1}{\sqrt{x^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+7}} = \frac{5}{6}$.

Soluție.

Multimea solutiilor ecuatiei este $S = \left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\}$.

b). $\frac{1}{\sqrt{x^2+4-\lambda}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+9-\lambda}} = \frac{5}{6}$,unde $0 < \lambda < 4$ este fixat.

Soluție.

Multimea solutiilor ecuatiei este $S=\left\{-\sqrt{\lambda},\sqrt{\lambda}\right\}$.

c)Rezolvați ecuația $\frac{1}{\sqrt{x^2+n^2-\lambda}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+(n+1)^2-\lambda}}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}$, unde $0<\lambda<n^2$ fixat, $n\in\mathbf{N}^*$.

Dezvoltări,Marin Chirciu

Soluție.

Multimea solutiilor ecuatiei este $S=\left\{-\sqrt{\lambda},\sqrt{\lambda}\right\}$.

Problema365.

Dacă $a,b\in\mathbf{Q}_+^*$ astfel încât $a^2+b^2=8n$, atunci n se poate scrie ca suma pătratelor a două numere raționale.

OL-2003-Sălaj

Soluție.

Avem $n=\left(\frac{a+b}{4}\right)^2+\left(\frac{a-b}{4}\right)^2=r_1^2+r_2^2$,unde $r_1=\frac{a+b}{4}\in\mathbf{Q},r_2=\frac{a-b}{4}\in\mathbf{Q}$.

Remarca.

a).Dacă $a,b\in\mathbf{Q}_+^*$ astfel încât $2\left(a^2+b^2\right)=9n$, atunci n se poate scrie ca suma pătratelor a două numere raționale.

Soluție.

Avem $n=\left(\frac{a+b}{3}\right)^2+\left(\frac{a-b}{3}\right)^2=r_1^2+r_2^2$,unde $r_1=\frac{a+b}{3}\in\mathbf{Q},r_2=\frac{a-b}{3}\in\mathbf{Q}$.

b).Dacă $a,b\in\mathbf{Q}_+^*$ astfel încât $a^2+b^2=18n$, atunci n se poate scrie ca suma pătratelor a două numere raționale.

Soluție.

Avem $n=\left(\frac{a+b}{6}\right)^2+\left(\frac{a-b}{6}\right)^2=r_1^2+r_2^2$,unde $r_1=\frac{a+b}{6}\in\mathbf{Q},r_2=\frac{a-b}{6}\in\mathbf{Q}$.

c).Dacă $a,b\in\mathbf{Q}_+^*$ astfel încât $2\left(a^2+b^2\right)=k^2n,k\in\mathbf{N}^*$, atunci n se poate scrie ca suma pătratelor a două numere raționale.

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Avem $n=\left(\frac{a+b}{k}\right)^2+\left(\frac{a-b}{k}\right)^2=r_1^2+r_2^2$,unde $r_1=\frac{a+b}{k}\in\mathbf{Q}, r_2=\frac{a-b}{k}\in\mathbf{Q}$.

Problema366.

Dacă $x\in\mathbf{R}$ astfel încât x^{16} și x^9 sunt numere raționale, atunci $x\in\mathbf{Q}$.

Mircea Fianu, București, OL-2003

Soluție.

Dacă $x=0$, atunci $x\in\mathbf{Q}$.

Dacă $x\neq 0$, atunci $x=\frac{\left(x^{16}\right)^4}{\left(x^9\right)^7}=\frac{p}{q}\in\mathbf{Q}$.

Remarca.

a). Dacă $x\in\mathbf{R}$ astfel încât x^{25} și x^7 sunt numere raționale, atunci $x\in\mathbf{Q}$.

Soluție.

Dacă $x=0$, atunci $x\in\mathbf{Q}$.

Dacă $x\neq 0$, atunci $x=\frac{\left(x^{25}\right)^2}{\left(x^7\right)^7}=\frac{p}{q}\in\mathbf{Q}$.

Remarca.

Dacă $x\in\mathbf{R}$ astfel încât x^5 și x^7 sunt numere raționale, atunci $x\in\mathbf{Q}$.

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Dacă $x=0$, atunci $x\in\mathbf{Q}$.

Dacă $x\neq 0$, atunci $x=\frac{\left(x^5\right)^3}{\left(x^7\right)^2}=\frac{p}{q}\in\mathbf{Q}$.

Problema367.

Arătați că

$$\sqrt{\underbrace{11...1}_{2n}-\underbrace{22...2}_{n}}\in\mathbf{N}, \forall n\in\mathbf{N}.$$

OL-2003-Brașov

Soluție.

$$\underbrace{11...1}_{2n}-\underbrace{22...2}_{n}=\underbrace{33...3}_{n}{}^2 \Rightarrow \sqrt{\underbrace{33...3}_{n}{}^2}=\underbrace{33...3}_{n}\in\mathbf{N}.$$

Problema368.

If $a,b,c>0$ then

$$\sum\frac{a^3}{b^2}\geq\sum\sqrt{ab}.$$

Gh. Crăciun, Mathematical Inequalities 2/2025

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{a^3}{b^2}\overset{Radon}{\geq}\frac{\left(\sum a\right)^3}{\left(\sum a\right)^2}=\sum a\overset{SOS}{\geq}\sum\sqrt{ab}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

Remarca.

If $a,b,c>0$ then

$$1).\ \sum\frac{a^4}{b^3}\geq\sum\sqrt{ab}.$$

$$2).\ \sum\frac{a^5}{b^4}\geq\sum\sqrt{ab}.$$

$$3).\ \sum\frac{a^{n+1}}{b^n}\geq\sum\sqrt{ab},\ n\in\mathbf{N}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema369.

If $a_1,a_2,...,a_n>0$ then

$$\sum a_1^2\sum a_1^3\leq\sum a_1\sum a_1^4.$$

Nguyen Viet Hung , Vietnam, Mathematical Inequalities 2/2025

Soluție.

Avem $\sum a_1^4 \sum a_1^2 \overset{Holder}{\geq} \left(\sum a_1^3\right)^2$ și $\sum a_1^3 \sum a_1 \overset{CBS}{\geq} \left(\sum a_1^2\right)^2 \Rightarrow \sum a_1 \sum a_1^4 \geq \sum a_1^2 \sum a_1^3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Problema370.

Find integers a, b, c, d such that

$$\sqrt[3]{a^2+b^2+c^2} + \sqrt{a+b+c} = d .$$

Number Theory 2/2025

Soluție.

$(a,b,c,d) = \left(3^{6k+1}, 3^{6k+1}, 3^{6k+1}, 3^{4k+1} + 3^{3k+1}\right), k \in \mathbf{Z}$.

Remarca.

Arătați că ecuația admite o infinitate de numere întregi a, b, c :

$$1)\ \sqrt[3]{a^2+2b^2} + \sqrt{a+2b} = c .$$

Soluție.

$(a,b,c) = \left(3^{6k+1}, 3^{6k+1}, 3^{4k+1} + 3^{3k+1}\right), k \in \mathbf{Z}$.

$$2)\ \sqrt[3]{a^2+b^2} + \sqrt{a+b} = c .$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

$(a,b,c) = \left(2^{6k+1}, 2^{6k+1}, 2^{4k+1} + 2^{3k+1}\right), k \in \mathbf{Z}$.

Problema371.

In $a, b, c, x, y > 0$

$$\sum \frac{1}{a(bx+cy)^2} \geq \frac{81}{(x+y)^2 (a+b+c)^3} .$$

D.M.Bătinețu-Giurgiu, Claudia Nănuți,RMM-2/2025

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{1}{a\left(bx+cy\right)^2}=\sum\frac{\frac{1}{\left(bx+cy\right)^2}}{a}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum\frac{1}{bx+cy}\right)^2}{\sum a}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\frac{9}{\sum\left(bx+cy\right)}\right)^2}{\sum a}=\frac{\left(\frac{9}{\left(x+y\right)\sum a}\right)^2}{\sum a}=$$

$$=\frac{81}{\left(x+y\right)^2\left(\sum a\right)^3}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

Remarca.

In $a,b,c,x,y>0$ and $n\in\mathbf{N}$

$$\sum\frac{1}{a\left(bx+cy\right)^n}\geq\frac{3^{n+2}}{\left(x+y\right)^n\left(\sum a\right)^{n+1}}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Pentru $n=0$ avem $\sum\frac{1}{a}\geq\frac{9}{\sum a}$, vezi $\sum\frac{1}{a}\overset{CS}{\geq}\frac{9}{\sum a}$.

Pentru $n=1$ avem $\sum\frac{1}{a\left(bx+cy\right)}\geq\frac{27}{\left(x+y\right)\sum a^2}$, vezi

$$\sum\frac{1}{a\left(bx+cy\right)}\overset{CS}{\geq}\frac{9}{\sum a\left(bx+cy\right)}=\frac{9}{\left(x+y\right)\sum ab}\overset{SOS}{\geq}\frac{27}{\left(x+y\right)\sum a^2}.$$

Pentru $n\geq 2$ folosim inegalitatea lui Holder.

Problema372.

If $a,b,c>0$, $a+b+c=1$ then

$$\sum\frac{\left(3a\right)^{2025}}{\left(b+1\right)\left(c+1\right)}\geq\frac{27}{16}.$$

George Apostolopoulos, Greece, Mathematical Inequalities 2/2025

Remarcă.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=1$, and $n\in\mathbf{N}$

$$\sum\frac{\left(3x\right)^n}{\left(y+1\right)\left(z+1\right)}\geq\frac{27}{16}.$$

Soluție

Lema.

If $x, y, z > 0$, $x + y + z = 1$, then

$$\prod(x+1) \le \frac{64}{27}.$$

Demonstrație

$\prod(x+1) \overset{AM-GM}{\le} \left[\frac{\sum(x+1)}{3}\right]^3 = \frac{64}{27}$, cu egalitate pentru $x = y = z = \frac{1}{3}$.

$$LHS = \sum\frac{(3x)^n}{(y+1)(z+1)} = 3^n\sum\frac{x^n}{(y+1)(z+1)} = 3^n\frac{\sum x^n(x+1)}{\prod(x+1)} \overset{Lema}{\ge} \frac{27}{16} = RHS$$

Remarcă.

If $x, y, z > 0$, $x + y + z = 1$, and $\lambda \ge 0$, $n \in \mathbf{N}$, $n \ge 2$ then

$$\sum\frac{(3x)^n}{(y+\lambda)(z+\lambda)} \ge \frac{27}{(3\lambda+1)^2}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Lema.

If $x, y, z > 0$, $x + y + z = 1$,

$$\prod(x+\lambda) \le \frac{(3\lambda+1)^3}{27}.$$

Demonstrație

Folosind **Lema** obținem: $\sum\frac{(3x)^n}{(y+\lambda)(z+\lambda)} \ge \frac{27}{(3\lambda+1)^2}$.

Problema373.

If $a, b, c > 0$, $\sum\frac{1}{25a^2+9} \le \frac{3}{34}$ then

$$abc \ge 1.$$

Nguyen Minh Tho, Vietnam, Mathematical Inequalities 2/2025

Soluție.

$$\frac{3}{34}\ge\sum\frac{1}{25a^2+9}=\sum\frac{b^2c^2}{25a^2b^2c^2+9b^2c^2}\overset{CS}{\ge}\frac{\left(\sum bc\right)^2}{\sum\left(25a^2b^2c^2+9b^2c^2\right)}=\frac{\sum b^2c^2+2abc\sum a}{75a^2b^2c^2+9\sum b^2c^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{3}{34}\ge\frac{\sum b^2c^2+2abc\sum a}{75a^2b^2c^2+9\sum b^2c^2}\Leftrightarrow 3\left(75a^2b^2c^2+9\sum b^2c^2\right)\ge 34\left(\sum b^2c^2+2abc\sum a\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 225a^2b^2c^2\ge 7\sum b^2c^2+68abc\sum a\Rightarrow 225a^2b^2c^2\ge 7\cdot 3\sqrt[3]{(abc)^3}+68abc\cdot 3\sqrt[3]{abc}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 75a^2b^2c^2\ge 75abc\sqrt[3]{abc}\Leftrightarrow abc\ge 1.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarca.

If $a,b,c>0$, $\sum\frac{1}{a^2+\lambda}\le\frac{3}{\lambda+1}$ and $0\le\lambda\le\frac{1}{2}$ then

$$abc\ge 1.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$\frac{3}{\lambda+1}\ge\sum\frac{1}{a^2+\lambda}=\sum\frac{b^2c^2}{a^2b^2c^2+\lambda b^2c^2}\overset{CS}{\ge}\frac{\left(\sum bc\right)^2}{\sum\left(a^2b^2c^2+\lambda b^2c^2\right)}=\frac{\sum b^2c^2+2abc\sum a}{3a^2b^2c^2+\lambda\sum b^2c^2}\Rightarrow abc\ge 1.$$

Problema374.

If $a,b>0$, $a^2+b^2+14ab\ge 81$ then

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}\ge 3.$$

Nguyen Minh Tho, Vietnam, Mathematical Inequalities 2/2025

Soluție.

Cu substituția $\left(\sqrt{a},\sqrt{b}\right)=(x,y)$ ipoteza se scrie: $a^2+b^2+14ab=x^4+y^4+14x^2y^2\ge 81$.

Avem $(x+y)^4=x^4+y^4+4xy\left(x^2+y^2\right)+6x^2y^2\overset{AM-GM}{\ge}x^4+y^4+4xy\cdot 2xy+6x^2y^2=$

$=x^4+y^4+14x^2y^2\ge 81$. Din $(x+y)^4\ge 81\Rightarrow x+y\ge 3\Rightarrow\sqrt{a}+\sqrt{b}\ge 3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=\frac{9}{4}$.

Remarca.

If $a,b>0$, $a^2+b^2+62ab\ge 729$ then

$$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\ge 3.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Cu substituția $\left(\sqrt[3]{a},\sqrt[3]{b}\right)=(x,y)$ ipoteza se scrie: $a^2+b^2+62ab=x^6+y^6+62x^3y^3\ge 729$.

Avem $(x+y)^6=x^6+y^6+6xy\left(x^4+y^4\right)+15x^2y^2\left(x^2+y^2\right)+20x^3y^3\overset{AM-GM}{\ge}$

$\overset{AM-GM}{\ge} x^6+y^6+6xy\cdot 2x^2y^2+15x^2y^2\cdot 2xy+20x^3y^3=x^6+y^6+62x^3y^3$.

Din $(x+y)^6\ge 729 \Rightarrow x+y\ge 3 \Rightarrow \sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\ge 3$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=\frac{27}{8}$.

Problema375.

If $a,b,c,d>0$, $abcd\le 1$ then

$$\sum\frac{1}{ab+1}\ge 2.$$

Imad Zak, Lebanon, Mathematical Inequalities

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{1}{ab+1}=\frac{1}{ab+1}+\frac{1}{bc+1}+\frac{1}{cd+1}+\frac{1}{da+1}=\left(\frac{1}{ab+1}+\frac{1}{cd+1}\right)+\left(\frac{1}{bc+1}+\frac{1}{da+1}\right)=$$

$$=\left(\frac{cd}{abcd+cd}+\frac{1}{cd+1}\right)+\left(\frac{da}{abcd+da}+\frac{1}{da+1}\right)\ge\left(\frac{cd}{1+cd}+\frac{1}{cd+1}\right)+\left(\frac{da}{1+da}+\frac{1}{da+1}\right)=$$

$=1+1=2=RHS$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=d=1$.

Remarca.

If $a,b,c,d>0$, $abcd=1$ then

$$\frac{1}{ab+1}+\frac{1}{bc+1}+\frac{1}{cd+1}+\frac{1}{da+1}=2.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$\sum\frac{1}{ab+1}=\frac{1}{ab+1}+\frac{1}{bc+1}+\frac{1}{cd+1}+\frac{1}{da+1}=\left(\frac{1}{ab+1}+\frac{1}{cd+1}\right)+\left(\frac{1}{bc+1}+\frac{1}{da+1}\right)=$$

$$=\left(\frac{cd}{abcd+cd}+\frac{1}{cd+1}\right)+\left(\frac{da}{abcd+da}+\frac{1}{da+1}\right)=\left(\frac{cd}{1+cd}+\frac{1}{cd+1}\right)+\left(\frac{da}{1+da}+\frac{1}{da+1}\right)=1+1=2$$

Problema376.

In ΔABC

$$\sum\frac{w_a}{w_b+w_c}\csc\frac{A}{2}\geq 3.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam, RMM 2/2025

Soluție.

Tripletele $\left(\frac{w_a}{w_b+w_c},\frac{w_b}{w_c+w_a},\frac{w_c}{w_a+w_b}\right)$ și $\left(\csc\frac{A}{2},\csc\frac{B}{2},\csc\frac{C}{2}\right)$ sunt la fel ordonate.

$$LHS=\sum\frac{w_a}{w_b+w_c}\csc\frac{A}{2}\overset{Chebyshev}{\geq}\frac{1}{3}\sum\frac{w_a}{w_b+w_c}\sum\csc\frac{A}{2}\overset{Nesbitt\&Jensen}{\geq}\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot 6=3=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarca.

In ΔABC

1) $\sum\frac{m_a}{m_b+m_c}\csc\frac{A}{2}\geq 3.$

2) $\sum\frac{h_a}{h_b+h_c}\csc\frac{A}{2}\geq 3.$

3) $\sum\frac{s_a}{s_b+s_c}\csc\frac{A}{2}\geq 3.$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema377.

If $a,b,c>1$, $a+b+c=6$ then

$$\sum \frac{a^2+1}{a-1} \geq 15.$$

Gh. Crăciun, Mathematical Inequalities 2/2025

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{a^2+1}{a-1} \overset{CS}{\geq} \frac{\left(\sum a\right)^2+9}{\sum(a-1)} = \frac{\left(\sum a\right)^2+9}{\sum a-3} = \frac{6^2+9}{6-3} = \frac{45}{3} = 15 = RHS.$$

Remarca.

If $a,b,c>1$, $a+b+c=6$ and $n \in \mathbf{N}$ then

$$\sum \frac{a^n+1}{a-1} \geq 3\left(2^n+1\right).$$

Marin Chirciu

Soluție.

Pentru $n=0$ avem $\sum \frac{2}{a-1} \geq 6$, vezi $\sum \frac{2}{a-1} \overset{CS}{\geq} \frac{2\cdot 9}{\sum(a-1)} = \frac{18}{3} = 6$.

Pentru $n=1$ avem $\sum \frac{a+1}{a-1} \geq 9$, vezi $\sum \frac{a}{a-1} + \sum \frac{1}{a-1} \overset{TLM\&CS}{\geq} \sum(4-a) + \frac{9}{\sum(a-1)} = 6+3 = 9$.

Pentru $n \geq 2$ folosim inegalitatea lui Holder.

Problema378.

In acute ΔABC

$$\sum \cos B \cos C \leq \frac{1}{2} + 2\prod \cos A.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam, RMM 2/2025

Soluție.

Folosind $\sum \cos B \cos C = \frac{p^2+r^2-4R^2}{4R^2}$ și $\prod \cos A = \frac{p^2-(2R+r)^2}{4R^2}$ inegalitatea se scrie:

$\frac{p^2+r^2-4R^2}{4R^2} \leq \frac{1}{2} + 2\cdot\frac{p^2-(2R+r)^2}{4R^2} \Leftrightarrow p^2 \geq 2R^2+8Rr+3r^2$, (Walker).

Remarca.

In acute ΔABC

$$1).\sum \cos B\cos C\le \frac{6-\lambda}{8}+\lambda\prod \cos A, 1\le\lambda\le 2.$$

$$2).\sum \cos B\cos C\le \frac{7}{8}+\prod \cos A.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema379.

In ΔABC

$$\sum \cos A+2\sum \sec^2\frac{A}{2}\ge 19.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam,RMM 2/2025

Soluție.

Folosind identitățile în triunghi $\sum \cos A=1+\frac{r}{R}$ și $\sum \sec^2\frac{A}{2}=1+\frac{(4R+r)^2}{p^2}$ inegalitatea se scrie:

$1+\frac{r}{R}+2\left(1+\frac{(4R+r)^2}{p^2}\right)\ge 19 \Leftrightarrow \frac{(4R+r)^2}{p^2}\ge\frac{13}{3}-\frac{r}{R}$, vezi $p^2\le\frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}$.

Remarca.

In ΔABC

$$1).\sum \cos A+\lambda\sum \sec^2\frac{A}{2}\ge 4\lambda+\frac{3}{2}, \lambda\ge\frac{1}{2}.$$

$$2).\sum \cos A+\frac{1}{2}\sum \sec^2\frac{A}{2}\ge\frac{7}{2}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema380.

If $a,b>0$ then

$$(a^2+b^2)(a^3+b^3)\le(a+b)(a^4+b^4).$$

Mathematical Inequalities 2/2025

Soluție.

$\left(a^2+b^2\right)\left(a^3+b^3\right)\leq(a+b)\left(a^4+b^4\right)\Leftrightarrow a^4b+ab^4\geq a^3b^2+a^2b^3\Leftrightarrow ab(a-b)\left(a^2-b^2\right)\geq 0$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b$.

Remarca.

If $a,b>0$ and $n\in\mathbf{N}$ then

$$\left(a^n+b^n\right)\left(a^{n+1}+b^{n+1}\right)\leq(a+b)\left(a^{2n}+b^{2n}\right).$$

Marin Chirciu

Soluție.

Pentru $n=0$ se obține egalitatea $2(a+b)=2(a+b)$.

În continuare fie $n\in\mathbf{N}^*$.

$\left(a^n+b^n\right)\left(a^{n+1}+b^{n+1}\right)\leq(a+b)\left(a^{2n}+b^{2n}\right)\Leftrightarrow a^{2n}b+ab^{2n}\geq a^{n+1}b^n+a^nb^{n+1}\Leftrightarrow$
$ab\left(a^n-b^n\right)\left(a^{n-1}-b^{n-1}\right)\geq 0$, deoarece factorii $\left(a^n-b^n\right)$ și $\left(a^{n-1}-b^{n-1}\right)$ au același semn.

Problema381.

Solve in $\mathbf{N}$ the equation

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{7}.$$

Mathematics 2/2025.

Soluție.

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{7}\Leftrightarrow(x-7)(y-7)=49$, $49=1\cdot 49=49\cdot 1=7\cdot 7$.

Cazul1). $\begin{cases}x-7=49\\ y-7=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=56\\ y=8\end{cases}$; Cazul2). $\begin{cases}x-7=1\\ y-7=49\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=8\\ y=56\end{cases}$.

Cazul3). $\begin{cases}x-7=7\\ y-7=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=14\\ y=14\end{cases}$.

Mulțimea soluțiilor ecuației este $S=\{(8,56),(56,8),(14,14)\}$.

Remarca.

Solve in $\mathbf{N}$ the equation

1). $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{11}$.

Soluție.

Mulțimea soluțiilor ecuației este $S=\{(12,132),(132,12),(22,22)\}$.

2). $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{p}$, p is a prime number fixed.

Marin Chirciu

Soluție.

Mulțimea soluțiilor ecuației este $S=\{(p+1,p(p+1)),(p(p+1),p+1),(2p,2p)\}$.

Problema382.

If $x,y>0$, $x+y=8$ then

$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{8+\sqrt{xy}}\geq\frac{1}{3}.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam,RMM 2/2025

Soluție.

$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{8+\sqrt{xy}}\geq\frac{1}{3}\overset{x+y=8}{\Leftrightarrow}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{8-x}}{8+\sqrt{x(8-x)}}\geq\frac{1}{3}.$$

Fie $f(x)=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{8-x}}{8+\sqrt{x(8-x)}}$, $0<x<8$. $f'(x)=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{8-x}}{32\left[2x(8-x)+\sqrt{x(8-x)}\right]}$, $f'(x)=0\Leftrightarrow x=4$.

Obținem $f'\downarrow, x<4$ și $f'\uparrow, x>4$ iar $f'(4)=0\Rightarrow f(x)\geq\frac{1}{3}$, cu egal pentru $x=4$

Remarca.

If $x,y,a>0$, $x+y=2a$ then

$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2a+\sqrt{xy}}\geq\frac{2}{3\sqrt{a}}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2a+\sqrt{xy}} \geq \frac{2}{3\sqrt{a}} \overset{x+y=8}{\Leftrightarrow} \frac{\sqrt{x}+\sqrt{2a-x}}{2a+\sqrt{x(2a-x)}} \geq \frac{2}{3\sqrt{a}}.$$

Problema383.

If $x, y, z > 0$, $xyz = 1$ then

$$\sum \frac{1}{x^3+x^2+1} \geq 1.$$

Rahim Shahbazov, Mathematical Inequalities 2/2025

Soluție.

Substituția $(x, y, z) = \left(\frac{bc}{a^2}, \frac{ca}{b^2}, \frac{ab}{c^2}\right) \Rightarrow \sum \frac{1}{\left(\frac{bc}{a^2}\right)^3 + \left(\frac{bc}{a^2}\right)^2 + 1} \geq 1 \Leftrightarrow \sum \frac{a^6}{b^3c^3 + a^2b^2c^2 + a^6} \geq 1,$

care rezultă din $\sum \frac{a^6}{b^3c^3+a^2b^2c^2+a^6} \overset{CS}{\geq} \frac{\left(\sum a^3\right)^2}{\sum\left(b^3c^3+a^2b^2c^2+a^6\right)} = \frac{\sum a^6 + 2\sum b^3c^3}{\sum b^3c^3 + 3a^2b^2c^2 + \sum a^6} \overset{(1)}{\geq} 1,$

unde $\frac{\sum a^6 + 2\sum b^3c^3}{\sum b^3c^3 + 3a^2b^2c^2 + \sum a^6} \overset{(1)}{\geq} 1 \Leftrightarrow \sum a^6 + 2\sum b^3c^3 \geq \sum b^3c^3 + 3a^2b^2c^2 + \sum a^6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sum b^3c^3 \geq 3a^2b^2c^2$, veziAM-GM.

Remarca.

If $x, y, z > 0$, $xyz = 1$ and $0 \leq \lambda \leq 1$ then

$$\sum \frac{1}{x^3+x^2+\lambda} \geq \frac{3}{\lambda+2}.$$

Marin Chirciu

Problema384.

If $a, b, c > 0$, $abc = 1$ then

$$8\left(\sum a\right)^2 \geq 9\prod(a+1).$$

THCS 2/2025

Soluție.

Lema.

If $a,b,c>0$, $abc=1$ then

$$\prod(a+1)\le\frac{4}{3}\left(\sum a+\sum\frac{1}{a}\right).$$

Demonstrație.

$$3\prod(a+1)=3\left(1+\sum a+\sum ab+abc\right)=3\left(1+\sum a+\sum\frac{1}{a}+1\right)=6+3\left(\sum a+\sum\frac{1}{a}\right)\le$$

$$\le\left(\sum a+\sum\frac{1}{a}\right)+3\left(\sum a+\sum\frac{1}{a}\right)=4\left(\sum a+\sum\frac{1}{a}\right)\Rightarrow\prod(a+1)\le\frac{4}{3}\left(\sum a+\sum\frac{1}{a}\right).$$

$$LHS=8\left(\sum a\right)^2=8\left(\sum a^2+2\sum ab\right)=8\left(\sum a^2+2\sum\frac{1}{a}\right)=4\sum\left(a^2+a^2+\frac{1}{a}\right)+12\sum\frac{1}{a}\overset{AM-GM}{\ge}$$

$$\overset{AM-GM}{\ge}4\sum3\sqrt[3]{a^2\cdot a^2\cdot\frac{1}{a}}+12\sum\frac{1}{a}=12\sum a+12\sum\frac{1}{a}=12\left(\sum a+\sum\frac{1}{a}\right)\overset{Lema}{\ge}12\cdot\frac{3}{4}\prod(a+1)=$$

$$=9\prod(a+1)=RHS.$$

Remarca.

If $a,b,c>0$, $a+b+c=1$ then

$$1).\ \prod(a+\lambda)\le\lambda^3+\lambda^2+\frac{\lambda}{3}+\frac{1}{27},\ \lambda\ge0.$$

$$2)\ \prod(x+1)\le\left(\frac{4}{3}\right)^3.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Remarca.

În ΔABC

$$1).\ \prod\left(\frac{r}{r_a}+1\right)\le\left(\frac{4}{3}\right)^3.$$

Soluție.

Lema.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=1$ then

$$\prod(x+1)\le\left(\frac{4}{3}\right)^3.$$

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum \frac{r}{r_a} = 1$.

Folosind **Lema** pentru $(x, y, z) = \left(\frac{r}{r_a}, \frac{r}{r_b}, \frac{r}{r_c} \right)$ obținem: $\prod \left(\frac{r}{r_a} + 1 \right) \leq \left(\frac{4}{3} \right)^3$.

$$2). \prod \left(\frac{r}{h_a} + 1 \right) \leq \left(\frac{4}{3} \right)^3.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema385.

If $a, b, c > 0$, $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ then

$$\sum \frac{a}{a + bc} \leq \frac{3}{1 + abc}.$$

Kostas Geronikolas, Greece, Mathematical Inequalities2 2/2020

Soluție.

$$\sum \frac{a}{a + bc} \leq \frac{3}{1 + abc} \Leftrightarrow \sum \left(\frac{a}{a + bc} - 1 \right) \leq \frac{3}{1 + abc} - 3 \Leftrightarrow \sum \frac{bc}{a + bc} \geq \frac{3abc}{1 + abc} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \sum \frac{1}{a^2 + abc} \geq \frac{3}{1 + abc}$, care rezultă din:

$$\sum \frac{1}{a^2 + abc} \overset{CS}{\geq} \frac{9}{\sum (a^2 + abc)} = \frac{9}{\sum a^2 + 3abc} = \frac{9}{3 + 3abc} = \frac{3}{1 + abc}.$$

Remarca.

If $a, b, c > 0$, $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ and $\lambda \geq 0$ then

$$\sum \frac{a}{a + \lambda bc} \leq \frac{3}{1 + \lambda abc}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Dacă $\lambda = 0$ se obține egalitatea 3=3.

În continuare fie $\lambda > 0$.

$$\sum \frac{a}{a + \lambda bc} \leq \frac{3}{1 + \lambda abc} \Leftrightarrow \sum \left(\frac{a}{a + \lambda bc} - 1 \right) \leq \frac{3}{1 + \lambda abc} - 3 \Leftrightarrow \sum \frac{\lambda bc}{a + \lambda bc} \geq \frac{3\lambda abc}{1 + \lambda abc} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum \frac{1}{a^2+abc} \geq \frac{3}{1+abc}.$$

Problema386.

In acute ΔABC, $a+b+c=3$ then:

$$\sum \frac{a^2}{\cos A} \geq 6.$$

Gh. Crăciun, MathAteler 2/2025

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{a^2}{\cos A} \overset{CS}{\geq} \frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum \cos A} \overset{(1)}{\geq} \frac{(3)^2}{\frac{3}{2}} = 6 = RHS \text{ , unde(1) } \sum \cos A \leq \frac{3}{2}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral cu latura de lungime 1..

Remarca.

In acute ΔABC, $a+b+c=3$ and $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$

$$1).\ \sum \frac{a^n}{\cos A} \geq 6.$$

$$2).\ \sum \frac{a^n}{\cos A} \geq 6\left(\frac{2p}{3}\right)^n.$$

$$3).\ \sum \frac{a^n}{\cos B+\cos C} \geq 3\left(\frac{2p}{3}\right)^n.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema387.

In ΔABC

$$\sum \frac{a}{w_b+w_c} \geq \sqrt{3}.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam, RMM 2/2025

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{a}{w_b+w_c}=\sum\frac{a^2}{a\left(w_b+w_c\right)}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum a\left(w_b+w_c\right)}=\frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum w_a\left(b+c\right)}=\frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum\left(b+c\right)\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}}=$$

$$=\frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum 2bc\cos\frac{A}{2}}=\frac{\left(\sum a\right)^2}{2\sum bc\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}}=\frac{\left(\sum a\right)^2}{2\sum\sqrt{p(p-a)bc}}\overset{CBS}{\geq}\frac{\left(\sum a\right)^2}{2\sqrt{\sum p(p-a)\sum bc}}=$$

$$=\frac{\left(\sum a\right)^2}{2\sqrt{p^2\sum bc}}=\frac{\left(\sum a\right)^2}{2p\sqrt{\sum bc}}=\frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum a\sqrt{\sum bc}}=\frac{\sum a}{\sqrt{\sum bc}}\overset{(1)}{\geq}\sqrt{3}=RHS,$$

unde $\frac{\sum a}{\sqrt{\sum bc}}\overset{(1)}{\geq}\sqrt{3}\Leftrightarrow\sum a\geq\sqrt{3}\sqrt{\sum bc}\Leftrightarrow\left(\sum a\right)^2\geq 3\sum bc\Leftrightarrow\sum(a-b)^2\geq 0$.

Remarca.

In ΔABC

$$\sum\left(\frac{a}{w_b+w_c}\right)^n\geq\frac{3}{\sqrt{3^n}},n\in\mathbf{N}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Pentru $n=0$ se obține egalitatea3=3.

Pentru $n=1$ se obține **Lema**.

Pentru $n\geq 2$ se folosește inegalitatea lui Holder.

Remarca.

In ΔABC

$$\sum\frac{ab^2}{w_b+w_c}\geq\frac{4}{p}\left(\sqrt{3}F\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{ab^2}{w_b+w_c}=\sum\frac{a^2b^2}{a\left(w_b+w_c\right)}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum ab\right)^2}{\sum a\left(w_b+w_c\right)}=\frac{\left(\sum ab\right)^2}{\sum w_a\left(b+c\right)}=\frac{\left(\sum ab\right)^2}{\sum\left(b+c\right)\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}}=$$

$$=\frac{\left(\sum ab\right)^2}{\sum 2bc\cos\frac{A}{2}}=\frac{\left(\sum ab\right)^2}{2\sum bc\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}}=\frac{\left(\sum ab\right)^2}{2\sum\sqrt{p(p-a)bc}}\overset{CBS}{\geq}\frac{\left(\sum ab\right)^2}{2\sqrt{\sum p(p-a)\sum bc}}=$$

$$=\frac{\left(\sum ab\right)^2}{2\sqrt{p^2\sum bc}}=\frac{\left(\sum bc\right)^2}{2p\sqrt{\sum bc}}=\frac{1}{2p}\left(\sum bc\right)^{\frac{3}{2}}\overset{Gordon}{\geq}\frac{1}{2p}\left(4\sqrt{3}F\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{4}{p}\left(\sqrt{3}F\right)^{\frac{3}{2}}=RHS,$$

unde $\frac{\sum a}{\sqrt{\sum bc}}\overset{(1)}{\geq}\sqrt{3}\Leftrightarrow\sum a\geq\sqrt{3}\sqrt{\sum bc}\Leftrightarrow\left(\sum a\right)^2\geq 3\sum bc\Leftrightarrow\sum(a-b)^2\geq 0$.

Problema388.

If $\sqrt{0,4444...}=\frac{p}{q}$ then find $p+q$.

Mathematics 2/2025.

Soluție.

$$\sqrt{0,4444...}=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}=\frac{p}{q}\Rightarrow p+q=2+3=5.$$

Remarca.

If $\sqrt{0,111...}=\frac{p}{q}$ then find $p+q$.

Marin Chirciu

Soluție.

$$\sqrt{0,111...}=\sqrt{\frac{1}{9}}=\frac{1}{3}=\frac{p}{q}\Rightarrow p+q=1+3=4.$$

Problema389.

Deterrminați numerele de forma $\overline{abcd}$, știind că $\overline{ab}$ împărțit la $\overline{cd}$ dă restul31,iar $\overline{cd}$ împărțit la $\overline{ab}$ dă restul 2.

Ionela Turturean, Satu Mare, OL-2025-Mehedinți

Soluție.

Folosind teorema împărțirii cu rest obținem $\begin{cases}\overline{ab}=\overline{cd}\cdot c_1+31, 31<\overline{cd}\\ \overline{cd}=\overline{ab}\cdot c_2+2, 2<\overline{ab}\end{cases}$.

Convin $\overline{ab}=31$, $c_1=0$, $\overline{cd}=33$, $c_2=1$. Deducem că $\overline{abcd}=3133$.

1). Deterrminați numerele de forma $\overline{abcd}$, știind că $\overline{ab}$ împărțit la $\overline{cd}$ dă restul 23,iar $\overline{cd}$ împărțit la $\overline{ab}$ dă restul 5.

Soluție.

Deducem că $\overline{abcd}=2328$.

2).Deterrminați numerele de forma $\overline{abcd}$, știind că $\overline{ab}$ împărțit la $\overline{cd}$ dă restul 97,iar $\overline{cd}$ împărțit la $\overline{ab}$ dă restul 2.

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Deducem că $\overline{abcd}=9799$.

Problema390.

If $x,y,z\in\mathbf{R}$ and $\begin{cases}x^2+4y^2+16z^2=48\\ xy+4yz+2zx=24\end{cases}$, then find $x^2+y^2+z^2$.

Marocan Math Olympiad.

Soluție.

Se înmulțește prima ecuație cu 2, a doua ecuație cu 4 și se scad membru cu membru.

Obținem $(x-2y)^2+2(y-2z)^2+(x-4z)^2=0 \Leftrightarrow x-2y=0, y-2z=0, x-4z=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2=16, y^2=4, z^2=1 \Rightarrow x^2+y^2+z^2=16+4+1=21$. Deducem că $x^2+y^2+z^2=21$.

Remarca.

If $x,y,z\in\mathbf{R}$ and $\begin{cases}x^2+\lambda^2y^2+n^2z^2=6k\\ xy+nyz+\lambda x=3k\end{cases}$, then find $x^2+y^2+z^2$.

Marin Chirciu

Soluție.

Obținem $x^2+y^2+z^2=21$.

Problema391.

If $x,y,z>0$, $xyz=1$ then

$$\left(\sum \frac{x}{1+x+xy}\right)^3 \le \sum \frac{x^3}{1+x+xy}.$$

Daniel Sitaru,RMM 2/2025

Soluție.

Lema.

If $x>0$ then

$$\sum \frac{1}{1+x+xy}=1.$$

Demonstrație.

$$\sum \frac{1}{1+x+xy}=\frac{1}{1+x+xy}+\frac{x}{1+x+xy}+\frac{xy}{1+x+xy}=1.$$

$$RHS=\sum \frac{x^3}{1+x+xy}=\sum \frac{x^3}{1+x+xy}\cdot\sum \frac{1}{1+x+xy}\cdot\sum \frac{1}{1+x+xy}\overset{Holder}{\ge}\left(\sum \frac{x}{1+x+xy}\right)^3=LHS.$$

Remarca.

If $x,y,z>0$, $xyz=1$ and $n\in\mathbf{N}$ then

$$\left(\sum \frac{x}{1+x+xy}\right)^n \le \sum \frac{x^n}{1+x+xy}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema.

If $x>0$ then

$$\sum \frac{1}{1+x+xy}=1.$$

$$RHS=\sum \frac{x^n}{1+x+xy}=\sum \frac{x^n}{1+x+xy}\cdot\underbrace{\sum \frac{1}{1+x+xy}\cdot\ldots\cdot\sum \frac{1}{1+x+xy}}_{n-1}\overset{Holder}{\ge}\left(\sum \frac{x}{1+x+xy}\right)^n=LHS.$$

Problema392.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=3$ then

$$\sum \frac{x}{\sqrt{17x+8}} \le \frac{3}{5}.$$

Nguyen Minh Tho, Vietnam,THCS 2/2025

Soluție.

Lema.

If $x>0$ then

$$\frac{x}{\sqrt{17x+8}} \le \frac{33x+17}{250}.$$

Demonstrație.

$$\frac{x}{\sqrt{17x+8}} \le \frac{33x+17}{250} \Leftrightarrow \frac{x^2}{17x+8} \le \frac{(33x+17)^2}{62500} \Leftrightarrow 17(x-1)^2(33^2x+136) \ge 0.$$

$$LHS = \sum \frac{x}{\sqrt{17x+8}} \overset{Lema}{\le} \sum \frac{33x+17}{250} = \frac{33\sum x+51}{250} = \frac{33\cdot 3+51}{250} = \frac{3}{5} = RHS.$$

Remarca.

If $x, y, z > 0$, $x+y+z=3$ and $\lambda \ge 0$ then

$$\sum \frac{x}{\sqrt{x+\lambda}} \le \frac{3}{\sqrt{\lambda+1}}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema.

If $x>0$ then

1). $\frac{x}{\sqrt{x+\lambda}} \le \frac{(2\lambda+1)x+1}{2(\lambda+1)\sqrt{\lambda+1}}$, $\lambda \ge 0$.

$$LHS = \sum \frac{x}{\sqrt{x+\lambda}} \overset{Lema}{\le} \sum \frac{(2\lambda+1)x+1}{2(\lambda+1)\sqrt{\lambda+1}} = \frac{(2\lambda+1)\sum x+3}{2(\lambda+1)\sqrt{\lambda+1}} = \frac{(2\lambda+1)\cdot 3+3}{2(\lambda+1)\sqrt{\lambda+1}} = \frac{3}{\sqrt{\lambda+1}} = RHS.$$

2). $\sum \frac{x}{\sqrt{x+3}} \le \frac{3}{2}$.

Marin Chirciu

Soluție.

Lema.

If $x > 0$ then

$$\frac{x}{\sqrt{x+3}} \le \frac{7x+1}{16}.$$

Demonstrație.

$$\frac{x}{\sqrt{x+3}} \le \frac{7x+1}{16} \Leftrightarrow 49x^3 - 96x^2 + 43x + 3 \ge 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(49x+3) \ge 0.$$

$$LHS = \sum \frac{x}{\sqrt{x+3}} \overset{Lema}{\le} \sum \frac{7x+1}{16} = \frac{7\sum x+3}{16} = \frac{7\cdot 3+3}{16} = \frac{24}{16} = \frac{3}{2} = RHS.$$

Remarca.

In ΔABC

$$1).\ \sum \frac{1}{\sqrt{3r_a(r+r_a)}} \le \frac{1}{2r}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema.

If $x, y, z > 0$, $x+y+z=3$ then

$$\sum \frac{x}{\sqrt{x+3}} \le \frac{3}{2}.$$

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum \frac{r}{r_a} = 1 \Leftrightarrow \sum \frac{3r}{r_a} = 3$

Folosind **Lema** pentru $(x, y, z) = \left(\frac{3r}{r_a}, \frac{3r}{r_b}, \frac{3r}{r_c}\right)$ obținem: $\sum \frac{1}{\sqrt{3r_a(r+r_a)}} \le \frac{1}{2r}$.

$$2).\ \sum \frac{1}{\sqrt{3h_a(r+h_a)}} \le \frac{1}{2r}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema393.

If $a,b,c>0$ then

$$\sum \frac{a^3}{b^2} \geq \sum \frac{a^2}{b}$$

JBMO-ShortList 2002

Soluție.

Lema.

If $a,b,c>0$ then

$$\frac{a^3}{b^2} \geq \frac{a^2}{b} + a - b.$$

Demonstrație.

$\frac{a^3}{b^2} \geq \frac{a^2}{b} + a - b \Leftrightarrow (a+b)(a-b)^2 \geq 0$, cu egalitate dacă $a=b$.

$LHS = \sum \frac{a^3}{b^2} \overset{Lema}{\geq} \sum \left(\frac{a^2}{b} + a - b \right) = \sum \frac{a^2}{b} = RHS$, cu egal pentru $a=b=c$

Remarca.

If $a,b,c>0$ then

$$1).\ \sum \frac{a^4}{b^3} \geq \sum \frac{a^3}{b^2}.$$

$$2).\ \sum \frac{a^{n+2}}{b^{n+1}} \geq \sum \frac{a^{n+1}}{b^n}, n \in \mathbf{N}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Lema.

If $a,b,c>0$ and $n \in \mathbf{N}$ then

$$\frac{a^{n+2}}{b^{n+1}} \geq \frac{a^{n+1}}{b^n} + a - b.$$

Demonstrație.

$\frac{a^{n+2}}{b^{n+1}} \geq \frac{a^{n+1}}{b^n} + a - b \Leftrightarrow (a-b)\left(a^{n+1} - b^{n+1}\right) \geq 0$, deoarece factorii au același semn.

Problema394.

Dacă $a,b,c>0$ și $n\geq 0$ să se demonstreze că

$$\frac{(na+b+c)^2}{na^2+(b+c)^2}+\frac{(nb+c+a)^2}{nb^2+(c+a)^2}+\frac{(nc+a+b)^2}{nc^2+(a+b)^2}\leq\frac{3(n+2)^2}{n+4}.$$

Marin Chirciu, Pitești, IneMath 2/2025

Soluție.

Datorită omogenității putem lua $a+b+c=1$.

Inegalitatea se scrie $\sum\frac{((n-1)a+3)^2}{na^2+(3-a)^2}\leq\frac{3(n+2)^2}{n+4}\Leftrightarrow$

$(2n^3+16n^2+40n+32)a^3-(4n^3+28n^2+48n)a^2+(2n^3+8n^2-24n-96)a+4n^2+32n+64\geq 0$

$\Leftrightarrow (a-1)^2\left[(2n^3+16n^2+40n+32)a+4n^2+32n+64\right]\geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2(n+4)\left[(n+2)^2a+2(n+4)\right](a-1)^2\geq 0$. Egalitatea are loc dacă $a=b=c=1$.

Problema395.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=3$ then

$$3\sum x^4+9xyz\geq 2\sum x^2\sum xy.$$

Soluție.

Omgenizând inegalitatea se scrie: $3\sum x^4+3xyz\sum x\geq 2\sum x^2\sum xy\Leftrightarrow$

$3\sum x^4+3xyz\sum x\geq 2\sum xy\left(x^2+y^2\right)+2xyz\sum x\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\sum x^4+xyz\sum x\geq 2\sum xy\left(x^2+y^2\right)$, care rezultă din $2\sum x^4\geq\sum xy\left(x^2+y^2\right)$.

Rămâne să arătăm că:

$\sum x^4+xyz\sum x\geq\sum xy\left(x^2+y^2\right)\Leftrightarrow\sum x^4+xyz\sum x\geq\sum x^2\sum xy-xyz\sum x\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sum x^4+2xyz\sum x\geq\sum x^2\sum xy$.

Folosim pqr -Method.

Notăm $p=x+y+z=3, q=xy+yz+zx, r=xyz$.

Avem $\sum x^2=p^2-2q$ și $\sum x^4=p^4-4p^2q+4q^2-2pr$.

Inegalitatea $\sum x^4 + 2xyz\sum x \ge \sum x^2 \sum xy$ se scrie:

$\left(p^4 - 4p^2q + 4q^2 - 2pr\right) + 2pr \ge \left(p^2 - 2q\right)q \Leftrightarrow\ p^4 - 5p^2q + 6q^2 \ge 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ \left(p^2 - 3q\right)\left(p^2 - 2q\right) \ge 0$, care rezultă din $\left(p^2 - 3q\right) \ge 0$ și $\left(p^2 - 2q\right) > 0$, vezi $p^2 = \left(\sum x\right)^2 \ge 3\sum xy = 3q > 2q$. Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z = 1$.

Remarca.

If $x, y, z > 0$, $x + y + z = 3$ and $\lambda \ge 0$ then

$$\sum x^4 + \lambda xyz \ge \frac{\lambda + 3}{9}\sum x^2 \sum xy .$$

Marin Chirciu

Problema396.

In ΔABC

$$\sum \frac{1}{w_b w_c} \ge \frac{4}{9}\left(\sum \frac{1}{a}\right)^2 .$$

Dang Ngoc Minh, Vietnam, Mathematical Inequalities 2/2025

Remarca.

In ΔABC

$$\sum \frac{1}{w_b w_c} \ge \frac{18r}{Rp^2} .$$

Marin Chirciu

Soluție

$$\sum \frac{1}{w_b w_c} = \sum \frac{1}{\frac{2ac}{a+c}\cos\frac{B}{2} \cdot \frac{2ab}{a+b}\cos\frac{C}{2}} = \frac{1}{4abc}\sum \frac{(a+b)(a+c)}{a\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} = \frac{1}{4 \cdot 4Rrp}\sum \frac{(a+b)(a+c)}{a\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}} =$$

$$= \frac{1}{4 \cdot 4Rrp}\sum \frac{(a+b)(a+c)}{p\frac{1}{\sqrt{abc}}a\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{a}}} = \frac{1}{4 \cdot 4Rrp}\sum \frac{(a+b)(a+c)}{p\frac{1}{\sqrt{abc}}\sqrt{a}\sqrt{(p-b)(p-c)}} \ge$$

$$\ge \frac{1}{4 \cdot 4Rrp}\sum \frac{(a+b)(a+c)}{p\frac{1}{\sqrt{abc}}\sqrt{a}\frac{(p-b)+(p-c)}{2}} = \frac{1}{4 \cdot 4Rrp}\sum \frac{(a+b)(a+c)}{p\frac{1}{\sqrt{abc}}\sqrt{a}\frac{a}{2}} =$$

$$=\frac{1}{2\cdot 4Rrp^2}\sum\frac{\sqrt{bc}\,(a+b)(a+c)}{a}\ge\frac{1}{8Rrp^2}\sum\frac{\frac{2bc}{b+c}(a+b)(a+c)}{a}=\frac{abc}{4Rrp^2}\sum\frac{(a+b)(a+c)}{a^2(b+c)}=$$

$$=\frac{4Rrp}{4Rrp^2}\sum\frac{(a+b)(a+c)}{a^2(b+c)}=\frac{1}{p}\sum\frac{(a+b)(a+c)}{a^2(b+c)}\ge\frac{1}{p}\cdot\frac{18r}{Rp}=\frac{18r}{Rp^2}.$$

Problema397.

In ΔABC

$$m_a+w_a+h_a\le\frac{1}{2}\left(1+\csc\frac{A}{2}\right)(R+4r).$$

Dang Ngoc Minh, Vietnam, Mathematical Inequalities 2/2025

Remarca.

Lema1.

In ΔABC

$$m_a\le\frac{R}{2}\left(1+\csc\frac{A}{2}\right).$$

Lema2.

In ΔABC

$$w_a=\left(\csc\frac{A}{2}+\sec\frac{B-C}{2}\right)r.$$

Lema3.

In ΔABC

$$h_a=\left(1+\csc\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}\right)r.$$

Lema4.

In ΔABC

$$w_a+h_a\le 2\left(1+\csc\frac{A}{2}\right)r.$$

Folosind **Lemele** de mai sus obținem:

$$LHS = m_a + w_a + h_a \le \frac{R}{2}\left(1+\csc\frac{A}{2}\right) + 2r\left(1+\csc\frac{A}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(1+\csc\frac{A}{2}\right)(R+4r) = RHS .$$

Remarca.

In ΔABC

$$\sum m_a \le \frac{R}{2}\left(3+\sum\csc\frac{A}{2}\right).$$

Marin Chirciu

Lema.

In ΔABC

$$m_a \le \frac{R}{2}\left(1+\csc\frac{A}{2}\right).$$

Demonstrație.

$$m_a \overset{Panaitopol}{\le} \frac{Rp}{a} = \frac{R(a+b+c)}{2a} = \frac{R}{2}\left(1+\frac{b+c}{a}\right) = \frac{R}{2}\left(1+\frac{2R\sin B + 2R\sin C}{2R\sin A}\right) =$$

$$= \frac{R}{2}\left(1+\frac{\sin B+\sin C}{\sin A}\right) = \frac{R}{2}\left(1+\frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}\right) \le \frac{R}{2}\left(1+\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}\right) = \frac{R}{2}\left(1+\csc\frac{A}{2}\right).$$

Folosind **Lema** obținem:

$$\sum m_a \le \sum \frac{R}{2}\left(1+\csc\frac{A}{2}\right) = \frac{R}{2}\left(3+\sum\csc\frac{A}{2}\right)$$

Remarca.

In ΔABC

$$\sum (w_a + h_a) \le 2r\left(3+\sum\csc\frac{A}{2}\right).$$

Marin Chirciu

Lema.

In ΔABC

$$w_a + h_a \le 2\left(1+\csc\frac{A}{2}\right)r .$$

Folosind **Lema** obținem:

$$\sum\left(w_a+h_a\right)\leq\sum 2\left(1+\csc\frac{A}{2}\right)r=2r\left(3+\sum\csc\frac{A}{2}\right)$$

Problema398.

If $x,y,z>0$, $xy+yz+zx=12$ then

$$\sum\frac{x}{y^2+2}\geq 1.$$

Marin Chirciu,IneMath 2/2025

Soluție.

Lema.

If $y>0$ then

$$\frac{1}{y^2+2}\geq\frac{7-2y}{18}.$$

Demonstrație.

$\frac{1}{y^2+2}\geq\frac{7-2y}{18}\Leftrightarrow 2y^3-7y^2+4y+4\geq 0\Leftrightarrow (y-2)^2(2y+1)\geq 0$, cu egalitate pentru $y=2$.

$$LHS=\sum\frac{x}{y^2+2}\overset{Lema}{\geq}\sum x\frac{7-2y}{18}=\frac{1}{18}\left(7\sum x-2\sum xy\right)\overset{SOS}{\geq}\frac{1}{18}(7\cdot 6-2\cdot 12)=1=RHS.$$

Am folosit $\sum x\geq 6$, vezi $\left(\sum x\right)^2\geq 3\sum xy=3\cdot 12=36\Rightarrow\sum x\geq 6$.

Remarca.

If $x,y,z>0$, $xy+yz+zx=12$ and $0\leq\lambda\leq 4$ then

$$\sum\frac{x}{y^2+\lambda}\geq\frac{6}{\lambda+4}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema.

If $y>0$ and $0\leq\lambda\leq 4$ then

$$\frac{1}{y^2+\lambda} \geq \frac{\lambda+12-4y}{(\lambda+4)^2}.$$

Demonstrație.

$$\frac{1}{y^2+\lambda} \geq \frac{\lambda+12-4y}{(\lambda+4)^2} \Leftrightarrow 4y^3-(\lambda+12)y^2+4\lambda y+16-4\lambda \geq 0 \Leftrightarrow (y-2)^2(4y+4-\lambda) \geq 0.$$

$$LHS = \sum \frac{x}{y^2+\lambda} \overset{Lema}{\geq} \sum x \frac{\lambda+12-4y}{(\lambda+4)^2} = \frac{1}{(\lambda+4)^2}\left((\lambda+12)\sum x - 4\sum xy\right) \overset{SOS}{\geq}$$

$$\overset{SOS}{\geq} \frac{1}{(\lambda+4)^2}\left((\lambda+12)\cdot 6 - 4\cdot 12\right) = \frac{6(\lambda+4)}{(\lambda+4)^2} = \frac{6}{\lambda+4} = RHS.$$

Remarca.

In ΔABC

$$1).\ \sum \frac{\sqrt{3}\tan\frac{A}{2}}{6\tan^2\frac{B}{2}+1} \geq 1.$$

Soluție.

Lema.

If $x, y, z > 0$, $xy+yz+zx=12$ then

$$\sum \frac{x}{y^2+2} \geq 1.$$

Folosind **Lema** pentru $(x,y,z)=\left(2\sqrt{3}\tan\frac{A}{2}, 2\sqrt{3}\tan\frac{B}{2}, 2\sqrt{3}\tan\frac{C}{2}\right)$ obținem:

$$\sum \frac{2\sqrt{3}\tan\frac{A}{2}}{12\tan^2\frac{B}{2}+2} \geq 1 \Leftrightarrow \sum \frac{\sqrt{3}\tan\frac{A}{2}}{6\tan^2\frac{B}{2}+1} \geq 1.$$

Remarca.

$$2).\ \sum \frac{\sqrt{3}\cot A}{6\cot^2 A+1} \geq 1.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema399.

In ΔABC

$$\sum \frac{a^2}{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}} \geq \frac{a+b+c}{\sqrt{3}}.$$

Nguyen Van Hoa, Vietnam, Mathematical Inequalities 2/2025

Remarca.

In ΔABC

$$1).\ \sum \frac{a^2}{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}} \geq 6r\ .$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{a^2}{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}} \overset{CS}{\geq} \frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum \sqrt{2b^2+2c^2-a^2}} \overset{CBS}{\geq} \frac{\left(\sum a\right)^2}{\sqrt{3\sum\left(2b^2+2c^2-a^2\right)}} =$$

$$= \frac{(2p)^2}{\sqrt{3\cdot 3\sum a^2}} \overset{Leibniz}{\geq} \frac{4p^2}{3\sqrt{9R^2}} = \frac{4p^2}{9R} \overset{Cosnita\&Turtoiu}{\geq} \frac{2\cdot 27Rr}{9R} = 6r = RHS\ .$$

$$2).\ \sum \frac{a^n}{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}} \geq \left(\frac{2p}{3}\right)^n \frac{1}{R}, n \in \mathbf{N}, n \geq 2\ .$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{a^n}{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}} \overset{Holder}{\geq} \frac{\left(\sum a\right)^n}{3^{n-2}\sum \sqrt{2b^2+2c^2-a^2}} \overset{CBS}{\geq} \frac{\left(\sum a\right)^n}{3^{n-2}\sqrt{3\sum\left(2b^2+2c^2-a^2\right)}} =$$

$$= \frac{(2p)^n}{3^{n-2}\sqrt{3\cdot 3\sum a^2}} \overset{Leibniz}{\geq} \frac{(2p)^n}{3^{n-2}\cdot 3\sqrt{9R^2}} = \frac{(2p)^n}{3^{n-2}\cdot 9R} = \frac{(2p)^n}{3^n R} = \left(\frac{2p}{3}\right)^n \frac{1}{R} = RHS\ .$$

Problema400.

If $x, y, z > 0$, $xy + yz + zx = k$ then

$$\sum \frac{x}{\sqrt{x^2+k}} \leq \frac{3}{2}.$$

Gh.Crăciun, Mathematical Inequalities 2/2025

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{x}{\sqrt{x^2+k}}=\sum\frac{x}{\sqrt{x^2+xy+yz+zx}}=\sum\frac{x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}}=\sum\sqrt{\frac{x}{x+y}\cdot\frac{x}{x+z}}\overset{AM-GM}{\leq}$$

$$\overset{AM-GM}{\leq}\sum\frac{\frac{x}{x+y}+\frac{x}{x+z}}{2}=\frac{1}{2}\left(\sum\frac{x}{x+y}+\sum\frac{x}{x+z}\right)=\frac{1}{2}\sum\frac{x+y}{x+y}=\frac{1}{2}\cdot 3=\frac{3}{2}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=\sqrt{\frac{k}{3}}$.

Remarca.

In ΔABC

$$1).\ \sum\frac{\tan\frac{A}{2}}{\sqrt{\tan^2\frac{A}{2}+1}}\leq\frac{3}{2}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema.

If $x,y,z>0$, $xy+yz+zx=1$ then

$$\sum\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\leq\frac{3}{2}.$$

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=1$.

Folosind **Lema** pentru $(x,y,z)=\left(\tan\frac{A}{2},\tan\frac{B}{2},\tan\frac{C}{2}\right)$ obținem: $\sum\frac{\tan\frac{A}{2}}{\sqrt{\tan^2\frac{A}{2}+1}}\leq\frac{3}{2}$.

$$2).\ \sum\frac{\cot A}{\sqrt{\cot^2 A+1}}\leq\frac{3}{2}.$$

Marin Chirciu

Problema401.

Solve in real numbers the equation:

$$\left(\sqrt{x+7}-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x^2+7x}\right)=7x.$$

Bahadur Heydarov, Math 2/2025

Soluție.

Domeniul de definiție al ecuației este $[0,\infty)$.

$$\left(\sqrt{x+7}-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x^2+7x}\right)=7x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+7}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+7}+\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x^2+7x}\right)=7x\left(\sqrt{x+7}+\sqrt{x}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7\left(1+\sqrt{x^2+7x}\right)=7x\left(\sqrt{x+7}+\sqrt{x}\right) \Leftrightarrow 1+\sqrt{x^2+7x}=x\left(\sqrt{x+7}+\sqrt{x}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1+\sqrt{x^2+7x}=x\sqrt{x+7}+x\sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+7x}-x\sqrt{x+7}=x\sqrt{x}-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+7x}-\sqrt{x}\sqrt{x^2+7x}=\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+7x}\left(1-\sqrt{x}\right)=\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right) \Leftrightarrow \left(1-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x^2+7x}+x+\sqrt{x}+1\right)=0 \Leftrightarrow x=1.$$

Deducem că $x=1$ este soluția unică a ecuației.

Remarca.

Let $\lambda>0$ fixed. Solve in real numbers the equation:

$$\left(\sqrt{x+\lambda}-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x^2+\lambda x}\right)=\lambda x.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Deducem că $x=1$ este soluția unică a ecuației.

Problema402.

In ΔABC

$$\sum\frac{w_a}{b+c}\le\frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam,RMM 2/2025

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{w_a}{b+c}=\sum\frac{\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}}{b+c}=\sum\frac{2bc}{(b+c)^2}\cos\frac{A}{2}\overset{AM-GM}{\leq}\sum\frac{2bc}{4bc}\cos\frac{A}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum\cos\frac{A}{2}\overset{Jensen}{\leq}\frac{1}{2}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}=RHS.$$

Remarca.

In ΔABC

$$\sum w_a(b+c)\leq 9\sqrt{3}R^2.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS=\sum w_a(b+c)=\sum\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}(b+c)=\sum 2bc\cos\frac{A}{2}=\sum 2bc\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}=$$

$$=2\sum\sqrt{p(p-a)bc}=2\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\sum\sqrt{p(p-a)\cdot\frac{3}{4}bc}\overset{AM-GM}{\leq}\frac{4}{\sqrt{3}}\sum\frac{p(p-a)+\frac{3}{4}bc}{2}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sum p(p-a)+\frac{3}{4}\sum bc\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(p^2+\frac{3\left(p^2+r^2+4Rr\right)}{4}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{7p^2+3r^2+12Rr}{4}=$$

$$=\frac{7p^2+3r^2+12Rr}{2\sqrt{3}}\overset{Gerretsen}{\leq}\frac{7\left(4R^2+4Rr+3r^2\right)+3r^2+12Rr}{2\sqrt{3}}=\frac{28R^2+40Rr+24r^2}{2\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{2\left(7R^2+10Rr+6r^2\right)}{\sqrt{3}}\overset{Euler}{\leq}\frac{27R^2}{\sqrt{3}}=9\sqrt{3}R^2.$$

Problema403.

If $a,b,c,d\in\mathbf{R}$, $abcd=1$ then

$$\prod\left(a^2+1\right)\geq(a+b+c+d)^2.$$

Pham Kim Hung, 2006, Mathematical Inequalities 2/2025

Soluție.

$$LHS=\prod\left(a^2+1\right)=\left(1+a^2+b^2+a^2b^2\right)\left(1+c^2+d^2+c^2d^2\right)=$$

$$=1+\sum a^2+\sum a^2b^2+\sum a^2b^2c^2+a^2b^2c^2d^2 \overset{AM-GM}{\geq} 1+\sum a^2+\sum a^2b^2+4\sqrt[4]{\prod a^2b^2c^2}+1=$$

$$=1+\sum a^2+\sum a^2b^2+4+1=6+\sum a^2+\sum a^2b^2 \overset{(1)}{\geq}(a+b+c+d)^2=RHS,$$

unde : $6+\sum a^2+\sum a^2b^2 \overset{(1)}{\geq}(a+b+c+d)^2 \Leftrightarrow 6+\sum a^2+\sum a^2b^2 \geq \sum a^2+2\sum ab \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6+\sum a^2b^2 \geq 2\sum ab \Leftrightarrow \sum(ab-1)^2 \geq 6$.

Remarca.

If $a,b,c,d \in \mathbf{R}$, $abcd=1$ and $\lambda \geq 0$ then

$$1).\ \prod\left(a^2+\lambda\right) \geq \frac{\lambda^3}{3}\left(\sum a\right)^2+\lambda^4+(2\lambda+1)^2.$$

Remarca.

If $a,b,c \in \mathbf{R}$, $abc=1$ then

$$2).\ \prod\left(a^2+1\right) \geq \frac{1}{3}(a+b+c)^2+5.$$

Soluție.

$$LHS=\prod\left(a^2+1\right)=a^2b^2c^2+\sum a^2b^2+\sum a^2+1 \overset{AM-GM\,\&CS}{\geq} 1+3\sqrt[3]{a^4b^4c^4}+\frac{1}{3}\left(\sum a\right)^2+1=$$

$$=5+\frac{1}{3}\left(\sum a\right)^2=RHS$$

Remarca.

If $a,b,c,d>0$ then

$$3).\ \prod\left(a^2+1\right) \geq \prod(a+b).$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Folosim $\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right) \geq (a+b)^2 \Leftrightarrow (ab-1)^2 \geq 0$, cu egalitate pentru $ab=1$.

Se scriu și celelalte trei inegalități anoloage și se înmulțesc membru cu membru.

Problema404.

In ΔABC

$$\sum \frac{m_b + m_c}{r_a} \geq 6.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam,RMM 2/2025

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{m_b + m_c}{r_a} \overset{(1)}{\geq} \sum \frac{\sqrt{r_a r_c} + \sqrt{r_a r_b}}{r_a} = \sum \frac{\sqrt{r_c} + \sqrt{r_b}}{\sqrt{r_a}} = \sum \frac{y+z}{x} \overset{AM-GM}{\geq} 6 = RHS,$$

unde $m_a \geq \sqrt{r_b r_c}$, vezi $m_a \geq \sqrt{p(p-a)} = \sqrt{r_b r_c}$.

Remarca.

In ΔABC

$$\sum \frac{m_b + \lambda m_c}{r_a} \geq 3(\lambda + 1).$$

Marin Chirciu

Problema405.

If $x, y, z > 0$, $xyz = 1$ then

$$\sum \frac{x^5}{x+y+1} \geq 1.$$

Konstantinos Geronikolas, Greece, Mathematical Inequalities 2/2025

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{x^5}{x+y+1} \overset{Holder}{\geq} \frac{\left(\sum x\right)^5}{3^3 \sum (x+y+1)} = \frac{\left(\sum x\right)^5}{3^3 \left(2\sum x + 3\right)} = \frac{p^5}{27(2p+3)} \overset{(1)}{\geq} 1 = RHS,$$

unde $\frac{p^5}{27(2p+3)} \overset{(1)}{\geq} 1 \Leftrightarrow p^5 - 27p - 81 \geq 0 \Leftrightarrow (p-3)\left(p^4 + 3p^3 + 9p^2 + 27p + 27\right) \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p \geq 3$, care rezultă din $p = \sum x \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3$.

Remarca.

If $x, y, z > 0$, $xyz = 1$ and $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$ then

$$1).\ \sum \frac{x^n}{x+y+1} \geq 1.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{x^n}{x+y+1}\overset{Holder}{\geq}\frac{\left(\sum x\right)^n}{3^{n-2}\sum(x+y+1)}=\frac{\left(\sum x\right)^n}{3^{n-2}\left(2\sum x+3\right)}=\frac{p^n}{3^{n-2}(2p+3)}\overset{(1)}{\geq}1=RHS\ ,$$

Remarca.

$$2).\ \sum\frac{x^n}{x+y+\lambda}\geq\frac{3}{\lambda+2},\lambda\geq 0\,.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$\sum\frac{x^n}{x+y+\lambda}\overset{Holder}{\geq}\frac{\left(\sum x\right)^n}{3^{n-2}\sum(x+y+\lambda)}=\frac{\left(\sum x\right)^n}{3^{n-2}\left(2\sum x+3\lambda\right)}=\frac{p^n}{3^{n-2}(2p+3\lambda)}\overset{(1)}{\geq}\frac{3}{\lambda+2}\,.$$

Problema406.

In ΔABC

$$\sum\frac{r_b+r_c}{a}\geq 3\sqrt{3}\,.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam,RMM 2/2025

Soluție

Lema.

In ΔABC

$$\sum\frac{r_b+r_c}{a}=\frac{p}{r}\,.$$

Remarca.

In ΔABC

$$1).\ \frac{27r^2}{F}\leq\sum\frac{r_b+r_c}{a}\leq\frac{27R^2}{4F}\,.$$

$$2).\ \frac{54r^2}{Rp}\leq\sum\frac{h_b+h_c}{a}\leq\frac{27R}{2p}\,.$$

Soluție

Lema.

In ΔABC

$$\sum \frac{h_b + h_c}{a} = \frac{2p}{R}.$$

3). $\sum \frac{h_b + h_c}{a} \le \sum \frac{r_b + r_c}{a}$.

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema407.

Solve in integer numbers the equation:

$$x^2(y-1) + y^2(x-1) = 1.$$

Math 2/2025

Soluție.

Cu substituția $(a,b) = (x-1, y-1)$ ecuația se scrie $(a^2 + 2a + 1)b + (b^2 + 2b + 1)a = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a+b+4)(ab+1) = 5$.

Scriind $5 = 1\cdot 5 = 5\cdot 1 = (-1)\cdot(-5) = (-5)\cdot(-1)$ obținem:

1). $\begin{cases} a+b+4=1 \\ ab+1=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=-3 \\ ab=4 \end{cases}$,fals;

2). $\begin{cases} a+b+4=5 \\ ab+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ ab=0 \end{cases} \Leftrightarrow (a,b) \in \{(0,1),(1,0)\} \Rightarrow (x,y) \in \{(1,2),(2,1)\}$;

3). $\begin{cases} a+b+4=-1 \\ ab+1=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=-5 \\ ab=-6 \end{cases} \Leftrightarrow (a,b) \in \{(-6,1),(1,-6)\} \Rightarrow (x,y) \in \{(-5,2),(2,-5)\}$;

4). $\begin{cases} a+b+4=-5 \\ ab+1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=-9 \\ ab=-2 \end{cases}$, fals;

Mulțimea soluțiilor ecuației este $S = \{(1,2),(2,1),(-5,2),(2,-5)\}$.

Remarca.

Solve in integer numbers the equation:

$$x^2(y+1)+y^2(x+1)=1.$$

Marin Chirciu

Mulțimea soluțiilor ecuației este $S=\{(-1,0),(0,-1),(0,1),(1,0)\}$.

Problema408.

46. If $x,y,z>0$ and $M\in Int(\Delta ABC)$ and d_a,d_b,d_c are the distances of the point M to the sides BC,CA,AB, then

$$\sum\frac{x^2a^3}{(y+z)^2d_a}\geq 6F.$$

D.M.Bătinețu-Giurgiu, Mihaly Bencze, RMM 2/2025

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{x^2a^3}{(y+z)^2d_a}=\sum\frac{x^2a^4}{(y+z)^2\cdot ad_a}=\sum\frac{\left(\frac{xa^2}{y+z}\right)^2}{ad_a}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum\frac{x}{y+z}\cdot a^2\right)^2}{\sum ad_a}\overset{Tsintsifas}{\geq}\frac{\left(2\sqrt{3}F\right)^2}{2F}=$$

$$=6F=RHS.$$

Am folosit mai sus inegalitatea lui George Tsintsifas: $\sum\frac{x}{y+z}\cdot a^2\geq 2\sqrt{3}F$ și $\sum ad_a=2F$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral și $M\equiv I$.

Remarca.

If $x,y,z>0$ and $M\in Int(\Delta ABC)$ and d_a,d_b,d_c are the distances of the point M to the sides BC,CA,AB, then

$$1).\ \sum\frac{x^2a^7}{(y+z)^2d_a}\geq 32F^3.$$

$$2).\ \sum\frac{x^2a^{8n-1}}{(y+z)^2d_a}\geq\frac{9}{8F}\left(\frac{4F}{\sqrt{3}}\right)^{2n},0\leq n\leq 1.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema409.

MA271. If $a,b,c>0$ then

$$\frac{1}{2}\sum a^2+2\sum\frac{1}{b+c}\le\frac{9}{2}.$$

Daniel Sitaru, Crux Mathematicorum 5/2024

Soluție.

$$LHS=\frac{1}{2}\sum a^2+2\sum\frac{1}{b+c}\overset{CS}{\ge}\frac{1}{2}\frac{\left(\sum a\right)^2}{3}+2\cdot\frac{9}{\sum(b+c)}=\frac{\left(\sum a\right)^2}{6}+2\cdot\frac{9}{2\sum a}=$$

$$=\frac{p^2}{6}+\frac{9}{p}\overset{(1)}{\ge}\frac{9}{2}=RHS\text{ ,unde }\frac{p^2}{6}+\frac{9}{p}\overset{(1)}{\ge}\frac{9}{2}\Leftrightarrow p^3-27p+54\ge0\Leftrightarrow(p-3)^2(p+6)\ge0.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarca.

If $a,b,c>0$, $a+b+c\ge3$ and $\lambda\le4$ then

$$\sum a^2+\lambda\sum\frac{1}{b+c}\ge\frac{3}{2}(\lambda+2).$$

Marin Chirciu

Problema410.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=1$ then

$$\sum\sqrt{x+yz}\le2.$$

Panagiotis Danousis, Greece, MathAtelier 2/2025

Soluție.

$$LHS=\sum\sqrt{x+yz}=\sum\sqrt{x(x+y+z)+yz}=\sum\sqrt{(x+y)(x+z)}\overset{AM-GM}{\le}$$

$$\overset{AM-GM}{\le}\sum\frac{(x+y)(x+z)}{2}=\frac{1}{2}\sum4x=2\sum x=2=RHS\text{ ,cu egalitate pentru }x=y=z=\frac{1}{3},$$

Remarca.

In ΔABC

$$1). \sum\sqrt{rr_a + r_b r_c} \le 6\sqrt{3}r.$$

Soluție.

Lema.

If $x, y, z > 0$, $x + y + z = 1$ then

$$\sum\sqrt{x + yz} \le 2.$$

Folosind **Lema** pentru $(x, y, z) = \left(\frac{r}{r_a}, \frac{r}{r_b}, \frac{r}{r_c}\right)$ obținem: $\sum\sqrt{rr_a + r_b r_c} \le 6\sqrt{3}r$.

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum\frac{r}{r_a} = 1$.

$$2). \sum\sqrt{rh_a + h_b h_c} \le 6\sqrt{3}r.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema411.

Calculate

$$\int_{-a}^{a} \frac{\cos t}{1 + \pi^{\frac{1}{t}}} dt .$$

Jose Luis Diaz-Barrero, JOZSEF WILDT INTERNATIONAL MATH COMPETITION2017

Soluție.

Fie I integrala de calculat.Cu schimbarea de variabilă $t = -x$ obținem:

$$I = \int_{a}^{-a} \frac{\cos(-x)}{1 + \pi^{-\frac{1}{x}}}(-dx) = \int_{-a}^{a} \frac{\cos x}{1 + \frac{1}{\pi^{\frac{1}{x}}}} dx = \int_{-a}^{a} \frac{\pi^{\frac{1}{x}} \cdot \cos x}{1 + \pi^{\frac{1}{x}}} dx = \int_{-a}^{a} \frac{\pi^{\frac{1}{t}} \cdot \cos t}{1 + \pi^{\frac{1}{t}}} dt .$$

Obținem $I + I = \int_{-a}^{a} \frac{\cos t}{1 + \pi^{\frac{1}{t}}} dt + \int_{-a}^{a} \frac{\pi^{\frac{1}{t}} \cdot \cos t}{1 + \pi^{\frac{1}{t}}} dt = \int_{-a}^{a} \cos t dt = \sin t\Big|_{-a}^{a} = \sin a - \sin(-a) = 2\sin a$.

Din $2I = 2\sin a$ deducem că $I = \sin a$.

Problema412.

If $x, y, z > 0$, $x + y + z = 1$ then

$$\prod\left(x+\frac{1}{y}\right)\geq\left(\frac{10}{3}\right)^3.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam,RMM 2/2025

Soluție.

$LHS=\prod\left(x+\frac{1}{y}\right)\overset{Holder}{\geq}\left(\sqrt[3]{xyz}+\frac{1}{\sqrt[3]{xyz}}\right)^3\overset{(1)}{\geq}\left(\frac{10}{3}\right)^3=RHS$, unde (1) rezultă din:

Funcția $f(x)=x+\frac{1}{x}, 0<x<1$ este strict descrescătoare pe $(0,1)$.

Avem $\sqrt[3]{xyz}\leq\frac{1}{3}$, vezi $\sqrt[3]{xyz}\overset{AM-GM}{\leq}\frac{x+y+z}{3}=\frac{1}{3}$.

Din $f(x)=x+\frac{1}{x}\downarrow$ și $x\to\sqrt[3]{xyz}\Rightarrow\sqrt[3]{xyz}\leq\frac{1}{3}\Rightarrow f\left(\sqrt[3]{xyz}\right)\geq f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{10}{3}\Rightarrow$

$\Rightarrow\sqrt[3]{xyz}+\frac{1}{\sqrt[3]{xyz}}\geq\frac{10}{3}$,(1). Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Remarca.

If $x,y,z>0, x+y+z=1$ and $\lambda\geq1$ then

$$\prod\left(x+\frac{\lambda}{y}\right)\geq\left(\frac{3\lambda+1}{3}\right)^3.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS=\prod\left(x+\frac{\lambda}{y}\right)\overset{Holder}{\geq}\left(\sqrt[3]{xyz}+\frac{\lambda}{\sqrt[3]{xyz}}\right)^3\overset{(1)}{\geq}\left(\frac{3\lambda+1}{3}\right)^3=RHS.$$

Remarca.

In ΔABC

$$1).\prod\left(\frac{r}{r_a}+\frac{r_b}{r}\right)\geq\left(\frac{10}{3}\right)^3.$$

Soluție.

Lema.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=1$ then

$$\prod\left(x+\frac{1}{y}\right)\geq\left(\frac{10}{3}\right)^3.$$

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum\frac{r}{r_a}=1$.

Folosind **Lema** pentru $(x,y,z)=\left(\frac{r}{r_a},\frac{r}{r_b},\frac{r}{r_c}\right)$ obținem: $\prod\left(\frac{r}{r_a}+\frac{r_b}{r}\right)\geq\left(\frac{10}{3}\right)^3$.

2). $$\prod\left(\frac{r}{h_a}+\frac{h_b}{r}\right)\geq\left(\frac{10}{3}\right)^3.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema413.

In ΔABC

$$\sum\frac{\left(b^2+c^2\right)^3}{a}\geq\frac{48^3\sqrt{3}r^9}{R^4}.$$

Zaza Mzhavanadze, Georgia,RMM 2/2025

Remarca.

In ΔABC

$$\sum\frac{\left(b^2+c^2\right)^3}{a}\geq 24\left(\frac{4F}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{5}{2}}.$$

Soluție.

$$\sum\frac{\left(b^2+c^2\right)^3}{a}\overset{AM-GM}{\geq}\sum\frac{(2bc)^3}{a}=8\sum\frac{(bc)^3}{a}\overset{AM-GM}{\geq}8\cdot 3\sqrt[3]{\prod\frac{(bc)^3}{a}}=24\sqrt[3]{(abc)^5}=$$

$$=24\cdot(abc)^{\frac{5}{2}}\overset{Carlitz}{\geq}24\cdot\left(\frac{4F}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{3}}=24\left(\frac{4F}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{5}{2}}=RHS.$$

Remarca.

In ΔABC

$$\sum \frac{\left(b^2+c^2\right)^n}{a} \geq 2^n \cdot 3\left(\frac{4F}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{2n-1}{2}}, n \in \mathbf{N}^* .$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$\sum \frac{\left(b^2+c^2\right)^n}{a} \overset{AM-GM}{\geq} \sum \frac{(2bc)^n}{a} = 8\sum \frac{(bc)^n}{a} \overset{AM-GM}{\geq} 2^n \cdot 3\sqrt[3]{\prod \frac{(bc)^n}{a}} = 2^n \cdot 3\sqrt[3]{(abc)^{2n-1}} =$$

$$= 2^n \cdot 3(abc)^{\frac{2n-1}{3}} \overset{Carlitz}{\geq} 2^n \cdot 3\left(\frac{4F}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{3}{2}\cdot\frac{2n-1}{3}} = 2^n \cdot 3\left(\frac{4F}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{2n-1}{2}} = RHS .$$

Problema414.

In ΔABC

$$\prod(1-\cos A) \geq \prod \cos A .$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam,RMM 2/2025

Soluție.

Folosind identitățile în triunghi $\prod(1-\cos A) = \frac{r^2}{2R^2}$ și $\prod \cos A = \frac{p^2-(2R+r)^2}{4R^2}$ inegalitatea se scrie: $\frac{r^2}{2R^2} \geq \frac{p^2-(2R+r)^2}{4R^2} \Leftrightarrow p^2 \leq 4R^2+4Rr+3r^2$,(Gerretsen).

Remarca.

In ΔABC

1). $\frac{3}{2}\left(\frac{2r}{R}\right)^3 - \frac{5}{4} \leq \prod(1-\cos A) + \prod \cos A \leq \frac{1}{4}$.

2). $\frac{3}{2}\left(\frac{2r}{R}\right)^3 + \frac{\lambda-11}{4} \leq \prod \cos A + \lambda \prod(1-\cos A) \leq \frac{1}{8}(\lambda+1), 0 \leq \lambda \leq \frac{5}{2}$.

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema415.

If $a_1, a_2, ..., a_n > 0$ then

$$\frac{1}{2}\sum a_1 + \sum \frac{1}{1+a_1^2} \geq n .$$

Nguyen Viet Hung, Vietnam, Mathematical Inequalities 2/2025

Soluție

Lema.

If $x > 0$ then

$$\frac{x}{2}+\frac{1}{1+x^2}\geq 1.$$

Demonstrație

$\frac{x}{2}+\frac{1}{1+x^2}\geq 1 \Leftrightarrow x^3-2x^2+x\geq 0 \Leftrightarrow x(x-1)^2\geq 0$, cu egalitate pentru $x=1$.

$$LHS=\frac{1}{2}\sum a_1+\sum\frac{1}{1+a_1^2}=\sum\left(\frac{a_1}{2}+\frac{1}{1+a_1^2}\right)\overset{Lema}{\geq}\sum 1=n=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a_1=a_2=...=a_n=1$.

Remarca.

If $a_1,a_2,...,a_n>\frac{1}{2}$ then

$$3\sum a_1+4\sum\frac{1}{1+a_1^3}\geq 5n.$$

Marin Chirciu

Soluție

Lema.

If $x>\frac{1}{2}$ then

$$3x+\frac{4}{1+x^2}\geq 5.$$

Demonstrație

$3x+\frac{4}{1+x^2}\geq 5 \Leftrightarrow 3x^4-5x^3+3x-1\geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(3x^2+x-1)\geq 0$, vezi $x>\frac{1}{2}$.

$$LHS=3\sum a_1+4\sum\frac{1}{1+a_1^3}\geq 5n=\sum\left(3a_1+\frac{4}{1+a_1^3}\right)\overset{Lema}{\geq}\sum 5=5n=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a_1 = a_2 = ... = a_n = 1$.

Remarca.

In ΔABC

$$1).\ \sum \frac{3r}{r_a} + \sum \frac{2r_a^2}{r_a^2 + 9r^2} \geq 6.$$

Soluție

Lema.

If $x, y, z > 0$ then

$$\frac{1}{2}\sum x + \sum \frac{1}{1+x^2} \geq 3.$$

Folosind **Lema** pentru $(x, y, z) = \left(\frac{3r}{r_a}, \frac{3r}{r_b}, \frac{3r}{r_c}\right)$ obținem:

$$\frac{1}{2}\sum \frac{3r}{r_a} + \sum \frac{1}{1 + \frac{9r^2}{r_a^2}} \geq 3 \Leftrightarrow \sum \frac{3r}{r_a} + \sum \frac{2r_a^2}{r_a^2 + 9r^2} \geq 6.$$

$$2).\ \sum \frac{3r}{h_a} + \sum \frac{2h_a^2}{h_a^2 + 9r^2} \geq 6.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema416.

If $a, b, c > 0$, $abc = 1$ then

$$\sum \frac{bc}{a^2(b+c)} \geq \frac{ab+bc+ca}{2}$$

Gh. Crăciun, Mathematical Inequalities 2/2025

Soluție

$$LHS = \sum \frac{bc}{a^2(b+c)} = \sum \frac{b^2c^2}{a(b+c)} \overset{CS}{\geq} \frac{\left(\sum bc\right)^2}{\sum a(b+c)} = \frac{\left(\sum bc\right)^2}{2\sum bc} = \frac{1}{2}\sum bc = RHS.$$

Remarca.

If $a, b, c > 0$, $abc = 1$ and $\lambda \geq 0$ then

$$1).\ \sum \frac{bc}{a^2(b+\lambda c)} \geq \frac{ab+bc+ca}{\lambda+1}$$

Soluție

$$LHS = \sum \frac{bc}{a^2(b+\lambda c)} = \sum \frac{b^2c^2}{a(b+\lambda c)} \overset{CS}{\geq} \frac{\left(\sum bc\right)^2}{\sum a(b+\lambda c)} = \frac{\left(\sum bc\right)^2}{(\lambda+1)\sum bc} = \frac{1}{\lambda+1}\sum bc = RHS\ .$$

$$2).\ \sum \frac{bc}{a^{n+1}(b+\lambda c)} \geq \frac{3}{\lambda+1}\left(\frac{\sum bc}{3}\right)^n,\ n \in \mathbf{N}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție

$$LHS = \sum \frac{bc}{a^{n+1}(b+\lambda c)} = \sum \frac{(bc)^{n+1}}{a^{n+1}(bc)^n(b+\lambda c)} = \sum \frac{(bc)^{n+1}}{a(b+\lambda c)} \overset{Holder}{\geq} \frac{\left(\sum bc\right)^{n+1}}{3^{n-1}\sum a(b+\lambda c)} =$$

$$= \frac{\left(\sum bc\right)^{n+1}}{3^{n-1}(\lambda+1)\sum bc} = \frac{1}{3^{n-1}(\lambda+1)}\left(\sum bc\right)^n = \frac{3}{\lambda+1}\left(\frac{\sum bc}{3}\right)^n = RHS\ .$$

Problema417.

Show that $3^{2n+1}+2^{n+2}$, $n \in \mathbf{N}$, is divisible by 7.

Geofrey Campbell, Classical Mathematics 2/2025

Soluție

$3^{2n+1}+2^{n+2} = 3\cdot 9^n + 4\cdot 2^n = \left(3\cdot 9^n - 3\cdot 2^n\right) + 3\cdot 2^n + 4\cdot 2^n = 3\left(9^n - 2^n\right) + 7\cdot 2^n$ se divide cu 7 deoarece $\left(9^n - 2^n\right) \vdots (9-2)$, vezi $\left(a^n - b^n\right) \vdots (a-b)$, $a,b \in \mathbf{Z}$.

Remarca.

Show that $5^{2n+1}+2^{4n+2}$, $n \in \mathbf{N}$, is divisible by 9.

Marin Chirciu

Soluție

$5^{2n+1}+2^{4n+2} = 5\cdot 25^n + 4\cdot 16^n = \left(5\cdot 25^n - 5\cdot 16^n\right) + 5\cdot 16^n + 4\cdot 16^n = 5\left(25^n - 16^n\right) + 9\cdot 16^n$ se divide cu 9 deoarece $\left(25^n - 16^n\right) \vdots (25-16)$, vezi $\left(a^n - b^n\right) \vdots (a-b)$, $a,b \in \mathbf{Z}$.

Problema418.

In ΔABC

$$4\sum a^3+15\prod(b+c-a)\le\left(\sum a\right)^3.$$

Nguyen Minh Tho, Vietnam, Mathematical Inequalities 2/2025

Soluție.

Folosind identitățile în triunghi:

$\sum a^3=2p\left(p^2-3r^2-6Rr\right)$ și $\prod(b+c-a)=8r^2p$ inegalitatea se scrie:

$4\cdot 2p\left(p^2-3r^2-6Rr\right)+15\cdot 8r^2p\le(2p)^3 \Leftrightarrow 6Rr\ge 12r^2 \Leftrightarrow R\ge 2r$,(Euler).

Remarca.

In ΔABC

$$27\sum a^3+27\lambda\prod(b+c-a)\le(\lambda+3)\left(\sum a\right)^3, \lambda\ge\frac{15}{4}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Folosind identitățile în triunghi $\sum a^3=2p\left(p^2-3r^2-6Rr\right)$ și $\prod(b+c-a)=8r^2p$.

Problema419.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=1$ then

$$\sum yz\sum\sqrt{\frac{yz}{x+yz}}\le\frac{1}{2}.$$

George Apostolopoulos, Greece, Mathematical Inequalities 2/2025

Soluție

Lema.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=1$ then

$$\sum\sqrt{\frac{yz}{x+yz}}\le 3.$$

Demonstrație

$$\sum\sqrt{\frac{yz}{x+yz}}=\sum\sqrt{\frac{yz}{x(x+y+z)+yz}}=\sum\sqrt{\frac{yz}{(x+y)(x+z)}}=\sum\sqrt{\frac{y}{x+y}\cdot\frac{z}{x+z}}\overset{AM-GM}{\leq}$$

$\overset{AM-GM}{\leq}\sum\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x+y}+\frac{z}{x+z}\right)=\frac{1}{2}\cdot 3=\frac{3}{2}$, cu egalitate pentru $\frac{y}{x+y}=\frac{z}{x+z}$, $x+y+z=1$.

Folosind **Lema** și $\sum yz\leq\frac{1}{3}$, vezi $\sum yz\leq\frac{1}{3}\left(\sum x\right)^2=\frac{1}{3}(1)^2=\frac{1}{3}$ obținem:

$$LHS=\sum yz\sum\sqrt{\frac{yz}{x+yz}}\overset{Lema}{\leq}\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}=\frac{1}{2}=RHS.$$

Remarcă.

In ΔABC

$$1).\ \sum\sqrt{\frac{rr_a}{rr_a+r_br_c}}\leq\frac{3}{2}.$$

Soluție

Lema.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=1$ then

$$\sum yz\sum\sqrt{\frac{yz}{x+yz}}\leq\frac{1}{2}.$$

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum\frac{r}{r_a}=1$.

Folosind **Lema** pentru $(x,y,z)=\left(\frac{r}{r_a},\frac{r}{r_b},\frac{r}{r_c}\right)$ obținem $\sum\sqrt{\frac{rr_a}{rr_a+r_br_c}}\leq\frac{3}{2}$.

$$2).\ \sum\sqrt{\frac{rh_a}{rh_a+h_bh_c}}\leq\frac{3}{2}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema420.

In ΔABC

$$\sum\cos(B-C)\leq\frac{1}{2}\sum\frac{b+c}{a}.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam, RMM 2/2025

Soluție.

Folosind identitatea în triunghi $\sum\cos(B-C)=\frac{p^2+r^2+2Rr-2R^2}{2R^2}$ obținem:

$$LHS=\sum\cos(B-C)=\frac{p^2+r^2+2Rr-2R^2}{2R^2}\overset{Gerretsen}{\leq}\frac{4R^2+4Rr+3r^2+r^2+2Rr-2R^2}{2R^2}=$$

$$=\frac{2R^2+6Rr+4r^2}{2R^2}=\frac{R^2+3Rr+2r^2}{R^2}\overset{Euler}{\leq}3\overset{AM-GM}{\leq}\frac{1}{2}\sum\frac{b+c}{a}=RHS.$$

Remarca.

In ΔABC

$$1).\ \left(\sum\sin A\right)^2\leq\frac{15}{4}+\frac{1}{2}\sum\frac{b+c}{a}.$$

Soluție.

Folosim $\sum\sin A=\frac{p}{R}$ și $\sum\frac{b+c}{a}=\frac{p^2+r^2-2Rr}{2Rr}$.

$$2).\left(\sum\sin A\right)^2+6\lambda\leq\frac{27}{4}+\lambda\sum\frac{b+c}{a},\ \frac{1}{2}\leq\lambda\leq\frac{27}{28}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema421.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=3$ then

$$\sum\frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}}\leq\frac{3\sqrt{2}}{xy+yz+zx}+\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Marius Stănean, Zalău, Mathematical Inequalities 2/2025

Soluție

$$LHS=\sum\frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}}\overset{SOS}{\leq}\sum\frac{1}{\sqrt{\frac{(y+z)^2}{2}}}=\sum\frac{\sqrt{2}}{y+z}=\sqrt{2}\frac{\sum(x+y)(x+z)}{\prod(y+z)}\overset{(1)}{\leq}\frac{3\sqrt{2}}{\sum yz}+\frac{1}{\sqrt{2}}=RHS,$$

unde $\sqrt{2}\frac{\sum(x+y)(x+z)}{\prod(y+z)}\overset{(1)}{\leq}\frac{3\sqrt{2}}{\sum yz}+\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\frac{\sum(x+y)(x+z)}{\prod(y+z)}\overset{(1)}{\leq}\frac{3}{\sum yz}+\frac{1}{2}$.

Folosim pqr -Method.

Notăm $p = x + y + z = 3, q = xy + yz + zx, r = xyz$.

Avem $\sum (x+y)(x+z) = p^2 + q, \prod (y+z) = pq - r$.

$p^2 \geq 3q$, $p = 3 \Rightarrow 9 \geq 3q \Leftrightarrow q \leq 3$.

$q^2 \geq 3pr$, $p = 3 \Rightarrow q^2 \geq 9r \Leftrightarrow r \leq \frac{q^2}{9}$.

Inegalitatea (1) se scrie: $\frac{p^2+q}{pq-r} \leq \frac{3}{q} + \frac{1}{2}, p = 3 \Leftrightarrow \frac{9+q}{3q-r} \leq \frac{3}{q} + \frac{1}{2}, r \leq \frac{q^2}{9} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{9+q}{3q - \frac{q^2}{9}} \leq \frac{3}{q} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{9(9+q)}{27-q} \leq \frac{q+6}{2} \Leftrightarrow q^2 \leq 3q \Leftrightarrow q \leq 3$, vezi mai sus.

Remarca.

In ΔABC

$$1).\ \sum \frac{1}{\sqrt{2\left(\frac{1}{r_b^2} + \frac{1}{r_c^2}\right)}} \leq \frac{9R}{4}.$$

Soluție

Lema.

If $x, y, z > 0, x + y + z = 3$ then

$$\sum \frac{1}{\sqrt{2(y^2+z^2)}} \leq \frac{3}{xy+yz+zx} + \frac{1}{2}.$$

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum \frac{r}{r_a} = 1 \Leftrightarrow \sum \frac{3r}{r_a} = 3$.

Folosind **Lema** pentru $(x, y, z) = \left(\frac{3r}{r_a}, \frac{3r}{r_b}, \frac{3r}{r_c}\right)$ obținem: $\sum \frac{1}{\sqrt{2\left(\frac{1}{r_b^2} + \frac{1}{r_c^2}\right)}} \leq \frac{9R}{4}$.

$$2).\ \sum \frac{1}{\sqrt{2\left(\frac{1}{h_b^2} + \frac{1}{h_c^2}\right)}} \leq \frac{3R}{4}\left(\frac{R}{r} + 1\right).$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Remarca.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=3$ and $3\le\lambda\le\frac{9}{2}$ then

$$\sum\frac{1}{\sqrt{2\left(y^2+z^2\right)}}\le\frac{\lambda}{xy+yz+zx}+\frac{9-2\lambda}{6}.$$

Marin Chirciu

Problema422.

In ΔABC

$$\sum\frac{1}{a}\sqrt{\frac{a}{b+c-a}}\ge\frac{\sqrt{3}}{R}.$$

George Apostolopoulos, Greece, Mathematical Inequalities 2/2025

Soluție

Lema.

In ΔABC

$$\frac{1}{a}\sqrt{\frac{a}{b+c-a}}\ge\frac{2}{b+c}.$$

Soluție

$\frac{1}{a}\sqrt{\frac{a}{b+c-a}\cdot 1}\overset{MG-MH}{\ge}\frac{1}{a}\cdot\frac{2}{\frac{b+c-a}{a}+1}=\frac{2}{b+c}$, cu egalitate pentru $\frac{a}{b+c-a}=1\Leftrightarrow b+c=2a$.

$$LHS=\sum\frac{1}{a}\sqrt{\frac{a}{b+c-a}}\overset{Lema}{\ge}\sum\frac{2}{b+c}\overset{CS}{\ge}2\cdot\frac{9}{\sum(b+c)}=2\cdot\frac{9}{2\sum a}=\frac{9}{2p}\overset{Mitrinovic}{\ge}\frac{9}{3\sqrt{3}R}=\frac{\sqrt{3}}{R}=RHS.$$

Remarca.

In ΔABC

$$\frac{\sqrt{3}}{R}\le\sum\frac{1}{a}\sqrt{\frac{a}{b+c-a}}\le\frac{9R}{4rp}.$$

Marin Chirciu

Problema423.

In ΔABC

$$\sum \frac{\tan\frac{A}{2}}{\sin B+\sin C}\geq 1.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam,RMM 2/2025

Remarca.

In ΔABC

1). $1\leq \sum \frac{\tan\frac{A}{2}}{\sin B+\sin C}\leq \frac{R}{2r}$.

2). $\frac{1}{2R}\leq \sum \frac{\tan\frac{A}{2}}{b+c}\leq \frac{1}{4r}$.

3). $3\leq \sum \frac{\cot\frac{A}{2}}{\sin B+\sin C}\leq 3\cdot\frac{R}{2r}$.

4). $\frac{3}{2R}\leq \sum \frac{\cot\frac{A}{2}}{b+c}\leq \frac{3}{4r}$.

5). $\sum \frac{\tan\frac{A}{2}}{\sin B+\sin C}\leq \frac{R}{6r}\cdot\frac{\cot\frac{A}{2}}{\sin B+\sin C}$.

Soluție.

$$\sum \frac{\tan\frac{A}{2}}{\sin B+\sin C}=\frac{p^2\left(8R^2-3Rr\right)+Rr\left(4R+r\right)^2}{p^2\left(p^2+r^2+2Rr\right)} \text{ și } \sum \frac{\cot\frac{A}{2}}{\sin B+\sin C}=\frac{R\left(p^2+5r^2+8Rr\right)}{r\left(p^2+r^2+2Rr\right)}$$

6). $\sum \frac{\tan\frac{A}{2}}{b+c}\leq \frac{R}{6r}\cdot\frac{\cot\frac{A}{2}}{b+c}$.

Dezvoltări, , Marin Chirciu

Soluție.

Folosim $\sum \frac{\tan\frac{A}{2}}{b+c}=\frac{p^2\left(8R-3r\right)+r\left(4R+r\right)^2}{2p^2\left(p^2+r^2+2Rr\right)}$ și $\sum \frac{\cot\frac{A}{2}}{b+c}=\frac{p^2+5r^2+8Rr}{2r\left(p^2+r^2+2Rr\right)}$.

Problema424.

In ΔABC

$$2\sum a^2b \ge 3abc + \sum ab^2 .$$

Imad Zak, Lebanon, Mathematical Inequalities 2/2025

Soluție.

$2\sum a^2b \ge 3abc + \sum ab^2 \Leftrightarrow \sum (a-b)^2 (b+c-a) \ge 0$.

Problema425.

If $a,b,c>0$, $ab+bc+ca=2abc$ then

$$\sum \frac{b}{a(a+b)} \ge 1.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam, RMM 2/2025

Soluție.

$$\sum \frac{b}{a(a+b)} \ge 1 \Leftrightarrow \sum \frac{b}{a(a+b)} \ge \frac{ab+bc+ca}{2abc} \Leftrightarrow \sum \frac{abc\cdot b}{a(a+b)} \ge \frac{ab+bc+ca}{2} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \sum \frac{b^2c}{(a+b)} \ge \frac{ab+bc+ca}{2} \Leftrightarrow \sum \frac{b^2c^2}{c(a+b)} \ge \frac{ab+bc+ca}{2}$, vezi:

$\sum \frac{b^2c^2}{c(a+b)} \overset{CS}{\ge} \frac{\left(\sum bc\right)^2}{\sum c(a+b)} = \frac{\left(\sum bc\right)^2}{2\sum bc} = \frac{1}{2}\sum bc$. Egalitatea are loc dacă $a=b=c=\frac{3}{2}$.

Remarca.

If $a,b,c>0$, $ab+bc+ca=2abc$ and $\lambda \ge 0$ then

$$\sum \frac{b}{a(a+\lambda b)} \ge \frac{2}{\lambda+1}.$$

Problema426.

J686. If $a,b>0$ then.

$$\sqrt{x^2-ax+a^2}+\sqrt{x^2-bx+b^2} \ge \sqrt{a^2+ab+b^2}, \forall x \in \mathbf{R}.$$

Mircea Becheanu, Canada, Mathematical Reflections 1/2025

Solution

Using Minkowski`inequality we have :

$$LHS=\sqrt{x^2-ax+a^2}+\sqrt{x^2-bx+b^2}=\sqrt{\left(\frac{a}{2}-x\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(x-\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{b\sqrt{3}}{2}\right)^2}\geq$$

$$\geq\sqrt{\left(\left(\frac{a}{2}-x\right)+\left(x-\frac{b}{2}\right)\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}+\frac{b\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}(a-b)^2+\frac{3}{4}(a+b)^2}=\sqrt{a^2+ab+b^2}=RHS,$$

with equality for $\dfrac{\frac{a}{2}-x}{x-\frac{b}{2}}=\dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{b\sqrt{3}}{2}}\Leftrightarrow x=\dfrac{ab}{a+b}$.

Remark.

If $a,b>0$ and $t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ then.

$$\sqrt{x^2-2ax\cos t+a^2}+\sqrt{x^2-2bx\cos t+b^2}\geq\sqrt{a^2-2ab\cos 2t+b^2},\ \forall x\in\mathbf{R}.$$

Marin Chirciu

Solution.

Using Minkowski`inequality we have :

$$LHS=\sqrt{x^2-2ax\cos t+a^2}+\sqrt{x^2-2bx\cos t+b^2}=\sqrt{(a\cos t-x)^2+(a\sin t)^2}+\sqrt{(x-b\cos t)^2+(b\sin t)^2}\geq$$

$$\geq\sqrt{((a\cos t-x)+(x-b\cos t))^2+(a\sin t+b\sin t)^2}=\sqrt{\cos^2 t(a-b)^2+\sin^2 t(a+b)^2}=$$

$=\sqrt{a^2-2ab\cos 2t+b^2}=RHS$, with equality for $\dfrac{a\cos t-x}{x-b\cos t}=\dfrac{a\sin t}{b\sin t}\Leftrightarrow x=\dfrac{2ab}{a+b}\cos t$.

Problema427.

In ΔABC

$$\sum\frac{a^4}{m_b^2}\geq\frac{16}{\sqrt{3}}F.$$

D.M.Bătinețu-Giurgiu, Claudia Nănuți, RMM 2/2025

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{a^4}{m_b^2}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum a^2\right)^2}{\sum m_b^2}=\frac{\left(\sum a^2\right)^2}{\frac{3}{4}\sum a^2}=\frac{4}{3}\sum a^2\overset{I-W}{\geq}\frac{4}{3}\cdot4\sqrt{3}F=\frac{16}{\sqrt{3}}F=RHS.$$

Remarca.

In ΔABC

$$\sum \frac{a^{2n}}{m_b^2} \geq 4\left(\frac{4F}{\sqrt{3}}\right)^{n-1}, n \in \mathbf{N}, n \geq 2.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$\sum \frac{a^{2n}}{m_b^2} \overset{Holder}{\geq} \frac{\left(\sum a^2\right)^n}{3^{n-2}\sum m_b^2} = \frac{\left(\sum a^2\right)^n}{3^{n-2}\frac{3}{4}\sum a^2} = \frac{4}{3^{n-1}}\left(\sum a^2\right)^{n-1} \overset{I-W}{\geq} \frac{4}{3^{n-1}}\cdot\left(4\sqrt{3}F\right)^{n-1} = 4\left(\frac{4F}{\sqrt{3}}\right)^{n-1}.$$

Problema428.

In ΔABC

$$\sum \frac{a^4}{m_b^2} \geq \frac{16}{\sqrt{3}}F.$$

D.M.Bătinețu-Giurgiu, Claudia Nănuți,RMM 2/2025

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{a^4}{m_b^2} \overset{CS}{\geq} \frac{\left(\sum a^2\right)^2}{\sum m_b^2} = \frac{\left(\sum a^2\right)^2}{\frac{3}{4}\sum a^2} = \frac{4}{3}\sum a^2 \overset{I-W}{\geq} \frac{4}{3}\cdot 4\sqrt{3}F = \frac{16}{\sqrt{3}}F = RHS.$$

Remarca.

In ΔABC

$$\sum \frac{a^{2n}}{m_b^2} \geq 4\left(\frac{4F}{\sqrt{3}}\right)^{n-1}, n \in \mathbf{N}, n \geq 2.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$\sum \frac{a^{2n}}{m_b^2} \overset{Holder}{\geq} \frac{\left(\sum a^2\right)^n}{3^{n-2}\sum m_b^2} = \frac{\left(\sum a^2\right)^n}{3^{n-2}\frac{3}{4}\sum a^2} = \frac{4}{3^{n-1}}\left(\sum a^2\right)^{n-1} \overset{I-W}{\geq} \frac{4}{3^{n-1}}\cdot\left(4\sqrt{3}F\right)^{n-1} = 4\left(\frac{4F}{\sqrt{3}}\right)^{n-1}.$$

Problema429.

In ΔABC

$$\sum \frac{\cot A}{a^2} \ge \frac{3}{4F}.$$

D.M.Bătinețu-Giurgiu, Claudia Nănuți,RMM 2/2025

Soluție

Lema.

In ΔABC

$$\sum \frac{\cot A}{a^2} = \frac{p^6 + p^4\left(r^2 - 12Rr\right) + p^2r^2\left(8Rr - r^2\right) - r^3\left(4R + r\right)^3}{32R^2r^3p^3}.$$

$$\sum \frac{\cot A}{a^2} = \frac{p^6 + p^4\left(r^2 - 12Rr\right) + p^2r^2\left(8Rr - r^2\right) - r^3\left(4R + r\right)^3}{32R^2r^3p^3} =$$

$$= \frac{p^2\left[p^2\left(p^2 + r^2 - 12Rr\right) + r^2\left(8Rr - r^2\right)\right] - r^3\left(4R + r\right)^3}{32R^2r^3p^3} =$$

$$= \frac{1}{32R^2r^3p}\left[\left[p^2\left(p^2 + r^2 - 12Rr\right) + r^2\left(8Rr - r^2\right)\right] - \frac{r^3\left(4R + r\right)^3}{p^2}\right] \overset{Gerretsen}{\ge}$$

$$\overset{Gerretsen}{\ge} \frac{60R^2 - 81Rr + 18r^2}{32R^2rp} \overset{Euler}{\ge} \frac{24R^2}{32R^2rp} = \frac{3}{4rp}.$$

Remarca.

In ΔABC

$$1).\ \sum \frac{\cot A}{a^2} \le \frac{3R^3}{32r^4p}.$$

$$2).\ \frac{3}{4rp} \le \sum \frac{\cot A}{a^2} \le \frac{3R^3}{32r^4p}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema430.

If $a,b,c,d > 0$, $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$ then

$$\sum \frac{a}{\sqrt[4]{a+15}} + \frac{480}{\sum a + 60} \le \frac{19}{2}.$$

Kunihiko Chikaya, Mathematical Inequalities 2/2025

Soluție.

Lema.

If $a,b,c>0$ then

$$\frac{a}{\sqrt[4]{a+15}}\le\frac{63a+1}{128}.$$

$$LHS=\sum\frac{a}{\sqrt[4]{a+15}}+\frac{480}{\sum a+60}\overset{Lema}{\le}\sum\frac{63a+1}{128}+\frac{480}{\sum a+60}=\frac{63}{128}p+\frac{1}{32}+\frac{480}{p+60}\overset{(1)}{\le}\frac{19}{2}=RHS,$$

unde $\frac{63}{128}p+\frac{1}{32}+\frac{480}{p+60}\overset{(1)}{\le}\frac{19}{2}\Leftrightarrow 21p^2+856p-3760\le 0\Leftrightarrow (p-4)(21p+940)\le 0\Leftrightarrow$
$p\le 4$,vezi $p=\sum a\overset{CBS}{\le}\sqrt{4\sum a^2}=\sqrt{4\cdot 4}=4$.

Remarca.

If $a,b,c>0$, $a^2+b^2+c^2=3$ then

$$\sum\frac{a}{\sqrt[3]{a+7}}+\frac{126}{\sum a+21}\le\frac{27}{4}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema.

If $a,b,c>0$ then

$$\frac{a}{\sqrt[3]{a+7}}\le\frac{63a+1}{48}.$$

$$LHS=\sum\frac{a}{\sqrt[3]{a+7}}+\frac{126}{\sum a+21}\overset{Lema}{\le}\sum\frac{23a+1}{48}+\frac{126}{\sum a+21}=\frac{23}{48}p+\frac{1}{16}+\frac{126}{p+21}\overset{(1)}{\le}\frac{27}{4}=RHS,$$

unde $\frac{23}{48}p+\frac{1}{16}+\frac{126}{p+21}\overset{(1)}{\le}\frac{27}{4}\Leftrightarrow 23p^2+162p-693\le 0\Leftrightarrow (p-3)(23p+231)\le 0\Leftrightarrow p\le 3$
,vezi $p=\sum a\overset{CBS}{\le}\sqrt{3\sum a^2}=\sqrt{3\cdot 3}=3$. Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarca.

If $a,b>0$, $a^2+b^2=2$ then

$$\frac{a}{\sqrt{a+3}}+\frac{b}{\sqrt{b+3}}+\frac{12}{a+b+6}\le\frac{5}{2}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema.

If $a,b,c>0$ then

$$\frac{a}{\sqrt{a+3}}\le\frac{7a+1}{16}.$$

$$LHS=\sum\frac{a}{\sqrt{a+3}}+\frac{12}{\sum a+6}\overset{Lema}{\le}\sum\frac{7a+1}{16}+\frac{12}{\sum a+6}=\frac{7}{16}p+\frac{1}{8}+\frac{12}{p+6}\overset{(1)}{\le}\frac{5}{2}=RHS,$$

unde $\frac{7}{16}p+\frac{1}{8}+\frac{12}{p+6}\overset{(1)}{\le}\frac{5}{2}\Leftrightarrow 7p^2+4p-36\le 0\Leftrightarrow (p-2)(7p+18)\le 0\Leftrightarrow p\le 2$,vezi

$p=\sum a\overset{CBS}{\le}\sqrt{2\sum a^2}=\sqrt{2\cdot 2}=4$. Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=1$.

Problema431.

In non-isoscel ΔABC

$$\frac{\sum m_a^4-9F^2}{\sum m_a^2-3\sqrt{3}F}\ge 2\sqrt{3}F.$$

D.M.Bătinețu-Giurgiu, Daniel Sitaru,RMM 2/2025

Soluție

$$LHS=\frac{\sum m_a^4-9F^2}{\sum m_a^2-3\sqrt{3}F}\overset{CS}{\ge}\frac{\frac{\left(\sum m_a^2\right)^2}{3}-9F^2}{\sum m_a^2-3\sqrt{3}F}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\left(\sum m_a^2\right)^2-27F^2}{\sum m_a^2-3\sqrt{3}F}\overset{Chebyshev}{\ge}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{\left(\sum m_a^2-3\sqrt{3}F\right)\left(\sum m_a^2+3\sqrt{3}F\right)}{\sum m_a^2-3\sqrt{3}F}=\frac{\sum m_a^2+3\sqrt{3}F}{3}\overset{I-W}{\ge}\frac{3\sqrt{3}F+3\sqrt{3}F}{3}=2\sqrt{3}F=RHS.$$

Remarca.

In non-isoscel ΔABC

$$\frac{\sum m_a^{2n}-3\left(\sqrt{3}\right)^nF^n}{\sum m_a^2-3\sqrt{3}F}\ge n\left(\sqrt{3}F\right)^{n-1}, n\in\mathbf{N}^*.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Pentru $n=1$ se obține egalitatea 1=1.

În continuare fie $n\geq 2$.

$$LHS=\frac{\sum m_a^{2n}-3\left(\sqrt{3}\right)^n F^n}{\sum m_a^2-3\sqrt{3}F}\overset{Holder}{\geq}\frac{\frac{\left(\sum m_a^2\right)^n}{3^{n-1}}-3\left(\sqrt{3}\right)^n F^2}{\sum m_a^2-3\sqrt{3}F}=\frac{1}{3^{n-1}}\cdot\frac{\left(\sum m_a^2\right)^n-3^n\left(\sqrt{3}\right)^n F^2}{\sum m_a^2-3\sqrt{3}F}=$$

$$=\frac{1}{3^{n-1}}\cdot\frac{\left(\sum m_a^2-3\sqrt{3}F\right)\left(\left(\sum m_a^2\right)^{n-1}+\left(\sum m_a^2\right)^{n-2}\cdot 3\sqrt{3}F+...+\left(3\sqrt{3}F\right)^{n-1}\right)}{\sum m_a^2-3\sqrt{3}F}=$$

$$=\frac{\left(\sum m_a^2\right)^{n-1}+\left(\sum m_a^2\right)^{n-2}\cdot 3\sqrt{3}F+...+\left(3\sqrt{3}F\right)^{n-1}}{3^{n-1}}\overset{I-W}{\geq}\frac{n\left(3\sqrt{3}F\right)^{n-1}}{3^{n-1}}=n\left(\sqrt{3}F\right)^{n-1}=RHS$$

Problema432.

If $a,b,c>0$, $\prod\left(a^2+ab+b^2\right)=27$ then

$$\prod\left(a^2+b^2\right)\prod\left(a+b\right)\geq 64.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam, RMM 2/2025

Soluție.

Lema.

If $a,b,c>0$ then

$$\left[\frac{\left(a^2+b^2\right)\left(a+b\right)}{4}\right]^2\geq\left(\frac{a^2+ab+b^2}{3}\right)^3.$$

$$LHS^2=\prod\left(a^2+b^2\right)^2\prod\left(a+b\right)^2=\prod\left(a^2+b^2\right)^2\left(a+b\right)^2\overset{Lema}{\geq}\prod\frac{16}{27}\left(a^2+ab+b^2\right)^3=$$

$=\left(\frac{16}{27}\right)^3 27^3=16^3=\left(4^3\right)^2=RHS^2$. Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarca.

1). If $a,b,c>0$, $\prod\left(a^2+ab+b^2\right)=27$ then

$$\prod\left(a^2+b^2\right)\geq 8.$$

Soluție.

$\frac{a^2+b^2}{2}\geq\frac{a^2+ab+b^2}{3}\Leftrightarrow(a-b)^2\geq 0$,cu egalitate pentru $a=b$.

$LHS=\prod\left(a^2+b^2\right)\overset{Lema}{\geq}\prod\frac{2}{3}\left(a^2+ab+b^2\right)=\frac{8}{27}\cdot 27=8=RHS$.

2). If $a,b,c>0$, $a^2+ab+b^2=3$ then

$$\prod\left(a^2+b^2\right)\geq 8.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$\frac{a^2+b^2}{2}\geq\frac{a^2+ab+b^2}{3}\Leftrightarrow(a-b)^2\geq 0$,cu egalitate pentru $a=b$.

$LHS=\prod\left(a^2+b^2\right)\overset{Lema}{\geq}\prod\frac{2}{3}\left(a^2+ab+b^2\right)=\frac{8}{27}\cdot 27=8=RHS$.

3). If $a,b,c>0$, $a^2+ab+b^2=3$ then

$$\sum a^2\geq 3.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$\frac{a^2+b^2}{2}\geq\frac{a^2+ab+b^2}{3}\Leftrightarrow(a-b)^2\geq 0$,cu egalitate pentru $a=b$.

$LHS=\sum a^2=\frac{1}{2}\sum\left(a^2+b^2\right)\overset{Lema}{\geq}\frac{1}{2}\sum\frac{2}{3}\left(a^2+ab+b^2\right)=\frac{1}{2}\sum\frac{2}{3}\cdot 3=3=RHS$.

Problema433.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=1$ then

$$5\left(x^3+y^3+z^3+xy+yz+zx\right)+3xyz\geq\frac{7}{3}.$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam, RMM 2/2025

Soluție

Folosim pqr -Method.

Notăm $p = x + y + z = 1, q = xy + yz + zx, r = xyz$.

Avem $x^3 + y^3 + z^3 = p^3 - 3pq + 9r = 1 - 3q + 9r$.

Inegalitatea se scrie: $5(1-3q+3r+q)+3r \geq \frac{7}{3} \Leftrightarrow 4+27r \geq 15q$, care rezultă din inegalitatea lui Schur $p^3 - 4pq + 9r \geq 0$, $p = 1 \Rightarrow 1-4q+9r \geq 0 \Rightarrow r \geq \frac{4q-1}{9}$.

Rămâne să arătăm că: $4+27 \cdot \frac{4q-1}{9} \geq 15q \Leftrightarrow 3q \leq 1$, vezi $3q \leq p^2 = 1$.

Remarca.

If $x, y, z > 0$, $x + y + z = 1$ and $\lambda \leq \frac{3}{2}$ then

1). $$\sum\left(x^3 + yz\right) + \lambda xyz \geq \frac{\lambda+12}{27}.$$

Remarca.

2). $$2\sum\left(x^3 + yz\right) + 3xyz \geq 1.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Remarca.

In ΔABC

1). $$5\left(\sum \frac{r^3}{r_a^3} + \frac{r^2}{r_a r_b}\right) + \frac{3r^2}{p^2} \geq \frac{7}{3}.$$

Soluție

Lema.

If $x, y, z > 0$, $x + y + z = 1$ then

$$5\left(x^3 + y^3 + z^3 + xy + yz + zx\right) + 3xyz \geq \frac{7}{3}.$$

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum \frac{r}{r_a} = 1$.

Folosind **Lema** pentru $(x,y,z)=\left(\frac{r}{r_a},\frac{r}{r_b},\frac{r}{r_c}\right)$ obținem: $5\left(\sum\frac{r^3}{r_a^3}+\frac{r^2}{r_ar_b}\right)+\frac{3r^2}{p^2}\geq\frac{7}{3}$.

Remarca.

In ΔABC

$$2).\ 5\left(\sum\frac{r^3}{h_a^3}+\frac{r^2}{h_ah_b}\right)+\frac{3r^2}{p^2}\geq\frac{7}{3}.$$

Dezvoltări, ,Marin Chirciu

Problema434.

In acute ΔABC

$$\sum a\sqrt{\sin A}>\frac{4}{3}p.$$

Vasile Mircea Popa,RMM 2/2025

Soluție

$$LHS=\sum a\sqrt{\sin A}\overset{Chebyshev}{\geq}\frac{1}{3}\sum a\sum\sqrt{\sin A}\overset{\sin A<1}{>}\frac{1}{3}\sum a\sum\sin A=\frac{1}{3}\cdot 2p\cdot\frac{p}{R}\overset{p>2R+r}{>}$$

$$\overset{p>2R+r}{>}\frac{1}{3}\cdot 2p\cdot\frac{2R+r}{R}>\frac{2p}{3}\cdot 2=\frac{4}{3}p=RHS.$$

Remarca.

In acute ΔABC

$$\sum a^n\sqrt{\sin A}>2\left(\frac{2p}{3}\right)^n, n\in\mathbf{N}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Pentru $n=0$ se obține $\sum\sqrt{\sin A}>2$, vezi $\sum\sqrt{\sin A}\overset{\sin A<1}{>}\sum\sin A=\frac{p}{R}\overset{p>2R+r}{>}\frac{R+2r}{R}>2$.

În continuare fie $n\in\mathbf{N}^*$.

$$LHS=\sum a^n\sqrt{\sin A}\overset{Chebyshev}{\geq}\frac{1}{3}\sum a^n\sum\sqrt{\sin A}\overset{\sin A<1}{>}\frac{1}{3}\sum a^n\sum\sin A\overset{Holder}{\geq}\frac{1}{3}\cdot 3\left(\frac{2p}{3}\right)^n\cdot\frac{p}{R}\overset{p>2R+r}{>}$$

$$\overset{p>2R+r}{>} \frac{1}{3}\cdot 3\left(\frac{2p}{3}\right)^n \cdot \frac{2R+r}{R} > \left(\frac{2p}{3}\right)^n \cdot 2 = 2\left(\frac{2p}{3}\right)^n = RHS\,.$$

Problema435.

Solve in real numbers the equation:

$$\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}=2x^2-5x-3.$$

Chuyen Toan, Vietnam,THCS 2/2025

Soluție

Domeniul de definiție al ecuației este $[2,4]$. Amplificând cu conjugata avem:

$$\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}=2x^2-5x-3 \Leftrightarrow \frac{(x-2)-(4-x)}{\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}}=2x^2-5x-3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x-3)}{\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}}=(x-3)(2x+1).$$

Obținem $(x-3)=0 \Leftrightarrow x=3$ sau $\frac{2}{\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}}=2x+1$,fals,deoarece

$\frac{2}{\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}} \le \sqrt{2} < 5 \le 2x+1, 2 \le x \le 4$, vezi: $1 \le \frac{2}{\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}} \le \sqrt{2}, 2 \le x \le 4$.

Deducem că $x=3$ este soluția unică a ecuației,

Remarca.

Let $\lambda \ge 2$ fixed. Solve in real numbers the equation:

$$\sqrt{x-\lambda+1}-\sqrt{\lambda+1-x}=2x^2+(1-2\lambda)x-\lambda\,.$$

Marin Chirciu

Soluție

Deducem că $x=\lambda$ este soluția unică a ecuației,

Problema436.

If $a,b,c \ge 0$, $a+b+c=3$ then

$$\frac{9}{a^4+b^4+c^4}+\frac{4}{3} \le \frac{13}{a^2+b^2+c^2}\,.$$

Vasile Cârtoaje, Mathematical Inequalities 2/2025

Soluție

Folosim pqr -Method.

Notăm $p = a+b+c = 3, q = ab+bc+ca \le 3, r = abc$.

Avem $x = \sum a^2 = p^2 - 2q = 9-2q \Rightarrow 3 \le x \le 9$, (1), vezi $0 \le q \le 3$.

$$\sum a^4 \sum a \sum a \overset{Holder}{\ge} \left(\sum a^2\right)^3 = x^3 \Rightarrow \sum a^4 \ge \frac{x^3}{9}, \text{ (2).}$$

$$LHS = \frac{9}{\sum a^4} + \frac{4}{3} \overset{(2)}{\le} \frac{9}{\frac{x^3}{9}} + \frac{4}{3} = \frac{81}{x^3} + \frac{4}{3} \overset{(3)}{\le} \frac{13}{x} = RHS,$$

unde $\frac{81}{x^3} + \frac{4}{3} \overset{(3)}{\le} \frac{13}{x} \Leftrightarrow 4x^3 - 39x^2 + 243 \le 0 \Leftrightarrow (x-3)(9-x)(4x+9) \ge 0$, vezi $3 \le x \le 9$, (1).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $(a,b,c) \in \{(1,1,1),(3,0,0),(0,3,0),(0,0,3)\}$.

Remarcă.

If $a,b,c > 0$, $a+b+c=3$ and $\lambda \ge \frac{27}{4}$ then

$$\frac{\lambda}{a^4+b^4+c^4} + 1 \le \frac{\lambda+3}{a^2+b^2+c^2}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Folosim pqr -Method.

Notăm $p = a+b+c = 3, q = ab+bc+ca \le 3, r = abc$.

Avem $x = \sum a^2 = p^2 - 2q = 9-2q \Rightarrow 3 \le x < 9$, (1), vezi $0 < q \le 3$.

$$\sum a^4 \sum a \sum a \overset{Holder}{\ge} \left(\sum a^2\right)^3 = x^3 \Rightarrow \sum a^4 \ge \frac{x^3}{9}, \text{ (2).}$$

$$LHS = \frac{\lambda}{\sum a^4} + 1 \overset{(2)}{\le} \frac{\lambda}{\frac{x^3}{9}} + 1 = \frac{9\lambda}{x^3} + 1 \overset{(3)}{\le} \frac{\lambda+3}{x} = RHS,$$

unde $\frac{9\lambda}{x^3} + 1 \overset{(3)}{\le} \frac{\lambda+3}{x} \Leftrightarrow x^3 - (\lambda+3)x^2 + 9\lambda \le 0 \Leftrightarrow (x-3)(x^2 - \lambda x - 3\lambda) \le 0$, vezi $\lambda \ge \frac{27}{4}$ și $3 \le x < 9$, (1).

Remarcă.

In ΔABC

$$1).\ \frac{1}{\sum \frac{r^4}{r_a^4}} + 12 \le \frac{13}{\sum \frac{r^2}{r_a^2}}.$$

Soluție

Lema.

If $a,b,c>0$, $a+b+c=3$ then

$$\frac{9}{a^4+b^4+c^4} + \frac{4}{3} \le \frac{13}{a^2+b^2+c^2}.$$

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum \frac{r}{r_a} = 1 \Leftrightarrow \sum \frac{3r}{r_a} = 3$.

Folosind **Lema** pentru $(a,b,c) = \left(\frac{3r}{r_a}, \frac{3r}{r_b}, \frac{3r}{r_c}\right)$ obținem: $\frac{1}{\sum \frac{r^4}{r_a^4}} + 12 \le \frac{13}{\sum \frac{r^2}{r_a^2}}$.

$$2).\ \frac{1}{\sum \frac{r^4}{h_a^4}} + 12 \le \frac{13}{\sum \frac{r^2}{h_a^2}}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema438.

Solve in real numbers the system:

$$\begin{cases} -\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{x}{yz} \\ \frac{1}{z} - \frac{1}{y} + \frac{1}{x} = \frac{y}{zx} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = \frac{z}{xy} \end{cases}.$$

Marin Chirciu, Mate 2/200/25

Soluție

Avem $x, y, z \in \mathbf{R}^*$.

Adunând ecuațiile obținem $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{x}{yz}+\frac{y}{zx}+\frac{z}{xy} \Leftrightarrow \frac{xy+yz+zx}{xyz}=\frac{x^2+y^2+z^2}{xyz} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx \Leftrightarrow (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0 \Leftrightarrow x=y=z$.

Mulțimea soluțiilor sistemului este $S=\{(\lambda,\lambda,\lambda) | \lambda \in \mathbf{R}^*\}$.

Problema439.

If $a,b,c \geq 0$, $a+b+c=3$ then

$$\frac{3}{a^3+b^3+c^3}+\frac{1}{3} \leq \frac{4}{a^2+b^2+c^2}.$$

Vasile Cârtoaje, Mathematical Inequalities 2/2025

Soluție

Folosim pqr -Method.

Notăm $p=a+b+c=3, q=ab+bc+ca \leq 3, r=abc$.

Avem $x=\sum a^2=p^2-2q=9-2q \Rightarrow 3 \leq x \leq 9$, (1), vezi $0 \leq q \leq 3$.

$\sum a^3 \sum a \overset{CBS}{\geq} \left(\sum a^2\right)^2=x^2 \Rightarrow \sum a^3 \geq \frac{1}{3}x^2$, (2).

$LHS=\frac{3}{\sum a^3}+\frac{1}{3} \overset{(2)}{\leq} \frac{3}{\frac{1}{3}x^2}+\frac{1}{3}=\frac{9}{x^2}+\frac{1}{3} \overset{(3)}{\leq} \frac{4}{x}=RHS$,

unde $\frac{9}{x^2}+\frac{1}{3} \overset{(3)}{\leq} \frac{4}{x} \Leftrightarrow x^2-12x+27 \leq 0 \Leftrightarrow (x-3)(9-x) \geq 0$, vezi $3 \leq x \leq 9$, (1).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $(a,b,c) \in \{(1,1,1),(3,0,0),(0,3,0),(0,0,3)\}$.

Remarcă.

If $a_1,a_2,\ldots,a_n \geq 0$, $a_1+a_2+\ldots+a_n=n$ then

$$\frac{n}{\sum a_1^3}+\frac{1}{n} \leq \frac{n+1}{\sum a_1^2}.$$

Imad Zak, Lebanon

Soluție

Fie $x=\sum a_1^2 \Rightarrow \sum a_1^3 \sum a_1 \overset{CBS}{\geq} \left(\sum a_1^2\right)^2 = x^2 \Rightarrow \sum a_1^3 \geq \frac{x^2}{n}$, (1).

$$x=\sum a_1^2 \overset{CS}{\geq} \frac{\left(\sum a_1\right)^2}{n} = \frac{n^2}{n} = n.$$

$$\left(\sum a_1\right)^2 - \sum a_1^2 = \sum a_1 a_2 \geq 0 \Rightarrow n^2 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq n^2.$$

Din $x \geq n$ și $x \leq n^2 \Rightarrow n \leq x \leq n^2$, (2).

$$LHS = \frac{n}{\sum a_1^3} + \frac{1}{n} \overset{(1)}{\leq} \frac{n}{\frac{x^2}{n}} + \frac{1}{n} = \frac{n^2}{x^2} + \frac{1}{n} \overset{(3)}{\leq} \frac{n+1}{x} = RHS,$$

unde $\frac{n^2}{x^2} + \frac{1}{n} \overset{(3)}{\leq} \frac{n+1}{x} \Leftrightarrow x^2 - n(n+1)x + n^3 \leq 0 \Leftrightarrow (x-n)(n^2-x) \geq 0$, vezi $n \leq x \leq n^2$, (2).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $(a_1, a_2, ..., a_n) = (1,1,...,1)$, $(n,0,...,0)$ și permutările .

Remarcă.

If $a,b,c>0$, $a+b+c=3$ and $\lambda \geq 9$ then

$$\frac{\lambda}{a^3+b^3+c^3} + 1 \leq \frac{\lambda+3}{a^2+b^2+c^2}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Folosim pqr -Method.

Notăm $p=a+b+c=3, q=ab+bc+ca \leq 3, r=abc$.

Avem $x=\sum a^2 = p^2-2q = 9-2q \Rightarrow 3 \leq x < 9$, (1), vezi $0<q\leq 3$.

$$\sum a^3 \sum a \overset{CBS}{\geq} \left(\sum a^2\right)^2 = x^2 \Rightarrow \sum a^3 \geq \frac{1}{3}x^2, \text{ (2).}$$

Obținem:

$$LHS = \frac{\lambda}{\sum a^3} + 1 \overset{(2)}{\leq} \frac{\lambda}{\frac{1}{3}x^2} + 1 = \frac{3\lambda}{x^2} + 1 \overset{(3)}{\leq} \frac{\lambda+3}{x} = RHS,$$

unde $\frac{3\lambda}{x^2} + 1 \overset{(3)}{\leq} \frac{\lambda+3}{x} \Leftrightarrow x^2 - (\lambda+3)x + 3\lambda \leq 0 \Leftrightarrow (x-3)(\lambda - x) \geq 0$, vezi $\lambda \geq 9$, $3 \leq x < 9$, (1).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $(a,b,c)=(1,1,1)$.

Remarcă.

If $a,b,c,d \ge 0$, $a+b+c+d=4$ and $\lambda \ge 16$ then

$$\frac{\lambda}{a^3+b^3+c^3+d^3}+1 \le \frac{\lambda+4}{a^2+b^2+c^2+d^2}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Fie $x=\sum a^2 \Rightarrow \sum a^3 \sum a \overset{CBS}{\ge} \left(\sum a^2\right)^2 = x^2 \Rightarrow \sum a^3 \ge \frac{x^2}{4}$, (1).

$$x=\sum a^2 \overset{CS}{\ge} \frac{\left(\sum a\right)^2}{4}=\frac{4^2}{4}=4 \Rightarrow x \ge 4.$$

$$\left(\sum a\right)^2-\sum a^2=\sum ab>0 \Rightarrow 4^2-x>0 \Rightarrow x<16.$$

Din $x \ge 4$ și $x<16 \Rightarrow 4 \le x<16$, (2).

$$LHS=\frac{\lambda}{\sum a^3}+1 \overset{(1)}{\le} \frac{\lambda}{\frac{x^2}{4}}+1=\frac{4\lambda}{x^2}+1 \overset{(3)}{\le} \frac{\lambda+4}{x}=RHS,$$

unde $\frac{4\lambda}{x^2}+1 \overset{(3)}{\le} \frac{\lambda+4}{x} \Leftrightarrow x^2-(\lambda+4)x+4\lambda \le 0 \Leftrightarrow (x-4)(\lambda-x) \ge 0$, vezi $\lambda \ge 16$, $4 \le x < 16$,

Remarcă.

In ΔABC

1). $$\frac{1}{3r^3\sum \frac{1}{r_a^3}}+1 \le \frac{4}{3r^2\sum \frac{1}{r_a^2}}.$$

Soluție

Lema.

If $a,b,c>0$, $a+b+c=3$ then

$$\frac{9}{a^3+b^3+c^3}+1 \le \frac{12}{a^2+b^2+c^2}.$$

Soluție

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum \frac{r}{r_a} = 1 \Leftrightarrow \sum \frac{3r}{r_a} = 3$.

Folosind **Lema** pentru $(a,b,c) = \left(\frac{3r}{r_a}, \frac{3r}{r_b}, \frac{3r}{r_c}\right)$ obținem: $\frac{1}{3r^3 \sum \frac{1}{r_a^3}} + 1 \le \frac{4}{3r^2 \sum \frac{1}{r_a^2}}$.

Remarcă.

In ΔABC

$$2).\ \frac{1}{3r^3 \sum \frac{1}{h_a^3}} + 1 \le \frac{4}{3r^2 \sum \frac{1}{h_a^2}}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema440.

If $a,b > 0$,then find max of

$$E = \frac{ab+b^2}{a^2+b^2}.$$

Lee Chan Lye,Vietnam,Math Olymp 2/2025

Soluție

$$E = \frac{ab+b^2}{a^2+b^2} = \frac{\frac{a}{b}+1}{\frac{a^2}{b^2}+1} \overset{\frac{a}{b}=t}{=} \frac{t+1}{t^2+1} = \frac{1}{t+1+\frac{2}{t+1}-2} \overset{AM-GM}{\le} \frac{1}{2\sqrt{(t+1)\cdot\frac{2}{t+1}}-2} = \frac{1}{2\sqrt{2}-2} = \frac{\sqrt{2}+1}{2},$$

cu egalitate pentru $t+1 = \frac{2}{t+1} \Leftrightarrow (t+1)^2 = 2 \Leftrightarrow t+1 = \sqrt{2} \Leftrightarrow t = \sqrt{2}-1 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \sqrt{2}-1.$

Deducem că maxE= $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$ pentru $\frac{a}{b} = \sqrt{2}-1.$

Remarcă.

Let $\lambda > 0$ fixed. If $a,b > 0$,then find max of

$$E = \frac{ab+b^2}{a^2+\lambda b^2}.$$

Marin Chirciu

Deducem că maxE=$\frac{\sqrt{\lambda+1}+1}{2\lambda}$ pentru $\frac{a}{b}=\sqrt{\lambda+1}-1$.

Problema441.

L479. If $a,b,c>0$, $a+b+c=3$ then

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{a^3+b^3+c^3}+\frac{a^2+b^2+c^2}{15}\le\frac{6}{5}.$$

Marian Cucoaneș, Marius Drăgan, Recreații Matematice 1/2025

Soluție

Folosim pqr -Method.

Notăm $p=a+b+c=3, q=ab+bc+ca, r=abc$.

Avem $a^2+b^2+c^2=p^2-2q=9-2q$, $a^3+b^3+c^3=p^3-3pq+3r=27-8q+3r$.

Inegalitatea se scrie:

$\frac{9-2q}{27-8q+3r}+\frac{9-2q}{15}\le\frac{6}{5}\Leftrightarrow 6q^2\le 36+q+2qr+9r$, care rezultă din inegalitatea lui Schur:

$p^3-4pq+9r\ge 0$, $p=3\Rightarrow 27-12q+9r\ge 0\Leftrightarrow 9-4q+3r\ge 0\Rightarrow r\ge\frac{4q-9}{3}$.

Din $6q^2\le 36+q+2qr+9r$ și $r\ge\frac{4q-9}{3}$ este suficient să arătăm că:

$$6q^2\le 36+q+2q\cdot\frac{4q-9}{3}+9\cdot\frac{4q-9}{3}\Leftrightarrow 10q^2-21q-27\le 0\Leftrightarrow (q-3)(10q+9)\le 0\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow q\le 3$, vezi $q\le\frac{1}{3}p^2=\frac{1}{3}\cdot 3^2=3$.

Remarcă.

If $a,b,c>0$, $a+b+c=3$ then

1). $\frac{a^2+b^2+c^2}{a^3+b^3+c^3}+\frac{a^2+b^2+c^2}{\lambda}\le 1+\frac{3}{\lambda},\lambda\ge 12$.

2). $\frac{a^2+b^2+c^2}{a^3+b^3+c^3}+\frac{a^2+b^2+c^2}{12}\le\frac{5}{4}$.

$$3).\ \frac{ab+bc+ca}{a^3+b^3+c^3}+\frac{a^2+b^2+c^2}{\lambda}\le 1+\frac{3}{\lambda}, \lambda\ge 6.$$

$$4).\ \frac{ab+bc+ca}{a^3+b^3+c^3}+\frac{a^2+b^2+c^2}{6}\le \frac{3}{2}.$$

$$5).\ \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}+\frac{a^3+b^3+c^3}{\lambda}\le 1+\frac{3}{\lambda}, \lambda\ge 27.$$

$$6).\ \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}+\frac{a^3+b^3+c^3}{27}\le \frac{10}{9}.$$

$$7).\ \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}+\frac{a^2+b^2+c^2}{\lambda}\le 1+\frac{3}{\lambda}, \lambda\ge 6.$$

$$8).\ \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}+\frac{a^2+b^2+c^2}{6}\le \frac{3}{2}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema442.

If $x, y, z > 0$, $x+y+z=1$

$$1).\ \sum\frac{yz}{x}\ge 1.$$

Soluție

$$LHS=\sum\frac{yz}{x}=\sum\frac{y^2z^2}{xyz}\overset{(1)}{\ge}\sum x=1=RHS,$$

unde $\sum\frac{y^2z^2}{xyz}\overset{(1)}{\ge}\sum x \Leftrightarrow \sum y^2z^2\ge xyz\sum x$, vezi $\sum a^2\ge\sum ab$ pentru $(a,b,c)=(xy,yz,zx)$.

$$2).\ \sum\left(\frac{yz}{x}\right)^n\ge 3^{1-n}, n\in\mathbf{N}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Remarcă.

In ΔABC

$$1).\ \sum\frac{r_a}{r_br_c}\ge\frac{1}{r}.$$

Soluție

Lema.

If $x, y, z > 0$, $x + y + z = 1$

$$\sum \frac{yz}{x} \geq 1.$$

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum \frac{r}{r_a} = 1$.

Folosind **Lema** pentru $(x, y, z) = \left(\frac{r}{r_a}, \frac{r}{r_b}, \frac{r}{r_c}\right)$ obținem: $\sum \frac{r_a}{r_b r_c} \geq \frac{1}{r}$.

Remarcă.

In ΔABC

$$2).\ \sum \frac{h_a}{h_b h_c} \geq \frac{1}{r}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema443.

Calculate

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{(\sin x + \cos x)^3} dx .$$

Elton Papanikolla,Math Olymp 2/2025

Soluție

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{(\sin x + \cos x)^3} dx \overset{x=\frac{\pi}{2}-t}{=} \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\cos t}{(\sin t + \cos t)^3}(-dt) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{(\sin t + \cos t)^3} dt$$

Obținen

$$I + I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{(\sin x + \cos x)^3} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(\sin x + \cos x)^3} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + \cos x}{(\sin x + \cos x)^3} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2} dx .$$

Să calculăm: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2} dx$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(\sin x+\cos x)^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin 2x}dx \overset{t=tg\frac{x}{2}}{=} \int_0^1 \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{2dt}{(t+1)^2} = 2\cdot\frac{-1}{t+1}\Big|_0^1 = 2\cdot\frac{1}{2} = 1.$$

Rezultă $2I=1 \Rightarrow I=\frac{1}{2}$. Deducem că $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{(\sin x+\cos x)^3}dx = \frac{1}{2}$.

Problema444.

If $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ then

$$\frac{4}{\sin x}+\frac{9}{\cos x} \ge \frac{25}{\sqrt{2}}.$$

Panagiotis Danousis, Greece, MathAtelier 2/2025

Soluție

$$LHS = \frac{4}{\sin x}+\frac{9}{\cos x} \overset{CS}{\ge} \frac{(2+3)^2}{\sin x+\cos x} \overset{(1)}{\ge} \frac{25}{\sqrt{2}} = RHS,$$

unde $\frac{(2+3)^2}{\sin x+\cos x} \overset{(1)}{\ge} \frac{25}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sin x+\cos x \le \sqrt{2}$, vezi $\sin x+\cos x \overset{CBS}{\le} \sqrt{2\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)} = \sqrt{2}$, cu egalitate pentru $\frac{\sin x}{1} = \frac{\cos x}{1} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$, (1).

Egalitatea în $\frac{4}{\sin x}+\frac{9}{\cos x} \overset{CS}{\ge} \frac{(2+3)^2}{\sin x+\cos x}$ are loc pentru $\frac{2}{\sin x} = \frac{3}{\cos x}$,(2).

Din (1) și (2) rezultă că egalitatea nu poate avea loc.

Remarca.

If $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $a, b > 0$ then

$$\frac{a^2}{\sin x}+\frac{b^2}{\cos x} \ge \frac{(a+b)^2}{\sqrt{2}}.$$

Marin Chirciu

Soluție

$$LHS=\frac{a^2}{\sin x}+\frac{b^2}{\cos x}\overset{CS}{\geq}\frac{(a+b)^2}{\sin x+\cos x}\overset{(1)}{\geq}\frac{(a+b)^2}{\sqrt{2}}=RHS,$$

unde $\frac{(a+b)^2}{\sin x+\cos x}\overset{(1)}{\geq}\frac{(a+b)^2}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow \sin x+\cos x\leq\sqrt{2}$, vezi

$\sin x+\cos x\overset{CBS}{\leq}\sqrt{2\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)}=\sqrt{2}$, cu egalitate pentru $\frac{\sin x}{1}=\frac{\cos x}{1}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}$, (1).

Egalitatea în $\frac{a^2}{\sin x}+\frac{b^2}{\cos x}\overset{CS}{\geq}\frac{(a+b)^2}{\sin x+\cos x}$ are loc pentru $\frac{a}{\sin x}=\frac{b}{\cos x}$,(2).

Problema445.

Solve in real numbers the equation:

$$\sqrt[4]{x+80}+\sqrt[4]{x+255}=7.$$

Panagiotis Danousis, Greece, Math Atelier 2/2025

Soluție

Domeniul de definiție al ecuației este $[-81,\infty)$.

Avem $\uparrow$ $\sqrt[4]{x+80}+\sqrt[4]{x+255}=7$, cu egalitate dacă și numai dacă $x=1$.

Deducem că $x=1$ este soluția unică a ecuației,

Remarca.

Let $a,b\geq 0$ fixed. Solve in real numbers the equation:

$$\sqrt[4]{x+a^4-1}+\sqrt[4]{x+b^4-1}=a+b.$$

Marin Chirciu

Soluție

Ecuația are sens pentru $x+a^4-1\geq 0$ și $x+b^4-1\geq 0$.

Avem $\uparrow$ $\sqrt[4]{x+a^4-1}+\sqrt[4]{x+b^4-1}=a+b$, cu egalitate dacă și numai dacă $x=1$.

Deducem că $x=1$ este soluția unică a ecuației,

Problema446.

Solve in real numbers the equation:

$$3^{\sqrt{x-2}}=\frac{1}{\sqrt{x-1}}.$$

MateMaraton 2/2025

Soluție

Domeniul de definiție al ecuației este $\left[2,\infty\right)$.

Avem $\uparrow 3^{\sqrt{x-2}}=\frac{1}{\sqrt{x-1}}\downarrow$, cu egalitate dacă și numai dacă $x=2$

Deducem că $x=2$ este soluția unică a ecuației,

Remarca.

Let $a>1$ and $\lambda\in\mathbf{R}$ fixed. Solve in real numbers the equation:

$$a^{\sqrt{x-\lambda-1}}=\frac{1}{\sqrt{x-\lambda}}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Domeniul de definiție al ecuației este $\left[\lambda+1,\infty\right)$.

Avem $\uparrow a^{\sqrt{x-\lambda-1}}=\frac{1}{\sqrt{x-\lambda}}\downarrow$, cu egalitate dacă și numai dacă $x=\lambda+1$

Deducem că $x=\lambda+1$ este soluția unică a ecuației,

Problema447.

In ΔABC

$$4\le\sum\sec^2\frac{A}{2}\le\left(\frac{R}{r}\right)^2.$$

George Apostolopoulos, Greece, Mathematical Inequalities 2/2025

Soluție

In ΔABC

$$1).\ 5-\frac{2r}{R}\le\sum\sec^2\frac{A}{2}\le 2+\frac{R}{r}.$$

$$2).\ 4\left(\frac{2R}{r}-1\right)\le\sum\csc^2\frac{A}{2}\le 4\left(\frac{R^2}{r^2}-1\right).$$

$$3).\ 3\sum\sec^2\frac{A}{2}\le\sum\csc^2\frac{A}{2}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Folosim identitățile în triunghi: $\sum\sec^2\frac{A}{2}=\frac{p^2+(4R+r)^2}{p^2}$ și $\sum\csc^2\frac{A}{2}=\frac{p^2+r^2-8Rr}{r^2}$.

Problema448.

In ΔABC

$$\prod\left(m_a^4+1\right)\ge\frac{81}{4}F^2.$$

D.M.Bătinețu-Giurgiu, Mihaly Bencze, RMM 2/2025

Soluție.

Lema.

If $x,y,z,t>0$ then

$$\left(x^2+t^2\right)\left(y^2+t^2\right)\left(z^2+t^2\right)\ge\frac{3}{4}t^4\left(x+y+z\right)^2.$$

Arkady Alt Inequality

Soluție.

Avem $\left(x^2+t^2\right)\left(y^2+t^2\right)\ge\frac{3}{4}t^2\left((x+y)^2+t^2\right)\Leftrightarrow\left(xy-\frac{1}{2}t^2\right)^2+\frac{1}{4}t^2(x-y)^2\ge 0$.

$$\Rightarrow LHS=\left(x^2+t^2\right)\left(y^2+t^2\right)\left(z^2+t^2\right)\ge\frac{3}{4}t^2\left((x+y)^2+t^2\right)\left(t^2+z^2\right)\overset{CBS}{\ge}\frac{3}{4}t^2\left(t(x+y)+tz\right)^2=$$

$$=\frac{3}{4}t^4\left(x+y+z\right)^2=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=\frac{t}{\sqrt{2}}$.

Folosind **Lema** pentru $(x,y,z,t)=(m_a^2,m_b^2,m_c^2,1)$ obținem:

$$LHS=\prod\left(m_a^4+1\right)\overset{Lema}{\geq}\frac{3}{4}\left(\sum m_a^2\right)^2\overset{I-W}{\geq}\frac{3}{4}\left(3\sqrt{3}F\right)^2=\frac{81}{4}F^2=RHS,$$

cu egalitate pentru $m_a^2=m_b^2=m_c^2=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow a=b=c=\frac{2}{\sqrt{3\sqrt{2}}}$.

$\sum m_a^2=\frac{3}{4}\sum a^2\overset{I-W}{\geq}\frac{3}{4}\cdot 4\sqrt{3}F=3\sqrt{3}F$ și $\sum a^2\geq 4\sqrt{3}F$,(Ionescu-Weitzenbock).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral de latură $\frac{2}{\sqrt{3\sqrt{2}}}$.

Remarca.

In ΔABC

$$\prod\left(m_a^{4n}+1\right)\geq\frac{27}{4}\left(3F^2\right)^n, n\in\mathbf{N}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Pentru $n=0$ inegalitatea se scrie $8\geq\frac{27}{4}$, evident, cu strict.

În continuare fie $n\in\mathbf{N}^*$.

Lema.

If $x,y,z,t>0$ then

$$\left(x^2+t^2\right)\left(y^2+t^2\right)\left(z^2+t^2\right)\geq\frac{3}{4}t^4\left(x+y+z\right)^2.$$

Arkady Alt Inequality

Folosind **Lema** pentru $(x,y,z,t)=(m_a^{2n},m_b^{2n},m_c^{2n},1)$ obținem:

$$LHS=\prod\left(m_a^{4n}+1\right)\overset{Lema}{\geq}\frac{3}{4}\left(\sum m_a^{2n}\right)^2\overset{I-W}{\geq}\frac{3}{4}\left(3\left(\sqrt{3}F\right)^n\right)^2=\frac{27}{4}\left(3F^2\right)^n=RHS.$$

cu egalitate pentru $m_a^{2n}=m_b^{2n}=m_c^{2n}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow a=b=c=\frac{2^{1-\frac{1}{4n}}}{\sqrt{3}}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral de latură $\frac{2^{1-\frac{1}{4n}}}{\sqrt{3}}$.

Problema449.

If $a,b,c>0$ then

$$\prod\left(a+b^3\right)\geq abc\prod(a+b).$$

Nguyen Hung Cuong, Vietnam, RMM 2/2025

Soluție.

$$LHS=\prod\left(a+b^3\right)\overset{\text{Rearrangement}}{\geq}\prod\left(a+a^3\right)=abc\prod\left(a^2+1\right)=abc\prod\sqrt{\left(a^2+1\right)\left(1+b^2\right)}\overset{CBS}{\geq}$$

$$\overset{CBS}{\geq}abc\prod\sqrt{(a+b)^2}=abc\prod(a+b)=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Remarca.

In ΔABC

$$\prod\left(a+b^3\right)\geq 13824r^6.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema.

If $x,y,z>0$ then

$$\prod\left(x+y^3\right)\geq xyz\prod(x+y).$$

Folosind **Lema** pentru $(x,y,z)=(a,b,c)$, a,b,c lungimile laturilor ΔABC obținem:

$$\prod\left(a+b^3\right)\overset{Lema}{\geq}abc\prod(a+b)=4Rrp\cdot 2p\left(p^2+r^2+2Rr\right)=8Rrp^2\left(p^2+r^2+2Rr\right)\overset{Gerretsen}{\geq}$$

$$\overset{Gerretsen}{\geq}8Rr\cdot 27r^2\left(16Rr-5r^2+r^2+2Rr\right)=8Rr\cdot 27r^2\left(18Rr-4r^2\right)=$$

$$=8Rr\cdot 27r^2\cdot 2r(9R-2r)\overset{Euler}{\geq}8Rr\cdot 27r^2\cdot 2r\cdot 8R=128R^2\cdot 27r^4\overset{Euler}{\geq}128\cdot 4r^2\cdot 27r^4=13824r^6.$$

Rezultă $\prod\left(a+b^3\right)\geq 13824r^6$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral cu latura de lungime 1.

Remarca.

In ΔABC

$$1)\ \prod\left(a+b^3\right)\geq 8\cdot\left(\frac{4F}{\sqrt{3}}\right)^3$$

Soluție.

Lema.

If $x,y,z>0$ then

$$\prod\left(x+y^3\right)\geq xyz\prod\left(x+y\right).$$

Soluție.

Folosind **Lema** pentru $\left(x,y,z\right)=\left(a,b,c\right)$, a,b,c lungimile laturilor ΔABC obținem:

$$\prod\left(a+b^3\right)\overset{Lema}{\geq} abc\prod\left(a+b\right)\overset{Cesaro}{\geq} abc\cdot 8abc=8\left(abc\right)^2\overset{Carlitz}{\geq} 8\cdot\left(\frac{4F}{\sqrt{3}}\right)^3.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral cu latura de lungime 1.

$$2)\ \prod\left(r_a+r_b^3\right)\geq 4Rrp^4$$

Soluție.

Lema.

If $x,y,z>0$ then

$$\prod\left(x+y^3\right)\geq xyz\prod\left(x+y\right).$$

Soluție.

Folosind **Lema** pentru $\left(x,y,z\right)=\left(r_a,r_b,r_c\right)$ obținem:

$$\prod\left(r_a+r_b^3\right)\overset{Lema}{\geq} r_ar_br_c\prod\left(r_a+r_b\right)=rp^2\cdot 4Rp^2=4Rrp^4.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral cu latura de lungime $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Remarca.

In ΔABC

$$3)\ \prod\left(h_a+h_b^3\right)\geq\left(18r^2\right)^3.$$

$$4)\ \prod\left(m_a+m_b^3\right)\geq 8r^2p^4$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Lema.

If $x,y,z>0$ then

$$\prod\left(x+y^3\right)\geq xyz\prod\left(x+y\right).$$

Folosind **Lema** pentru $(x,y,z)=(m_a,m_b,m_c)$ obținem:

$$\prod\left(m_a+m_b^3\right)\overset{Lema}{\geq} m_am_bm_c\prod\left(m_a+m_b\right)\geq rp^2\cdot 8rp^2=8r^2p^4.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral cu latura de lungime $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Problema450.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=3$ then

$$\sum\frac{1}{xy^2+2}\geq 1.$$

Imad Zak, Lebanon, Mathematical Inequalities 2/2025

Soluție

$$\sum\frac{1}{xy^2+2}=\sum\frac{1}{2}\left(1-\frac{xy^2}{xy^2+2}\right)=\frac{1}{2}\left(3-\sum\frac{xy^2}{xy^2+2}\right)\overset{AM-GM}{\geq}\frac{1}{2}\left(3-\sum\frac{xy^2}{3\sqrt[3]{xy^2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(3-\frac{1}{3}\sum x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{4}{3}}\right)\overset{AM-GM}{\geq}\frac{1}{2}\left(3-\frac{1}{3}\sum\frac{y^2+2xy}{3}\right)=\frac{1}{2}\left(3-\frac{1}{9}\sum\left(y^2+2xy\right)\right)=$$

$$\frac{1}{2}\left(3-\frac{1}{9}\left(\sum x\right)^2\right)=\frac{1}{2}\left(3-\frac{1}{9}\cdot 3^2\right)=1=RHS$$. Egalitatea are loc dacă $x=y=z=1$.

Remarca.

In ΔABC

$$1).\ \sum \frac{1}{\frac{27r^3}{r_a r_b^2}+2} \geq 1.$$

Soluție

Lema.

If $x, y, z > 0$, $x+y+z=3$ then

$$\sum \frac{1}{xy^2+2} \geq 1.$$

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum \frac{r}{r_a} = 1 \Leftrightarrow \sum \frac{3r}{r_a} = 3$.

Folosind **Lema** pentru $(x, y, z) = \left(\frac{3r}{r_a}, \frac{3r}{r_b}, \frac{3r}{r_c}\right)$ obținem: $\sum \frac{1}{\frac{27r^3}{r_a r_b^2}+2} \geq 1$

$$2).\ \sum \frac{1}{\frac{27r^3}{h_a h_b^2}+2} \geq 1.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema451.

If $x, y, z > 0$, $x+y+z=3$ then

$$\sum \frac{x^3}{y^2} \geq \sum x^2.$$

Dragojlub Milosevici, Mathematical Inequalities 2/2025

Soluție

Avem $\sum x^2 = \left(\sum x\right)^2 - 2\sum xy = 3^2 - 2\sum xy = 9 - 2\sum xy$.

Inegalitatea se scrie:

$\sum \frac{x^3}{y^2} \geq 9 - 2\sum xy \Leftrightarrow \sum \frac{x^3}{y^2} + 2\sum xy \geq 9$, care rezultă din $\frac{x^3}{y^2} + 2xy \geq \frac{9x^2}{x+2}$, vezi

$$\frac{x^3}{y^2}+2xy=\frac{x^3}{y^2}+xy+xy\overset{AM-GM}{\geq}3\sqrt[3]{\frac{x^3}{y^2}\cdot xy\cdot xy}=3\sqrt[3]{x^5}=\frac{3x^2}{\sqrt[3]{x}}\overset{AM-GM}{\geq}\frac{3x^2}{\frac{x+1+1}{3}}=\frac{9x^2}{x+2}.$$

Remarca.

In ΔABC

$$1).\ \sum\frac{r_b^2}{r_a^3}\geq 3r\sum\frac{1}{r_a^2}.$$

Soluție

Lema.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=3$ then

$$\sum\frac{x^3}{y^2}\geq\sum x^2.$$

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum\frac{r}{r_a}=1\Leftrightarrow\sum\frac{3r}{r_a}=3$.

Folosind **Lema** pentru $(x,y,z)=\left(\frac{3r}{r_a},\frac{3r}{r_b},\frac{3r}{r_c}\right)$ obținem: $\sum\frac{r_b^2}{r_a^3}\geq 3r\sum\frac{1}{r_a^2}$.

$$2).\ \sum\frac{h_b^2}{h_a^3}\geq 3r\sum\frac{1}{h_a^2}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema452.

If $(a_n)_{n\geq 0}$, $a_{n+1}\geq a_n^2+\frac{1}{5}, \forall n\geq 0$ then

$$a_{n+5}\geq a_n^2,\ n\geq 0.$$

2001 USA TST

Soluție

Scriem ipoteza $a_{n+1}\geq a_n^2+\frac{1}{5}$, $n\to n,n+1,n+2,n+3,n+4$.

Obținem, $a_{n+1}\geq a_n^2+\frac{1}{5}$, $a_{n+2}\geq a_{n+1}^2+\frac{1}{5}$, $a_{n+3}\geq a_{n+2}^2+\frac{1}{5}$, $a_{n+4}\geq a_{n+3}^2+\frac{1}{5}$, $a_{n+5}\geq a_{n+4}^2+\frac{1}{5}$, care prin sumare conduc la:

$$a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}+a_{n+4}+a_{n+5}\ge a_n^2+a_{n+1}^2+a_{n+2}^2+a_{n+3}^2+a_{n+4}^2+5\cdot\frac{1}{5}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{n+5}-a_n^2=a_{n+1}^2+a_{n+2}^2+a_{n+3}^2+a_{n+4}^2-a_{n+1}-a_{n+2}-a_{n+3}-a_{n+4}+1=$$

$$=\left(a_{n+1}^2-a_{n+1}+\frac{1}{4}\right)+\left(a_{n+2}^2-a_{n+2}+\frac{1}{4}\right)+\left(a_{n+3}^2-a_{n+3}+\frac{1}{4}\right)+\left(a_{n+4}^2-a_{n+4}+\frac{1}{4}\right)=$$

$$=\left(a_{n+1}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(a_{n+2}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(a_{n+3}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(a_{n+4}-\frac{1}{2}\right)^2\ge 0,$$

cu egalitate pentru. $a_{n+1}=a_{n+2}=a_{n+3}=a_{n+4}=\frac{1}{2}$.

Remarca.

If $\left(a_n\right)_{n\ge 0}$, $a_{n+1}\ge a_n^2+\frac{1}{5},\forall n\ge 0$ then

$$a_{n+9}\ge a_n^2,\ n\ge 0.$$

Marin Chirciu

Soluție

Scriem ipoteza $a_{n+1}\ge a_n^2+\frac{1}{5},\ n\to n,n+1,n+2,...,n+9$.

Egalitatea are loc pentru $a_{n+1}=a_{n+2}=...=a_{n+8}=\frac{1}{2}$.

Problema453.

If $a,b\ge 1$ then

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}\ge\frac{2}{1+\sqrt{ab}}.$$

Putnam-2007

Soluție

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}\ge\frac{2}{1+\sqrt{ab}}\Leftrightarrow(2+a+b)\left(1+\sqrt{ab}\right)\ge 2(1+a)(1+b)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{ab}+\sqrt{ab}(a+b)\ge a+b+2ab\Leftrightarrow 2\sqrt{ab}\left(1-\sqrt{ab}\right)+(a+b)\left(\sqrt{ab}-1\right)\ge 0\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (a+b)\left(\sqrt{ab}-1\right)(a+b-2)\geq 0$, vezi $a,b\geq 1$. Egalitatea are loc dacă $a=b=1$.

Remarca.

If $a,b,c\geq 1$ then

$$\sum\frac{1}{1+a}\geq\frac{9}{3+\sum\sqrt{ab}}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Lema.

If $a,b\geq 1$ then

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}\geq\frac{2}{1+\sqrt{ab}}.$$

Folosind **Lema** avem $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}\geq\frac{2}{1+\sqrt{ab}}$ și sumăm.

Problema454.

Solve in real numbers the equation:

$$3^x+\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{5}{9}\right)^x=3.$$

Vassilis Demetraskos, Greece, MathAtelier 2/2025

Soluție

$LHS=3^x+\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{5}{9}\right)^x\overset{AM-GM}{\geq}3\sqrt[3]{3^x\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^x\cdot\left(\frac{5}{9}\right)^x}=3=RHS$, cu egal dacă $3^x=\left(\frac{3}{5}\right)^x=\left(\frac{5}{9}\right)^x$

Deducem că $x=0$ este soluția unică a ecuației,

Remarca.

Let $1<a<b$ fixed. Solve in real numbers the equation:

$$a^x+\left(\frac{a}{b}\right)^x+\left(\frac{b}{a^2}\right)^x=3.$$

Marin Chirciu

Soluție

Deducem că $x=0$ este soluția unică a ecuației.

Problema455.

In ΔABC

$$\left(a^2+2\right)\left(a^2b^2+2\right)\left(b^2c^4+2\right)\geq 144F^2.$$

D.M.Bătinețu-Giurgiu, Claudia Nănuți,RMM 2/2025

Soluție.

$$LHS=\left(a^2+1+1\right)\left(a^2b^2+1+1\right)\left(b^2c^4+1+1\right)\overset{AM-GM}{\geq}3\sqrt[3]{a^2\cdot1\cdot1}\cdot3\sqrt[3]{a^2b^2\cdot1\cdot1}\cdot3\sqrt[3]{b^2c^4\cdot1\cdot1}=$$

$$=27\sqrt[3]{a^4b^4c^4}=27\left(abc\right)^{\frac{4}{3}}\overset{Carlitz}{\geq}27\left(\frac{4F}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}}=27\left(\frac{4F}{\sqrt{3}}\right)^2=27\frac{16F^2}{3}=144F^2=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral de latură 1.

Remarca.

In ΔABC

$$\left(a^n+2\right)\left(a^nb^n+2\right)\left(b^nc^{2n}+2\right)\geq 27\left(\frac{4F}{\sqrt{3}}\right)^n, n\in\mathbf{N}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Pentru $n=0$ se obține egalitatea 27=27.

În continuare fie $n\in\mathbf{N}^*$.

$$LHS=\left(a^n+1+1\right)\left(a^nb^n+1+1\right)\left(b^nc^{2n}+1+1\right)\overset{AM-GM}{\geq}3\sqrt[3]{a^n\cdot1\cdot1}\cdot3\sqrt[3]{a^nb^n\cdot1\cdot1}\cdot3\sqrt[3]{b^nc^{2n}\cdot1\cdot1}=$$

$$=27\sqrt[3]{a^{2n}b^{2n}c^{2n}}=27\left(abc\right)^{\frac{2n}{3}}\overset{Carlitz}{\geq}27\left(\frac{4F}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{3}{2}\cdot\frac{2n}{3}}=27\left(\frac{4F}{\sqrt{3}}\right)^n=RHS.$$

Problema456.

In ΔABC

$$\sum\left(a^2b^2+1\right)\left(b^2c^2+1\right)\geq 64F^2.$$

D.M.Bătinețu-Giurgiu, Claudia Nănuți,RMM 2/2025

Soluție.

Cu inegalitatea CBS $\Rightarrow \left(a^2b^2+1\right)\left(1+b^2c^2\right)\geq\left(ab+bc\right)^2$,cu egalitate pentru $ab^2c=1$.

$$LHS=\sum\left(a^2b^2+1\right)\left(b^2c^2+1\right)\overset{CBS}{\geq}\sum\left(ab+bc\right)^2\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum\left(ab+bc\right)\right)^2}{3}=\frac{\left(2\sum ab\right)^2}{3}\overset{Gordon}{\geq}$$

$$\overset{Gordon}{\geq}\frac{\left(2\cdot4\sqrt{3}F\right)^2}{3}=64F^2=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral de latură 1.

Remarca.

In ΔABC

$$\sum\left(a^2b^2+\lambda\right)\left(b^2c^2+\lambda\right)\geq64\lambda^2F^2,\lambda>0.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Cu inegalitatea CBS $\Rightarrow \left(a^2b^2+\lambda\right)\left(\lambda+b^2c^2\right)\geq\lambda\left(ab+bc\right)^2$,cu egalitate pentru $ab^2c=\lambda$.

$$LHS=\sum\left(a^2b^2+\lambda\right)\left(b^2c^2+\lambda\right)\overset{CBS}{\geq}\sum\lambda\left(ab+bc\right)^2\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum\lambda\left(ab+bc\right)\right)^2}{3}=\frac{\left(2\lambda\sum ab\right)^2}{3}\overset{Gordon}{\geq}$$

$$\overset{Gordon}{\geq}\frac{\left(2\lambda\cdot4\sqrt{3}F\right)^2}{3}=64\lambda^2F^2=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateraldde latură $\sqrt{\lambda}$.

Problema457.

Împărțind numerele 89 și 49 la același număr natural nenul n obținem resturile 8 și respectiv 4. Determinați n .

Mate2/2025

Soluție

Folosin teorema împărțirii cu rest obținem $\begin{cases}89=n\cdot c_1+8\\49=n\cdot c_2+4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}81=n\cdot c_1\\45=n\cdot c_2\end{cases}$.

Deoarece $n > 8$ obținem $n = 9$.

Problema458.

If $x, y, z > 0$ then in ΔABC

$$\sum \frac{xa^3}{(y+z)h_a} \geq 4F .$$

D.M.Bătinețu-Giurgiu, Claudia Nănuți,RMM 1/2025

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{xa^3}{(y+z)h_a} = \sum \frac{xa^4}{(y+z)ah_a} = \sum \frac{xa^4}{(y+z)\cdot 2F} = \frac{1}{2F}\sum \frac{x}{y+z}a^4 =$$

$$= \frac{1}{2F}\sum\left(\frac{x}{y+z}+1-1\right)a^4 = \frac{1}{2F}\sum\left(\frac{x+y+z}{y+z}-1\right)a^4 = \frac{1}{2F}\left(\sum\frac{xa^4}{y+z}-\sum a^4\right) \overset{CS}{\geq}$$

$$\overset{CS}{\geq} \frac{1}{2F}\left(\sum x\frac{\left(\sum a^2\right)^2}{\sum(y+z)}-\sum a^4\right) = \frac{1}{2F}\left(\sum x\frac{\left(\sum a^2\right)^2}{2\sum x}-\sum a^4\right) = \frac{1}{2F}\left(\frac{\left(\sum a^2\right)^2}{2}-\sum a^4\right) =$$

$$= \frac{1}{2F}\left(\frac{\sum a^4+2\sum a^2b^2}{2}-\sum a^4\right) = \frac{1}{2F}\cdot\frac{2\sum a^2b^2-\sum a^4}{2} = \frac{1}{2F}\cdot\frac{16F^2}{2} = 4F = RHS$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral și $x = y = z$.

Remarca.

If $x, y, z > 0$ then in ΔABC

$$\sum \frac{xb^2c^2}{y+z} \geq \frac{3r}{2}\left(440r^3 - 37R^3\right).$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{xb^2c^2}{y+z} = \sum\left(\frac{x}{y+z}+1-1\right)b^2c^2 = \sum\left(\frac{x+y+z}{y+z}-1\right) = \frac{\sum xb^2c^2}{y+z} - \sum b^2c^2 \overset{CS}{\geq}$$

$$\overset{CS}{\geq} \sum x\cdot\frac{\left(\sum bc\right)^2}{\sum(y+z)} - \sum b^2c^2 = \sum x\cdot\frac{\left(\sum bc\right)^2}{2\sum x} - \sum b^2c^2 = \frac{\left(\sum bc\right)^2}{2} - \sum b^2c^2 =$$

$$=\frac{2abc\sum a-\sum b^2c^2}{2}=\frac{2\cdot 4Rrp\cdot 2p-p^2\left(p^2+2r^2-8Rr\right)-r^2\left(4R+r\right)^2}{2}=$$

$$=\frac{p^2\left(24Rr-2r^2-p^2\right)-r^2\left(4R+r\right)^2}{2}\overset{Gerretsen}{\geq}\frac{\left(16Rr-5r^2\right)\left(24Rr-2r^2-4R^2-4Rr-3r^2\right)-r^2\left(4R+r\right)^2}{2}=$$

$$=r\frac{\left(16R-5r\right)\left(20Rr-4R^2-5r^2\right)-r\left(4R+r\right)^2}{2}=\frac{r}{2}\left(24r^3-188Rr^2+324R^2r-64R^3\right)\overset{Euler}{\geq}$$

$$\overset{Euler}{\geq}\frac{r}{2}\left(1320r^3-111R^3\right)=\frac{3r}{2}\left(440r^3-37R^3\right)=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral și $x=y=z$.

Problema459.

S:L24.336. Rezolvați în mulțimea numrelor reale ecuația

$$\log_7\left(6^x+1\right)=\log_6\left(7^x-1\right).$$

Cezar Ozun, Dăneți și Gabriel Tica, Craiova,SGM 12/2024

Soluție.

Avem $\log_7\left(6^x+1\right)=\log_6\left(7^x-1\right)=t\Rightarrow\begin{cases}\log_7\left(6^x+1\right)=t\\ \log_6\left(7^x-1\right)=t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}6^x+1=7^t\\ 7^x-1=6^t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}6^x+1=7^t\\ 6^t+1=7^x\end{cases}\Rightarrow$

$\Rightarrow t=x\Rightarrow\log_7\left(6^x+1\right)=x\Leftrightarrow 6^x+1=7^x\Leftrightarrow x=1$ soluție unică, vezi $6^x+1=7^x\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(\frac{6}{7}\right)^x+\left(\frac{1}{7}\right)^x=1$ și funcția $f\left(x\right)=\left(\frac{6}{7}\right)^x+\left(\frac{1}{7}\right)^x$, $x\in\mathbf{R}$ este strict descrescătoare.

Deducem că ecuația admite soluția unică $x=1$.

Remarca.

Let $a>1$ fixed. Solve in real numbers the equation:

$$\log_{a+1}\left(a^x+1\right)=\log_a\left(\left(a+1\right)^x-1\right).$$

Marin Chirciu

Soluție.

Ecuația admite soluția unică $x=1$.

Problema460.

In ΔABC

$$\sum r_a a^4 \geq \frac{16}{4R+r} p^2 F^2 .$$

D.M.Bătinețu-Giurgiu, Claudia Nănuți,RMM 1/2025

Soluție.

Se aplică inegalitatea lui Chebyshev pentru tripletele la fel ordonate (r_a, r_b, r_c) și (a^4, b^4, c^4).

$$LHS = \sum r_a a^4 \overset{Chebyshev}{\geq} \frac{1}{3}\sum r_a \sum a^4 = \frac{4R+r}{3}\sum a^4 \overset{CS}{\geq} \frac{4R+r}{3}\frac{\left(\sum a^2\right)^2}{3} \overset{I-W}{\geq} \frac{4R+r}{3}\frac{\left(4\sqrt{3}F\right)^2}{3} =$$

$$\frac{4R+r}{3}\frac{16\cdot 3F^2}{3} = \frac{4R+r}{3}16F^2 \overset{Doucet}{\geq} \frac{16}{4R+r}p^2F^2 = RHS$$

Remarca.

In ΔABC

$$\sum r_a a^{2n} \geq (4R+r)\left(\frac{4\sqrt{3}F}{3}\right)^n, n \in \mathbf{N}.$$

.

Marin Chirciu

Soluție.

Pentru $n=0$ se obține egalitatea $\sum r_a = 4R+r$.

Pentru $n=1$ se obține $\sum r_a a^2 \geq (4R+r)\frac{4\sqrt{3}F}{3}$, vezi inegalitatea lui Chebyshevși inegalitatea Ionescu-Weitzenbock $\sum a^2 \geq 4\sqrt{3}F$.

Pentru $n \geq 2$ se folosește inegalitatea lui Holder.

Problema461.

În ΔABC , $AB < AC$, $E \in (AC), F \in (AB)$, M este mijlocul lui BC , N este mijlocul lui EF și AD este bisectoarea unghiului A, $D \in (BC)$. Dacă $MN \parallel AD$ arătați că $FB = EC$.

Petre Bătrânețu, Galați, MateMaraton 2/2025

Soluție(Gh.Duca)

Fie Q simetricul lui F față de $M \Rightarrow BFCQ$ este paralelogram $\Rightarrow FB = CQ$,(1).

$MN \parallel EQ \Rightarrow \sphericalangle CQE = \frac{A}{2} \Rightarrow EC = CQ$,(2).

Din(1) și (2) $\Rightarrow FB = EC$.

Soluție(Alin Cretu)

Fie $FG \parallel AD \parallel EH$, $G, H \in (BC) \Rightarrow GM = MH \Rightarrow BG = CH$,(1).

Din $\frac{BF}{BG} = \frac{BA}{BD} \overset{T.bis}{=} \frac{CA}{CD} = \frac{CE}{CH} \Rightarrow \frac{BF}{BG} = \frac{CE}{CH} \Rightarrow BF = CE$,(2).

Din(1) și (2) $\Rightarrow BF = CE$.

Problema462.

U465. Let n be an odd positive integer. Prove that

$$\int_1^n (x-1)(x-2)...(x-n)\,dx = 0 \;.$$

Nguyen Viet Hung, Vietnam, Mathematical Reflections 6/2018

Solution.

Folosim rezultatul ajutator:

Daca $f:[-a,a] \to \boldsymbol{R}$, $a > 0$ este o functie continua si impara, atunci $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

Cum n este impar, punem $n = 2k+1$, $k \in \boldsymbol{N}$. Trebuie sa aratam ca:

$$I = \int_1^{2k+1} (x-1)(x-2)...(x-k-1)...(x-2k)(x-2k-1)dx = 0 .$$

Cu schimbarea de variabila $t = x-k-1$ obtinem:

$$I = \int_{-k}^{k} (t+k)(t+k-1)...\text{t}...(t-k+1)(t-k)dt = \int_{-k}^{k} t(t^2-k^2)\left(t^2-(k-1)^2\right)...(t^2-1)dt = 0 ,$$

Deoarece funcția $f(t) = t(t^2-k^2)\left(t^2-(k-1)^2\right)...(t^2-1)$ este impara.

Problema463.

1) Fie $x, y \in \boldsymbol{C}$ astfel încât $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=1$. Arătaţi că

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{2020}+\left(\frac{y}{x}\right)^{2020}+1=0.$$

Srinava Raghava,RMM 1/2020

Soluție.

Notând $\frac{x}{y}=z$ avem $\frac{y}{x}=\frac{1}{z}$ și $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=1$ se scrie $z+\frac{1}{z}=1 \Leftrightarrow z^2-z+1=0 \Leftrightarrow z^3=-1, z\neq -1$.

$$M_s=\left(\frac{x}{y}\right)^{2020}+\left(\frac{y}{x}\right)^{2020}+1=z^{2020}+\left(\frac{1}{z}\right)^{2020}+1=z\cdot z^{2019}+\frac{1}{z}\left(\frac{1}{z}\right)^{2019}+1=z\cdot\left(z^3\right)^{673}+\frac{1}{z}\left(\frac{1}{z^3}\right)^{673}+1=$$

$$=z\cdot(-1)^{673}+\frac{1}{z}(-1)^{673}+1=z\cdot(-1)+\frac{1}{z}(-1)+1=-z-\frac{1}{z}+1=-1+1=0=M_d.$$

2) Fie $x, y \in \boldsymbol{C}$ astfel încât $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=1$. Arătaţi că

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{3n+1}+\left(\frac{y}{x}\right)^{3n+1}+1=0, \text{ unde } n\in\mathbf{N},\ n \text{ impar.}$$

Soluție.

Notând $\frac{x}{y}=z$ avem $\frac{y}{x}=\frac{1}{z}$ și $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=1$ se scrie $z+\frac{1}{z}=1 \Leftrightarrow z^2-z+1=0 \Leftrightarrow z^3=-1, z\neq -1$.

$$M_s=\left(\frac{x}{y}\right)^{3n+1}+\left(\frac{y}{x}\right)^{3n+1}+1=z^{3n+1}+\left(\frac{1}{z}\right)^{3n+1}+1=z\cdot z^{3n}+\frac{1}{z}\left(\frac{1}{z}\right)^{3n}+1=z\cdot\left(z^3\right)^{n}+\frac{1}{z}\left(\frac{1}{z^3}\right)^{3n}+1=$$

$$=z\cdot(-1)^{n}+\frac{1}{z}(-1)^{n}+1=(-1)^n\left(z+\frac{1}{z}\right)+1=(-1)^n(-1)+1=(-1)^{n+1}+1=M_d.$$

3) Fie $x, y \in \boldsymbol{C}$ astfel încât $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=1$. Arătaţi că

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{3n+1}+\left(\frac{y}{x}\right)^{3n+1}=1, \text{ unde } n\in\mathbf{N}, n \text{ par.}$$

Soluție.

Notând $\frac{x}{y}=z$ avem $\frac{y}{x}=\frac{1}{z}$ și $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=1$ se scrie $z+\frac{1}{z}=1 \Leftrightarrow z^2-z+1=0 \Leftrightarrow z^3=-1, z\neq -1$.

$$M_s=\left(\frac{x}{y}\right)^{3n+1}+\left(\frac{y}{x}\right)^{3n+1}=z^{3n+1}+\left(\frac{1}{z}\right)^{3n+1}=z\cdot z^{3n}+\frac{1}{z}\left(\frac{1}{z}\right)^{3n}=z\cdot\left(z^3\right)^{n}+\frac{1}{z}\left(\frac{1}{z^3}\right)^{3n}=$$

$$=z\cdot(-1)^n+\frac{1}{z}(-1)^n=z+\frac{1}{z}=1=M_d.$$

4) Fie $x,y\in C$ astfel încât $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=1$ și $n\in\mathbf{N}$. Calculati

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{3n+1}+\left(\frac{y}{x}\right)^{3n+1}.$$

Soluție.

Notând $\frac{x}{y}=z$ avem $\frac{y}{x}=\frac{1}{z}$ și $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=1$ se scrie $z+\frac{1}{z}=1 \Leftrightarrow z^2-z+1=0 \Leftrightarrow z^3=-1, z\neq -1$.

$$E=\left(\frac{x}{y}\right)^{3n+1}+\left(\frac{y}{x}\right)^{3n+1}=z^{3n+1}+\left(\frac{1}{z}\right)^{3n+1}=z\cdot z^{3n}+\frac{1}{z}\left(\frac{1}{z}\right)^{3n}=z\cdot\left(z^3\right)^n+\frac{1}{z}\left(\frac{1}{z^3}\right)^{3n}=$$

$$=z\cdot(-1)^n+\frac{1}{z}(-1)^n=(-1)^n\left(z+\frac{1}{z}\right)=(-1)^n\cdot 1=(-1)^n=\begin{cases}1, n=par\\-1, n=impar\end{cases}.$$

5) Fie $x,y\in C$ astfel încât $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=-1$ și $n\in\mathbf{N}$. Calculati

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{3n+1}+\left(\frac{y}{x}\right)^{3n+1}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Notând $\frac{x}{y}=z$ avem $\frac{y}{x}=\frac{1}{z}$ și $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=-1$ se scrie $z+\frac{1}{z}=-1 \Leftrightarrow z^2+z+1=0 \Leftrightarrow z^3=1, z\neq 1$.

$$E=\left(\frac{x}{y}\right)^{3n+1}+\left(\frac{y}{x}\right)^{3n+1}=z^{3n+1}+\left(\frac{1}{z}\right)^{3n+1}=z\cdot z^{3n}+\frac{1}{z}\left(\frac{1}{z}\right)^{3n}=z\cdot\left(z^3\right)^n+\frac{1}{z}\left(\frac{1}{z^3}\right)^{3n}=$$

$$=z\cdot(1)^n+\frac{1}{z}(1)^n=(1)^n\left(z+\frac{1}{z}\right)=(1)^n\cdot 1=1.$$

Problema464.

1) If $A\in M_n(\mathbf{R}), A^3=2A^2+7A+4I_n$ then find

$$\Omega=\det\left(A^2-3A+3I_n\right).$$

Marian Ursărescu, Romania,RMM, Spring 2021

Soluție.(Adrian Popa)

Avem $\left(A^2-3A+3I_n\right)\left(A+I_n\right)=A^3-2A^2+3I_n\overset{Ipoteza}{=}\left(2A^2+7A+4I_n\right)-2A^2+3I_n=$

$=7A+7I_n=7\left(A+I_n\right)$.

Trecând la determinant în egalitatea matriceală: $\left(A^2-3A+3I_n\right)\left(A+I_n\right)=7\left(A+I_n\right)$, obținem:

$\det\left[\left(A^2-3A+3I_n\right)\left(A+I_n\right)\right]=\det\left[7\left(A+I_n\right)\right]\Leftrightarrow$

$\det\left(A^2-3A+3I_n\right)\cdot\det\left(A+I_n\right)=7^n\det\left(A+I_n\right)$, de unde pentru $\det\left(A+I_n\right)\neq 0$ rezultă

$\det\left(A^2-3A+3I_n\right)=7^n$. În concluzie $\Omega=7^n$.

2) If $A\in M_n(\mathbf{R}), A^3=(a-1)A^2+(a+b)A+bI_n$ și $\det\left(A+I_n\right)\neq 0$ then find

$$\Omega=\det\left(A^2-aA+aI_n\right).$$

Marin Chirciu

Soluție.

$\left(A^2-aA+aI_n\right)\left(A+I_n\right)=A^3+(1-a)A^2+aI_n\overset{Ipoteza}{=}\left((1-a)A^2+(a+b)A+bI_n\right)+(1-a)A^2+aI_n=$
$=(a+b)A+(a+b)I_n=(a+b)\left(A+I_n\right)$.

Trecem la determinant în egalitatea matriceală: $\left(A^2-aA+aI_n\right)\left(A+I_n\right)=(a+b)\left(A+I_n\right)$:

$\det\left[\left(A^2-aA+aI_n\right)\left(A+I_n\right)\right]=\det\left[(a+b)\left(A+I_n\right)\right]\Leftrightarrow$

$\det\left(A^2-aA+aI_n\right)\cdot\det\left(A+I_n\right)=(a+b)^n\det\left(A+I_n\right)$, de unde pentru $\det\left(A+I_n\right)\neq 0$ rezultă

$\det\left(A^2-aA+aI_n\right)=(a+b)^n$. În concluzie $\Omega=(a+b)^n$.

Problema465.

1) MH-66. Let a,b,c,d be the roots of equation $x^4+6x^3+7x^2+6x+1=0$.
Find the value of

$$\frac{7-2a}{1-a}+\frac{7-2b}{1-b}+\frac{7-2c}{1-c}+\frac{7-2d}{1-d}.$$

Jose Luis Diaz-Barrero, Barcelona, Spain, Arhimede, Spring 2019

Soluție.

Avem $E=\frac{7-2a}{1-a}+\frac{7-2b}{1-b}+\frac{7-2c}{1-c}+\frac{7-2d}{1-d}=\sum\frac{7-2a}{1-a}=\sum\left(2-\frac{5}{a-1}\right)=8-5\sum\frac{1}{a-1}$, (1).

Considerăm polinomul

$P=(1+x)^4+6(1+x)^3+7(1+x)^2+6(1+x)+1=x^4+10x^3+31x^2+42x+21$, care are rădăcinile $a-1,b-1,c-1,d-1$, de unde $\sum\frac{1}{a-1}=\frac{-42}{21}=-2$, (2).

Din (1) și (2) obținem $E=8-5\sum\frac{1}{a-1}=8-5\cdot(-2)=18$.

Soluție alternativă.

$x^4+6x^3+7x^2+6x+1=(x^2+x+1)(x^2+5x+1)$, etc.

Remarcă.

2) Let a,b,c,d be the roots of $x^4+3\lambda x^3+(3\lambda+1)x^2+3\lambda x+1=0$.
Find the value of

$$\frac{3\lambda+1-\lambda a}{1-a}+\frac{3\lambda+1-\lambda b}{1-b}+\frac{3\lambda+1-\lambda c}{1-c}+\frac{3\lambda+1-\lambda d}{1-d}.$$

Marin Chirciu, Pitești, Romania

Soluție.

Avem

$$E=\frac{3\lambda+1-\lambda a}{1-a}+\frac{3\lambda+1-\lambda b}{1-b}+\frac{3\lambda+1-\lambda c}{1-c}+\frac{3\lambda+1-\lambda d}{1-d}=\sum\frac{3\lambda+1-\lambda a}{1-a}=\sum\left(\lambda-\frac{2\lambda+1}{a-1}\right)=$$

$=4\lambda-(2\lambda+1)\sum\frac{1}{a-1}$, (1).

Considerăm polinomul $P=(1+x)^4+3\lambda(1+x)^3+(3\lambda+1)(1+x)^2+3\lambda(1+x)+1=$

$x^4+(4+3\lambda)x^3+(7+2\lambda)x^2+(6+18\lambda)x+(3+9\lambda)$, care are rădăcinile $a-1,b-1,c-1,d-1$,

de unde, cu relațiile lui Viete avem $\sum\frac{1}{a-1}=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=\frac{S_3}{S_4}=\frac{-(6+18\lambda)}{(3+9\lambda)}=-2$, (2).

Unde $S_1=-(4+3\lambda)$, $S_2=(7+2\lambda)$, $S_3=-(6+18\lambda)$, $S_4=(3+9\lambda)$ sunt sumele lui Viete.

Din (1) și (2) obținem $E=4\lambda-(2\lambda+1)\sum\frac{1}{a-1}=4\lambda-(2\lambda+1)\cdot(-2)=8\lambda+2$.

Problema466.

Se dă $a_1=1$ și $a_{m+n}=a_m+a_n+mn, \forall m,n\geq 1$. Calculați a_{100}.

Math4/2020

Soluție.

Lema.

3) Se dă $a_1 = 1$ și $a_{m+n} = a_m + a_n + mn, \forall m, n \geq 1$. Arătați că

$$a_{n+1} = a_n + n + 1, \forall n \geq 0.$$

Demonstrație.

Punând $m = 1$ obținem concluzia.

Variantă. Inducție matematică.

Folosind **Lem**a și sumând obținem $a_n = 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$, de unde a_{100} =5050.

Remarcă.

1) Se dă $a_1 = 1$ și $a_{m+n} = a_m + a_n + mn, \forall m, n \geq 1$. Calculați a_n.

Soluție.

Lema.

2) Se dă $a_1 = 1$ și $a_{m+n} = a_m + a_n + mn, \forall m, n \geq 1$. Arătați că

$$a_{n+1} = a_n + n + 1, \forall n \geq 0.$$

Folosind **Lem**a și sumând obținem $a_n = 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

1) Se dă $a_1 = 1$ și $a_{m+n} = a_m + a_n + mn, \forall m, n \geq 1$. Calculați $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2a_n}{n^2}\right)^n$.

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Lema.

2) Dacă $a_1 = 1$ și $a_{m+n} = a_m + a_n + mn, \forall m, n \geq 1$, atunci

$$a_{n+1} = a_n + n + 1, \forall n \geq 0.$$

Demonstrație.

Folosind **Lem**a și sumând obținem $a_n = 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Avem $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2a_n}{n^2}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$.

Problema467.

1) Let $a,b\in\mathbf{R}$. Find the necessary and sufficient condition on a,b such that

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{(x+1)\left(x+\frac{2}{a-b-1}\right)}+abx\right)$$

exist(having a finite limit value).

2) Express the limit value F obtiened in (1) as a function in a.

3) Find the range of F.

Kunihiko Chikaya, Enjoy Solving Mathematics 2/2022

Soluție.

1) $f(x)=\sqrt{(x+1)\left(x+\frac{2}{a-b-1}\right)}+abx=x\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}\sqrt{\left(1+\frac{2}{x(a-b-1)}\right)}+abx$.

Se dă factor comun x și se obține condiția $ab+1=0$.

2) Se obține limita $F=\frac{1}{2}+\frac{1}{a-b-1}$ și foosind $ab+1=0$ rezultă $F=\frac{a^2+a+1}{2(a^2-a+1)}$.

3) Se studiază funcția $F(a)=\frac{a^2+a+1}{2(a^2-a+1)}$ definită pe $\mathbf{R}$. Avem $F'(a)=\frac{1-a^2}{2(a^2-a+1)^2}$.

Întocmind tabelul de variație al funcției F rezultă că mulțimea valorilor funcției F este:

$$F(\mathbf{R})=\left[\frac{1}{6},\frac{3}{2}\right]-\left\{\frac{1}{2}\right\}.$$

Problema468.

1) Dacă a,b sunt numere reale care verifică relațiile

$$\begin{cases} a\cdot\cos\frac{\pi}{20}-b\cdot\sin\frac{\pi}{20}=\cos\frac{\pi}{10} \\ b\cdot\cos\frac{\pi}{20}+a\cdot\sin\frac{\pi}{20}=2\sin\frac{\pi}{10} \end{cases},$$

arătați că $\sqrt[3]{(a+b)^2}+\sqrt[3]{(a-b)^2}=2$.

Doina și Aurelian Ionescu, Toplița,RMT 2/2020

Soluție.

Notând $\frac{\pi}{20} = x$ sistemul din ipoteză se scrie:

$$\begin{cases} a\cdot\cos x - b\cdot\sin x = \cos 2x \\ a\cdot\sin x + b\cdot\cos x = 2\sin 2x \end{cases}.$$

Avem $\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1$, $\Delta_a = \begin{vmatrix} \cos 2x & -\sin x \\ 2\sin 2x & \cos x \end{vmatrix} = 3\cos x - 2\cos^3 x$ și

$\Delta_b = \begin{vmatrix} \cos x & \cos 2x \\ \sin x & 2\sin 2x \end{vmatrix} = 3\sin x - 2\sin^3 x$, de unde: $\begin{cases} a = 3\cos x - 2\cos^3 x \\ b = 3\sin x - 2\sin^3 x \end{cases}$.

$a + b = \left(3\cos x - 2\cos^3 x\right) + \left(3\sin x - 2\sin^3 x\right) = \left(\cos x + \sin x\right)^3$ și

$a - b = \left(3\cos x - 2\cos^3 x\right) - \left(3\sin x - 2\sin^3 x\right) = \left(\cos x - \sin x\right)^3$.

$$\sqrt[3]{\left(\cos x + \sin x\right)^6} + \sqrt[3]{\left(\cos x - \sin x\right)^6} = \left(\cos x + \sin x\right)^2 + \left(\cos x - \sin x\right)^2 =$$

$$= \left(1 + \sin 2x\right) + \left(1 - \sin 2x\right) = 2.$$

Remarcă.

2) Dacă a, b și x sunt numere reale care verifică relațiile

$$\begin{cases} a\cdot\cos x - b\cdot\sin x = \cos 2x \\ a\cdot\sin x + b\cdot\cos x = 2\sin 2x \end{cases},$$

și z este număr complex, $z = \sqrt[3]{a+b} + i\sqrt[3]{a-b}$, calculați $|z|$.

Soluție.

Avem $\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1$, $\Delta_a = \begin{vmatrix} \cos 2x & -\sin x \\ 2\sin 2x & \cos x \end{vmatrix} = 3\cos x - 2\cos^3 x$ și

$\Delta_b = \begin{vmatrix} \cos x & \cos 2x \\ \sin x & 2\sin 2x \end{vmatrix} = 3\sin x - 2\sin^3 x$, de unde: $\begin{cases} a = 3\cos x - 2\cos^3 x \\ b = 3\sin x - 2\sin^3 x \end{cases}$.

$a + b = \left(3\cos x - 2\cos^3 x\right) + \left(3\sin x - 2\sin^3 x\right) = \left(\cos x + \sin x\right)^3$ și

$a - b = \left(3\cos x - 2\cos^3 x\right) - \left(3\sin x - 2\sin^3 x\right) = \left(\cos x - \sin x\right)^3$.

$z = \sqrt[3]{\left(\cos x + \sin x\right)^3} + i\sqrt[3]{\left(\cos x - \sin x\right)^3} = \left(\cos x + \sin x\right) + i\left(\cos x - \sin x\right)$, de unde

$$|z| = |(\cos x + \sin x) + i(\cos x - \sin x)| = \sqrt{(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2} =$$

$$= \sqrt{(1 + \sin 2x) + (1 - \sin 2x)} = \sqrt{2}.$$

3) Dacă a, b și x sunt numere reale care verifică relațiile

$$\begin{cases} a \cdot \cos x - b \cdot \sin x = \cos 2x \\ a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = 2\sin 2x \end{cases},$$

și z este număr complex, $z = \sqrt[3]{a+b} + i\sqrt[3]{a-b}$, determinați x astfel încât $z^n = 1 + i$, $n \in \mathbf{N}^*$.

Dezvoltări, Marin Chirciu

<u>Soluție</u>.

Avem $\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1$, $\Delta_a = \begin{vmatrix} \cos 2x & -\sin x \\ 2\sin 2x & \cos x \end{vmatrix} = 3\cos x - 2\cos^3 x$ și

$\Delta_b = \begin{vmatrix} \cos x & \cos 2x \\ \sin x & 2\sin 2x \end{vmatrix} = 3\sin x - 2\sin^3 x$, de unde: $\begin{cases} a = 3\cos x - 2\cos^3 x \\ b = 3\sin x - 2\sin^3 x \end{cases}$.

$a + b = (3\cos x - 2\cos^3 x) + (3\sin x - 2\sin^3 x) = (\cos x + \sin x)^3$ și

$a - b = (3\cos x - 2\cos^3 x) - (3\sin x - 2\sin^3 x) = (\cos x - \sin x)^3$.

$z = \sqrt[3]{(\cos x + \sin x)^3} + i\sqrt[3]{(\cos x - \sin x)^3} = (\cos x + \sin x) + i(\cos x - \sin x)$.

Scriind numerele complexe z și $1 + i$ avem: $z = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right]$ și

$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

Ecuația $z^n = 1 + i$ se scrie:

$$\left(\sqrt{2}\right)^n\left[\cos n\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + i\sin n\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right] = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \left(\sqrt{2}\right)^n \cos n\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} \\ \left(\sqrt{2}\right)^n \sin n\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \tan n\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1 \Leftrightarrow n\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Obținem $x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4n} - \frac{k\pi}{n}, k \in \mathbf{Z}$.

Problema469.

1) Dacă a,b sunt numere reale astfel încât $a^2+b^2+ab=3$, determinați minimul și maximul

$$P=a^4+b^4-ab.$$

Vietnam Book, Posted Imad Zak

Soluție.

$3+ab=(a+b)^2\geq 0$ și $3-ab=(a-b)^2\geq 0$, deci $-3\leq ab\leq 1$ și notând $ab=x$ avem $-3\leq x\leq 1$.

$P=a^4+b^4-ab=\left(a^2+b^2\right)^2-2a^2b^2-ab=(3-ab)^2-2a^2b^2-ab=(3-x)^2-2x^2-x=$

$=-x^2-7x+9$.

Studiem funcția de gradul al doilea $f(x)=-x^2-7x+9$, $-3\leq x\leq 1$.

Avem $V\left(\frac{-b}{2a},\frac{-\Delta}{4a}\right)=\left(\frac{-7}{2},\frac{85}{4}\right)$, $\frac{-7}{2}<-3<1$, $f(-3)=21$, $f(1)=1$.

Rezultă: $1\leq f(x)\leq 21$, $-3\leq x\leq 1$.

În final minimul lui P este 1 și este atins pentru $ab=1$,iar maximul lui P este 21 și este atins pentru $ab=-3$.

2) Dacă a,b sunt numere reale astfel încât $a^2+b^2+ab=3$, determinați minimul și maximul

$$P=a^4+b^4+\lambda ab \text{, unde } \lambda\in\mathbf{R}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$3+ab=(a+b)^2\geq 0$ și $3-ab=(a-b)^2\geq 0$, deci $-3\leq ab\leq 1$ și notând $ab=x$ avem $-3\leq x\leq 1$.

$P=a^4+b^4+\lambda ab=\left(a^2+b^2\right)^2-2a^2b^2+\lambda ab=(3-ab)^2-2a^2b^2+\lambda ab=(3-x)^2-2x^2+\lambda x=$

$=-x^2+(\lambda-6)x+9$.

Studiem funcția de gradul al doilea $f(x)=-x^2+(\lambda-6)x+9$, $-3\leq x\leq 1$.

Avem $V\left(\frac{-b}{2a},\frac{-\Delta}{4a}\right)=\left(\frac{\lambda-6}{2},\frac{\lambda^2-12\lambda+72}{4}\right)$, $f(-3)=18-3\lambda$, $f(1)=\lambda+2$.

Distingem cazurile:

Cazul1). Dacă $\lambda < 0 \Rightarrow$

$$\frac{\lambda-6}{2} < -3 < 1 \Rightarrow \lambda+2 \le f(x) \le 18-3\lambda, -3 \le x \le 1 \Rightarrow \lambda+2 \le P \le 18-3\lambda.$$

Cazul2). Dacă $\lambda = 0 \Rightarrow$

$$\frac{\lambda-6}{2} = -3 < 1 \Rightarrow 2 \le f(x) \le 18, -3 \le x \le 1 \Rightarrow 2 \le P \le 18.$$

Cazul3). Dacă $0 < \lambda < 4 \Rightarrow -3 < \frac{\lambda-6}{2} < -1 < 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 18-3\lambda \le f(x) \le \frac{\lambda^2-12\lambda+72}{4}, -3 \le x \le 1 \Rightarrow 18-3\lambda \le P \le \frac{\lambda^2-12\lambda+72}{4}.$$

Cazul4). Dacă $\lambda = 4 \Rightarrow$

$$\frac{\lambda-6}{2} = -1 < 1 \Rightarrow 2 \le f(x) \le 10, -3 \le x \le 1 \Rightarrow 2 \le P \le 10.$$

Cazul5). Dacă $4 < \lambda < 8 \Rightarrow -3 < \frac{\lambda-6}{2} < -1 < 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 18-3\lambda \le f(x) \le \frac{\lambda^2-12\lambda+72}{4}, -3 \le x \le 1 \Rightarrow 18-3\lambda \le P \le \frac{\lambda^2-12\lambda+72}{4}.$$

Cazul2). Dacă $\lambda = 8 \Rightarrow$

$$-3 < \frac{\lambda-6}{2} = 1 \Rightarrow f(-3) \le f(x) \le f(1), -3 \le x \le 1 \Rightarrow -6 \le f(x) \le 10 \ -6 \le P \le 10.$$

Cazul1). Dacă $\lambda > 8 \Rightarrow -3 < 1 < \frac{\lambda-6}{2} \Rightarrow f(-3) \le f(x) \le f(1) \ -3 \le x \le 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 18-3\lambda \le f(x) \le \lambda+2, -3 \le x \le 1 \Rightarrow 18-3\lambda \le P \le \lambda+2.$$

În concluzie:

I). Dacă $\lambda \le 0 \Rightarrow \lambda+2 \le P \le 18-3\lambda$.

II). Dacă $0 \le \lambda \le 8 \Rightarrow 18-3\lambda \le P \le \frac{\lambda^2-12\lambda+72}{4}$.

III). Dacă $\lambda > 8 \Rightarrow 18-3\lambda \le P \le \lambda+2$.

Problema470.

1) Calculate the limit

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sqrt{1+x}+2\sqrt{4+x}+\ldots+2\sqrt{n^2+x}-n(n+1)}{x}.$$

Tom P, MathOlympiads , 8/2020

Soluție.

Avem:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sqrt{1+x}+2\sqrt{4+x}+\ldots+2\sqrt{n^2+x}-n(n+1)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k^2+x}-n(n+1)}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k^2+x}-\frac{n(n+1)}{2}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k^2+x}-k\right)\right)}{x}=2\sum_{k=1}^{n}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{k^2+x}-k}{x}=$$

$$=2\sum_{k=1}^{n}\lim_{x\to 0}\frac{k^2+x-k^2}{x\left(\sqrt{k^2+x}+k\right)}=2\sum_{k=1}^{n}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{k^2+x}+k}=2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}.$$

2) Calculate the limit

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to 0}\frac{2\sqrt{1+x}+2\sqrt{4+x}+\ldots+2\sqrt{n^2+x}-n(n+1)}{x}\right).$$

Soluție.

Calculăm mai întâi limita de funcție: $\lim_{x\to 0}\frac{2\sqrt{1+x}+2\sqrt{4+x}+\ldots+2\sqrt{n^2+x}-n(n+1)}{x}$ =

$$=2\sum_{k=1}^{n}\lim_{x\to 0}\frac{k^2+x-k^2}{x\left(\sqrt{k^2+x}+k\right)}=2\sum_{k=1}^{n}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{k^2+x}+k}=2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}.$$

Apoi calculăm limita de șir $\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\infty$.

3) Calculate the limit

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to 0}\frac{2\sqrt{1+x}+2\sqrt{4+x}+\ldots+2\sqrt{n^2+x}-n(n+1)}{x}-\ln n\right).$$

Soluție.

Calculăm mai întâi limita de funcție: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sqrt{1+x}+2\sqrt{4+x}+\ldots+2\sqrt{n^2+x}-n(n+1)}{x}$

$$=2\sum_{k=1}^{n}\lim_{x\to 0}\frac{k^2+x-k^2}{x\left(\sqrt{k^2+x}+k\right)}=2\sum_{k=1}^{n}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{k^2+x}+k}=2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}.$$

Apoi calculăm limita de șir $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}-\ln n\right)=\gamma$, unde $\gamma\in(0,1)$, $\gamma=0,577\ldots$, γ se numește constanta lui Euler

4) Calculate the limit

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to 0}\frac{2\sqrt[3]{1+x}+2\sqrt[3]{8+x}+\ldots+2\sqrt[3]{n^3+x}-n(n+1)}{x}\right).$$

Soluție.

Calculăm mai întâi limita de funcție: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sqrt[3]{1+x}+2\sqrt[3]{8+x}+\ldots+2\sqrt[3]{n^3+x}-n(n+1)}{x}=$

$$=\frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}.$$

Apoi calculăm limita de șir $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{3}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2}\right)=\dfrac{2}{3}\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{\pi^2}{6}=\dfrac{\pi^2}{9}$.

5) Calculate the limit

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to 0}\frac{2\sqrt[p]{1+x}+2\sqrt[p]{2^p+x}+\ldots+2\sqrt[p]{n^p+x}-n(n+1)}{x}\right),\ p\in\mathbf{N}, p\geq 2.$$

Soluție.

Calculăm mai întâi limita de funcție: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sqrt[p]{1+x}+2\sqrt[p]{2^p+x}+\ldots+2\sqrt[p]{n^p+x}-n(n+1)}{x}=$

$$=2\sum_{k=1}^{n}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[p]{\left(k^p+x\right)^{p-1}}+k\sqrt[p]{\left(k^p+x\right)^{p-2}}+\ldots+k^{p-1}}=2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{pk^{p-1}}=\frac{2}{p}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{p-1}}$$

Apoi calculăm limita de șir $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{p}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^{p-1}}\right)=\dfrac{2}{p}\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^{p-1}}$.

Pentru calculul: $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{p-1}}$ se face discuție după p.

Pentru $p=2$ avem $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\infty$

Pentru $p=3$ avem $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema471.

Se consideră șirurile $(x_n)_{n\geq 1},(y_n)_{n\geq 1}$ definite prin $x_1=0, y_1=1$,

$x_{n+1}=\frac{ax_n+by_n}{a+b}, y_{n+1}=\frac{cx_n+dy_n}{c+d}, \forall n\geq 1$, unde $a,b,c,d>0$, cu $ad\neq bc$.

a) Arătați că șirul $(z_n)_{n\geq 1}$ definit prin $z_n=y_n-x_n$ este o progresie geometrică.

b) Presupunând că rația q a progresiei geometrice $(z_n)_{n\geq 1}$ este subunitară, arătați că șirurile $(x_n)_{n\geq 1},(y_n)_{n\geq 1}$ sunt convergente și au aceeași limită.

Marin Chirciu, Analiză Matematica, Editura Tiparg 2004, Problema114/202

Soluție.

a) Avem: $z_{n+1}=y_{n+1}-x_{n+1}=\frac{ad-bc}{(a+b)(c+d)}(y_n-x_n)=\frac{ad-bc}{(a+b)(c+d)}z_n$.

Deducem că $(z_n)_{n\geq 1}$ este o progresie geometrică cu rația $q=\frac{ad-bc}{(a+b)(c+d)}$, (1).

b) Obținem $z_n=z_1q^{n-1}=1\cdot q^{n-1}=q^{n-1}$, unde q este dat de (1).

Din $z_n=y_n-x_n$ și $z_n=q^{n-1}$ obținem $y_n=x_n+q^{n-1}$, care înlocuit în $x_{n+1}=\frac{ax_n+by_n}{a+b}$ conduce la

$x_{n+1}=x_n+\frac{b}{a+b}q^{n-1}$, iar apoi dând lui n valorile $1,2,3...,n-1$ și sumând rezultă

$$x_n=x_1+\frac{b}{a+b}\left(1+q+q^2+...+q^{n-1}\right)=0+\frac{b}{a+b}\cdot\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{b}{a+b}\cdot\frac{1-q^n}{1-q}.$$

Cum am presupus că $q\in(0,1)$ rezultă că șirul $(x_n)_{n\geq 1}, x_n=\frac{b}{a+b}\cdot\frac{1-q^n}{1-q}$ este convergent și

$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{b}{a+b}\cdot\frac{1}{1-q}$ și înlocuind $q=\frac{ad-bc}{(a+b)(c+d)}$ rezultă că $\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{b(c+d)}{ac+2bc+bd}$.

Folosind $y_n = x_n + q^{n-1}, q \in (0,1)$ și $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent rezultă că $(y_n)_{n\geq 1}$ este convergent și $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + 0$, adică $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Problema472.

1) If $a,b,c,d > 1$ then

$$\sum \log_a \frac{b^3+c^3+d^3}{b^2+c^2+d^2} \geq 4.$$

Ionuț Florin Voinea, RMM 11/2020

Soluție.

Lema

If $x,y,z>0$ then

$$\frac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2} \geq \frac{x+y+z}{3}.$$

Demonstrație.

$\frac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2} \geq \frac{x+y+z}{3} \Leftrightarrow 3(x^3+y^3+z^3) \geq (x^2+y^2+z^2)(x+y+z) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2(x^3+y^3+z^3) \geq \sum xy(x+y)$, care rezultă din sumarea inegalităților $x^3+y^3 \geq xy(x+y) \Leftrightarrow$ $(x+y)(x-y)^2 \geq 0$ și analoagele.

$Ms = \sum \log_a \frac{b^3+c^3+d^3}{b^2+c^2+d^2} \overset{Lema}{\geq} \sum \log_a \frac{b+c+d}{3} \overset{AGM}{\geq} \sum \log_a \sqrt[3]{bcd} = \frac{1}{3}\sum \log_a (bcd) =$

$= \frac{1}{3}\sum (\log_a b + \log_b a) \geq \frac{1}{3}\cdot 12 = 4 = Md$. Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

Remarca

2) If $a,b,c,d > 1$ then

$$\sum \log_a \frac{b^4+c^4+d^4}{b^3+c^3+d^3} \geq 4.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Lema

If $x,y,z>0$ then

$$\frac{x^4+y^4+z^4}{x^3+y^3+z^3}\geq\frac{x+y+z}{3}.$$

Demonstrație.

Avem:

$$\frac{x^4+y^4+z^4}{x^3+y^3+z^3}\geq\frac{x+y+z}{3}\Leftrightarrow 3\left(x^4+y^4+z^4\right)\geq\left(x^3+y^3+z^3\right)\left(x+y+z\right)\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 2\left(x^4+y^4+z^4\right)\geq\sum xy\left(x^2+y^2\right)$, care rezultă din sumarea inegalităților

$x^4+y^4\geq xy\left(x^2+y^2\right)\Leftrightarrow\left(x-y\right)\left(x^3-y^3\right)\geq 0$.

$$Ms=\sum\log_a\frac{b^4+c^4+d^4}{b^3+c^3+d^3}\overset{Lema}{\geq}\sum\log_a\frac{b+c+d}{3}\overset{AGM}{\geq}\sum\log_a\sqrt[3]{bcd}=\frac{1}{3}\sum\log_a\left(bcd\right)=$$

$=\frac{1}{3}\sum\left(\log_a b+\log_b a\right)\geq\frac{1}{3}\cdot 12=4=Md$. Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

3) If $a,b,c,d>1$ then

$$\sum\log_a\frac{b^{n+1}+c^{n+1}+d^{n+1}}{b^n+c^n+d^n}\geq 4,\ n\in\mathbf{N}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Lema

If $x,y,z>0$ then

$$\frac{x^{n+1}+y^{n+1}+z^{n+1}}{x^n+y^n+z^n}\geq\frac{x+y+z}{3}.$$

Demonstrație.

$$\frac{x^{n+1}+y^{n+1}+z^{n+1}}{x^n+y^n+z^n}\geq\frac{x+y+z}{3}\Leftrightarrow 3\left(x^{n+1}+y^{n+1}+z^{n+1}\right)\geq\left(x^n+y^n+z^n\right)\left(x+y+z\right)\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 2\left(x^{n+1}+y^{n+1}+z^{n+1}\right)\geq\sum\left(x^n y+xy^n\right)$, care rezultă din sumarea inegalităților

$x^{n+1}+y^{n+1}\geq x^n y+xy^n\Leftrightarrow\left(x-y\right)\left(x^n-y^n\right)\geq 0$.

$$Ms=\sum\log_a\frac{b^{n+1}+c^{n+1}+d^{n+1}}{b^n+c^n+d^n}\overset{Lema}{\geq}\sum\log_a\frac{b+c+d}{3}\overset{AGM}{\geq}\sum\log_a\sqrt[3]{bcd}=\frac{1}{3}\sum\log_a\left(bcd\right)=$$

$=\frac{1}{3}\sum\left(\log_a b+\log_b a\right)\geq\frac{1}{3}\cdot 12=4=Md$. Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$.

Problema473.

1) Evaluate the indefinite integral:

$$\int\frac{e^x-1}{\left(e^x+1\right)\sqrt{e^x+e^{-x}+1}}dx.$$

Reus Shoemacker,Polar Pi, 4/2021

Soluție.

Cu substituția $e^x=t$ obținem:

$$\int\frac{e^x-1}{\left(e^x+1\right)\sqrt{e^x+e^{-x}+1}}dx=2\arctan\sqrt{e^x+e^{-x}+1}+C\ .$$

2) Evaluate the indefinite integral:

$$\int\frac{e^x-1}{\left(e^x+1\right)\sqrt{e^x+e^{-x}+\lambda}}dx.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Cu substituția $e^x=t$ obținem:

$$\int\frac{e^x-1}{\left(e^x+1\right)\sqrt{e^x+e^{-x}+\lambda}}dx=\int\frac{t-1}{\left(t+1\right)\sqrt{t+t^{-1}+\lambda}}\frac{dt}{t}=\int\frac{t-1}{t\left(t+1\right)\sqrt{t+t^{-1}+\lambda}}dt=$$

$$=\int\frac{t^2-1}{\left(t+1\right)^2\sqrt{t^3+\lambda t^2+t}}dt=\int\frac{1-\frac{1}{t^2}}{\left(t+\frac{1}{t}+2\right)\sqrt{t+\frac{1}{t}+\lambda}}dt\overset{t+\frac{1}{t}+\lambda=u^2}{=}\int\frac{2udu}{\left(u^2+2-\lambda\right)u}=2\int\frac{du}{u^2+2-\lambda}.$$

Distingem cazurile:

Cazul 1). Dacă $2-\lambda>0$, atunci $\int\frac{du}{u^2+2-\lambda}=\frac{1}{\sqrt{2-\lambda}}\arctan\frac{u}{\sqrt{2-\lambda}}+C\ .$

Cazul 2). Dacă $2-\lambda=0$, atunci $\int\frac{du}{u^2}=\frac{-1}{u}+C\ .$

Cazul 3). Dacă $2-\lambda<0$, atunci $\int\frac{du}{u^2+\lambda-2}=\frac{1}{2\sqrt{\lambda-2}}\ln\left|\frac{u-\sqrt{\lambda-2}}{u+\sqrt{\lambda-2}}\right|+C\ .$

În final deducem $\int \frac{e^x-1}{\left(e^x+1\right)\sqrt{e^x+e^{-x}+\lambda}}dx = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{2-\lambda}}\arctan\frac{\sqrt{e^x+e^{-x}+\lambda}}{\sqrt{2-\lambda}}+C, \lambda<2 \\ \frac{-2}{\sqrt{e^x+e^{-x}+\lambda}}+C, \lambda=2, \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda-2}}\ln\left|\frac{\sqrt{e^x+e^{-x}+\lambda}-\sqrt{\lambda-2}}{\sqrt{e^x+e^{-x}+\lambda}+\sqrt{\lambda-2}}\right|+C, \lambda>2 \end{cases}$.

Problema474.

1) If a,b,c are the dimensions a cuboid with the diagonal d then

$$d \le \sqrt{\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}}.$$

Neculai Stanciu,RMM 7/2021

Soluție.

Lema

If $a,b,c>0$ then

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a} \ge a^2+b^2+c^2.$$

Demonstrație.

$\sum\frac{a^3}{b}=\sum\frac{a^4}{ab}\overset{CS}{\ge}\frac{\left(\sum a^2\right)^2}{\sum ab}\overset{(1)}{\ge}\frac{\left(\sum a^2\right)^2}{\sum a^2}=\sum a^2$, unde (1) $\Leftrightarrow \sum a^2 \ge \sum ab$.

Folosind **Lema** și $a^2+b^2+c^2=d^2$ în paralelipiped obținem concluzia.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă paralelipipedul este cub.

2) If a,b,c are the dimensions a cuboid with the diagonal d then

$$d \le \sqrt{\frac{2a^3}{b+c}+\frac{2b^3}{c+a}+\frac{2c^3}{a+b}}.$$

3) If a,b,c are the dimensions a cuboid with the diagonal d then

$$d \le \sqrt{\frac{(\lambda+1)a^3}{b+\lambda c}+\frac{(\lambda+1)b^3}{c+\lambda a}+\frac{(\lambda+1)c^3}{a+\lambda b}}, \text{ unde } \lambda \ge 0.$$

4) If a,b,c are the dimensions a cuboid with the diagonal d then

$$d \le \sqrt[4]{\frac{3a^5}{b}+\frac{3b^5}{c}+\frac{3c^5}{a}}.$$

5) If a,b,c are the dimensions a cuboid with the diagonal d then

$$d \le \sqrt[4]{\frac{6a^5}{b+c}+\frac{6b^5}{c+a}+\frac{6c^5}{a+b}}.$$

6) If a,b,c are the dimensions a cuboid with the diagonal d then

$$d \le \sqrt[4]{\frac{3(\lambda+1)a^5}{b+\lambda c}+\frac{3(\lambda+1)b^5}{c+\lambda a}+\frac{3(\lambda+1)c^5}{a+\lambda b}}, \text{ unde } \lambda \ge 0.$$

7) If a,b,c are the dimensions a cuboid with the diagonal d then

$$d \le \sqrt[6]{\frac{9a^7}{b}+\frac{9b^7}{c}+\frac{9c^7}{a}}.$$

8) If a,b,c are the dimensions a cuboid with the diagonal d then

$$d \le \sqrt[4]{\frac{18a^7}{b+c}+\frac{18b^7}{c+a}+\frac{18c^7}{a+b}}.$$

9) If a,b,c are the dimensions a cuboid with the diagonal d then

$$d \le \sqrt[6]{\frac{9(\lambda+1)a^7}{b+\lambda c}+\frac{9(\lambda+1)b^7}{c+\lambda a}+\frac{9(\lambda+1)c^7}{a+\lambda b}}, \text{ unde } \lambda \ge 0.$$

10) If a,b,c are the dimensions a cuboid with the diagonal d and $n \in \mathbf{N}^*$ then

$$d \le \sqrt[2n]{\frac{3^{n-1}a^{2n+1}}{b}+\frac{3^{n-1}b^{2n+1}}{c}+\frac{3^{n-1}c^{2n+1}}{a}}.$$

11) If a,b,c are the dimensions a cuboid with the diagonal d and $n \in \mathbf{N}^*$ then

$$d \le \sqrt[2n]{\frac{2\cdot 3^{n-1}a^{2n+1}}{b+c}+\frac{2\cdot 3^{n-1}b^{2n+1}}{c+a}+\frac{2\cdot 3^{n-1}c^{2n+1}}{a+b}}.$$

12) If a,b,c are the dimensions a cuboid with the diagonal d and $n \in \mathbf{N}^*$, $\lambda \ge 0$ then

$$d \le \sqrt[2n]{\frac{3^{n-1}(\lambda+1)a^{2n+1}}{b+\lambda c}+\frac{3^{n-1}(\lambda+1)b^{2n+1}}{c+\lambda a}+\frac{3^{n-1}(\lambda+1)c^{2n+1}}{a+\lambda b}}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Lema

If $a,b,c>0$ and $n \in \mathbf{N}^*$, $\lambda \ge 0$ then

$$\frac{a^{2n+1}}{b+\lambda c}+\frac{b^{2n+1}}{c+\lambda a}+\frac{c^{2n+1}}{a+\lambda b} \ge \frac{1}{3^{n-1}(\lambda+1)}\left(a^2+b^2+c^2\right)^n.$$

Demonstrație.

$$\sum\frac{a^{2n+1}}{b+\lambda c}=\sum\frac{a^{2n+2}}{a(b+\lambda c)}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum a^2\right)^{n+1}}{3^{n-1}\cdot(\lambda+1)\sum ab}\overset{(1)}{\geq}\frac{\left(\sum a^2\right)^{n+1}}{3^{n-1}(\lambda+1)\sum a^2}=\frac{1}{3^{n-1}(\lambda+1)}\left(\sum a^2\right)^n.$$

Folosind **Lema** și $a^2+b^2+c^2=d^2$ în paralelipiped obținem concluzia.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă paralelipipedul este cub.

Problema475.

UP.455. If $A,B\in M_4(\mathbf{R})$ such that $AB+BA=O_4$ then

$$\det\left(A^4+A^2+B^2\right)\geq 0.$$

Marian Ursărescu,RMM11/2018

Soluție.

Avem $(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2=A^2+O_4+B^2=A^2+B^2$.

Inegalitatea se scrie $\det\left(A^4+A^2+B^2\right)=\det\left(A^4+(A+B)^2\right)\geq 0$, care resultă din:

Notând $A^2=X$ și $A+B=Y$ avem $XY=YX$ și rămâne să arătăm că:

$\det\left(X^2+Y^2\right)\geq 0$, problemă binecunoscută.

Într-adevăr $\det\left(X^2+Y^2\right)=\det\left[(X+iY)(X-iY)\right]=\det(X+iY)\det(X-iY)=$

$=\det(X+iY)\det\overline{(X+iY)}=\det(X+iY)\overline{\det(X+iY)}=\left|\det(X+iY)\right|^2\geq 0$.

Remarca.

If $A,B\in M_4(\mathbf{R})$ such that $AB+BA=O_4$ then

$$\det\left(A^{2n}+A^2+B^2\right)\geq 0.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Avem $(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2=A^2+O_4+B^2=A^2+B^2$.

Inegalitatea se scrie $\det\left(A^{2n}+A^2+B^2\right)=\det\left(A^{2n}+(A+B)^2\right)\geq 0$, care resultă din:

Notând $A^n = X$ și $A+B=Y$ avem $XY = YX$ și rămâne să arătăm că:

$\det\left(X^2+Y^2\right)\geq 0$, problemă binecunoscută.

Problema476.

Solve for real numbers the equation

$$\sqrt{x+\frac{3}{x}}=\frac{x^2+7}{2(x+1)}.$$

Pham Van Tuyen, Vietnam, THCS 1/2022

Soluție

Domeniul de definiție este $D=(0,\infty)$.

Cu substituția $\sqrt{x+\frac{3}{x}}=t \Leftrightarrow x^2+3=xt^2 \Leftrightarrow x^2+7=xt^2+4$, ecuația se scrie:

$t=\frac{xt^2+4}{2(x+1)} \Leftrightarrow 2t(x+1)=xt^2+4 \Leftrightarrow xt^2-2t(x+1)+4=0$.

Ecuația de gradul al doilea în are soluțiile $t\in\left\{2,\frac{2}{x}\right\}$.

Din $t=2 \Rightarrow \sqrt{x+\frac{3}{x}}=2 \Leftrightarrow x+\frac{3}{x}=4 \Leftrightarrow x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow x\in\{1,3\}$.

Din $t=\frac{2}{x} \Rightarrow \sqrt{x+\frac{3}{x}}=\frac{2}{x} \Leftrightarrow x+\frac{3}{x}=\frac{4}{x^2} \Leftrightarrow x^3+3x-4=0 \Leftrightarrow (x-1)\left(x^2+x+4\right)=0 \Leftrightarrow x=1$.

Mulțimea soluțiilor reale ale ecuației este $S=\{1,3\}$.

Remarca.

Let $0<n\leq 4$. Solve for real numbers the equation

$$\sqrt{x+\frac{n}{x}}=\frac{x^2+n+4}{2(x+1)}.$$

Marin Chirciu

Soluție

Domeniul de definiție este $D=(0,\infty)$.

Cu substituția $\sqrt{x+\frac{n}{x}}=t \Leftrightarrow x^2+n=xt^2 \Leftrightarrow x^2+n+4=xt^2+4$, ecuația se scrie:

$$t=\frac{xt^2+4}{2(x+1)} \Leftrightarrow 2t(x+1)=xt^2+4 \Leftrightarrow xt^2-2t(x+1)+4=0.$$

Ecuația de gradul al doilea în are soluțiile $t\in\left\{2,\frac{2}{x}\right\}$.

Din $t=2 \Rightarrow \sqrt{x+\frac{n}{x}}=2 \Leftrightarrow x+\frac{n}{x}=4 \Leftrightarrow x^2-4x+n=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=2\pm\sqrt{4-n}$.

Avem $x_{1,2}=2\pm\sqrt{4-n}\in D$.

Din $t=\frac{2}{x} \Rightarrow \sqrt{x+\frac{n}{x}}=\frac{2}{x} \Leftrightarrow x+\frac{n}{x}=\frac{4}{x^2} \Leftrightarrow x^3+nx-4=0$.

Pentru ecuația de gradul al treilea $x^3+nx-4=0$ folosim Formulele lui Cardano.

Reamintim formulele lui Cardano pentru ecuația de gradul al treilea $x^3+px+q=0$.

Discriminantul este $\Delta=-\left(4p^3+27q^2\right)$.

Dacă $\Delta=-\left(4p^3+27q^2\right)<0$, ecuația are o singură rădăcină reală

$$x_1=\sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} \text{ și } x_{2,3}\in\mathbf{C}-\mathbf{R}.$$

În cazul nostru $p=n, q=-4$, $\Delta=-\left(4p^3+27q^2\right)=-\left(4n^3+27\cdot(-4)^2\right)=-4\left(n^3+108\right)<0$,

deci ecuația are o singură rădăcină reală $x_1=\sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}=$

$$=\sqrt[3]{\frac{-(-4)}{2}+\sqrt{\frac{(-4)^2}{4}+\frac{n^3}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{-(-4)}{2}-\sqrt{\frac{(-4)^2}{4}+\frac{n^3}{27}}}=\sqrt[3]{2+\sqrt{4+\frac{n^3}{27}}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{4+\frac{n^3}{27}}}.$$

Avem $x_1=\sqrt[3]{2+\sqrt{4+\frac{n^3}{27}}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{4+\frac{n^3}{27}}}\in D$.

Mulțimea soluțiilor reale ale ecuației este:

$$S=\left\{2-\sqrt{4-n},2+\sqrt{4-n},\sqrt[3]{2+\sqrt{4+\frac{n^3}{27}}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{4+\frac{n^3}{27}}}\right\}.$$

Problema477.

Find all triples (a,b,c) satisfying the system of equations

$$\begin{cases} a+b+c=3 \\ 2^a+2^b+2^c=7 \\ 2^{-a}+2^{-b}=\dfrac{3}{4} \end{cases}.$$

2022 Spain Mathematical Olympiad

Soluție

Avem $2^{-a}+2^{-b}=\frac{3}{4}\Leftrightarrow\frac{1}{2^a}+\frac{1}{2^b}=\frac{3}{4}\Leftrightarrow\frac{2^a+2^b}{2^a2^b}=\frac{3}{4}\Leftrightarrow\frac{7-2^c}{2^{a+b}}=\frac{3}{4}\Leftrightarrow\frac{7-2^c}{2^{3-c}}=\frac{3}{4}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 7-2^c=\frac{6}{2^c}\overset{2^c=t}{\Leftrightarrow}7-t=\frac{6}{t}\Leftrightarrow t^2-7t+6=0$, cu soluțiile $t_1=1$ și $t_2=6$.

Cazul1).

$t_1=1\Leftrightarrow 2^c=1\Leftrightarrow c=0$.Rezolvăm sistemul $\begin{cases} a+b=3 \\ 2^a+2^b=6 \end{cases}$.

$2^a+2^b=6\Leftrightarrow 2^a+2^{3-a}=6\Leftrightarrow 2^a+\frac{8}{2^a}=6\overset{2^a=x}{\Leftrightarrow}x+\frac{8}{x}=6\Leftrightarrow x^2-6x+8=0$, cu soluțiile $x_1=2$ și $x_2=4$.

$x_1=2\Leftrightarrow 2^a=2\Leftrightarrow a=1\Rightarrow b=2\Rightarrow(a,b,c)=(1,2,0)$.

$x_2=4\Leftrightarrow 2^a=4\Leftrightarrow a=2\Rightarrow b=1\Rightarrow(a,b,c)=(2,1,0)$.

Cazul2).

$t_2=6\Leftrightarrow 2^c=6\Leftrightarrow c=\log_2 6=1+\log_2 3$.Rezolvăm sistemul $\begin{cases} a+b=2-\log_2 3 \\ 2^a+2^b=1 \end{cases}$.

$2^a+2^b=1\Leftrightarrow 2^a+2^{2-\log_2 3-a}=1\Leftrightarrow 2^a+\frac{4}{3\cdot 2^a}=1\overset{2^c=x}{\Leftrightarrow}x+\frac{4}{3x}=1\Leftrightarrow 3x^2-3x+1=0$, care nu are soluții reale,(vezi $\Delta=-3<0$).

Mulțimea soluțiilor sistemului este $S=\{(1,2,0),(2,1,0)\}$.

Remarcă.

Find all triples (a,b,c) satisfying the system of equations:

1). $$\begin{cases} a+b+c=4 \\ 2^a+2^b+2^c=11 \\ 2^{-a}+2^{-b}=\dfrac{5}{8} \end{cases}.$$

Soluție

Mulțimea soluțiilor sistemului este $S=\{(1,3,0),(3,1,0)\}$.

2). $$\begin{cases} a+b+c=\lambda+1 \\ 2^a+2^b+2^c=2^\lambda+3, \ \lambda\geq -1 \text{ fixed.} \\ 2^{\lambda-a}+2^{\lambda-b}=2^{\lambda-1}+1 \end{cases}$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție

Mulțimea soluțiilor sistemului este $S=\{(1,\lambda,0),(\lambda,1,0)\}$.

Problema478.

UP577. Evaluate

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\sqrt{4n^2+3n+2}\right\}.$$

Nguyen Viet Hung, Vietnam, Mathematical Reflections-2021

Solution

We have $\left\{\sqrt{4n^2+3n+2}\right\}=\sqrt{4n^2+3n+2}-\left[\sqrt{4n^2+3n+2}\right]$.

From $2n<\sqrt{4n^2+3n+2}<2n+1$ result $\left[\sqrt{4n^2+3n+2}\right]=2n$.

We have $\left\{\sqrt{4n^2+3n+2}\right\}=\sqrt{4n^2+3n+2}-2n$.

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\sqrt{4n^2+3n+2}\right\}=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+3n+2}-2n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+3n+2-4n^2}{\sqrt{4n^2+3n+2}+2n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{\sqrt{4n^2+3n+2}+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(3+\frac{2}{n}\right)}{n\left(\sqrt{4+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}+2\right)}=\frac{3}{2+2}=\frac{3}{4}.$$

Conclusion: $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\sqrt{4n^2+3n+2}\right\}=\frac{3}{4}$.

Remarca.

Let $\lambda\in\mathbf{N}^*$ fixed. Evaluate

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\sqrt{\lambda^2n^2+(2\lambda-1)n+1}\right\}.$$

Marin Chirciu

Conclusion: $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\sqrt{\lambda^2n^2+(2\lambda-1)n+1}\right\}=\frac{2\lambda-1}{2\lambda}$.

Problema479.

Calculate

$$\lim_{n\to\infty}\cos\left(\pi\sqrt{4n^2-n}\right).$$

Elton P, Mathematical Olympiads 11/2022

Soluție.

Avem $\cos\left(\pi\sqrt{4n^2-n}\right)=\cos\left(2\pi-\pi\sqrt{4n^2-n}\right)=\cos\pi\left(2-\sqrt{4n^2-n}\right)=\cos\pi\left(\frac{4n^2-4n^2+n}{2+\sqrt{4n^2-n}}\right)=$

$$=\cos\pi\left(\frac{n}{2n+\sqrt{4n^2-n}}\right)=\cos\pi\frac{n}{n\left(2+\sqrt{4-\frac{1}{n}}\right)}\to\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\left(\pi\sqrt{4n^2-n}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Remarcă.

Let $\lambda\geq 0$ fixed. Calculate

$$\lim_{n\to\infty}\cos\left(\pi\sqrt{4n^2-\lambda n}\right).$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$\cos\left(\pi\sqrt{4n^2-\lambda n}\right)=\cos\left(2\pi-\pi\sqrt{4n^2-\lambda n}\right)=\cos\pi\left(2-\sqrt{4n^2-\lambda n}\right)=\cos\pi\left(\frac{4n^2-4n^2+\lambda n}{2+\sqrt{4n^2-\lambda n}}\right)=$$

$$=\cos\pi\left(\frac{\lambda n}{2n+\sqrt{4n^2-\lambda n}}\right)=\cos\pi\frac{\lambda n}{n\left(2+\sqrt{4-\frac{\lambda}{n}}\right)}\to\cos\frac{\lambda\pi}{4}.$$

Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\left(\pi\sqrt{4n^2-n}\right)=\cos\frac{\lambda\pi}{4}$.

Problema480.

If $a,b>0$, $a+b=1$ then

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}+ab\geq\frac{5}{4}.$$

Greece 2025

Soluție.

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}+ab\geq\frac{5}{4}\Leftrightarrow 4\left(a^3+b^3\right)+4a^2b^2\geq 5ab \overset{omogenizare}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow 4(a+b)\left(a^3+b^3\right)+4a^2b^2\geq 5ab(a+b)^2 \Leftrightarrow 4a^4-a^3b-6a^2b^2-ab^3+4a^4\geq 0\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (a-b)^2\left(4a^2+7ab+4b^2\right)\geq 0$. Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=\frac{1}{2}$.

Remarca.

If $a,b>0$, $a+b=1$ then

$$1).\ \frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}+\lambda ab\geq 1+\frac{\lambda}{4},\ 0\leq\lambda\leq 16.$$

Soluție.

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}+\lambda ab\geq 1+\frac{\lambda}{4}\Leftrightarrow 4\left(a^3+b^3\right)+4\lambda a^2b^2\geq(\lambda+4)ab \overset{omogenizare}{\Leftrightarrow}$$

$\Leftrightarrow 4(a+b)(a^3+b^3)+4\lambda a^2b^2 \geq (\lambda+4)ab(a+b)^2 \Leftrightarrow$

$4a^4-\lambda a^3b+2(\lambda-4)a^2b^2-\lambda ab^3+4a^4 \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2\left[4a^2+(8-\lambda)ab+4b^2\right] \geq 0$, vezi

$0 \leq \lambda \leq 16$, care asigură $\left[4a^2+(8-\lambda)ab+4b^2\right] \geq 0$,din $\Delta=(8-\lambda)^2-64=\lambda^2-16\lambda \leq 0$.

$$2).\ \frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}+16ab \geq 5 .$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}+16ab \geq 5 \Leftrightarrow (a^3+b^3)+4a^2b^2 \geq 5ab \overset{omogenizare}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow (a+b)(a^3+b^3)+4a^2b^2 \geq 5ab(a+b)^2 \Leftrightarrow a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+a^4 \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a-b)^4 \geq 0$. Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=\frac{1}{2}$.

Problema481.

VIII.603. If $a,b,c>0$, $a+b+c=2$ then

$$\sum\frac{a^3}{b}\sum\frac{b}{a} \geq 4 .$$

Aurel Doboșan, Lugoj, RMT 1/2025

Soluție.

$\sum\frac{a^3}{b}\sum\frac{b}{a} \geq 4 \Leftrightarrow \sum\frac{a^3}{b}\sum\frac{b}{a}\sum a \geq 8$, care rezultă din :

$LHS=\sum\frac{a^3}{b}\sum\frac{b}{a}\sum a \overset{Holder}{\geq} \left(\sum\sqrt[3]{\frac{a^3}{b}\frac{b}{a}a}\right)^3=2^3=8=RHS$, cu egal dacă $a=b=c=\frac{2}{3}$.

Remarca.

If $a,b,c,\lambda>0$, $a+b+c=\lambda$ then

$$\sum\frac{a^3}{b}\sum\frac{b}{a} \geq \lambda^2 .$$

Marin Chirciu

Soluție.

$\sum\frac{a^3}{b}\sum\frac{b}{a}\geq\lambda^2 \Leftrightarrow \sum\frac{a^3}{b}\sum\frac{b}{a}\sum a\geq\lambda^3$, care rezultă din :

$LHS=\sum\frac{a^3}{b}\sum\frac{b}{a}\sum a \overset{Holder}{\geq}\left(\sum\sqrt[3]{\frac{a^3}{b}\frac{b}{a}a}\right)^3=\lambda^3=RHS$, cu egal dacă $a=b=c=\frac{\lambda}{3}$.

Problema482.

E:17108. If $a,b,c>0$ then

$$\sum\frac{4a^2+b^2+c^2}{2a^2+bc}\leq\sum\frac{b+c}{a}.$$

George Florin Șerban, Brăila, GM 1/2025

Soluție.

Din $\sum\frac{b+c}{a}=\sum\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)$, inegalitatea este echivalentă cu $\sum\frac{4a^2+b^2+c^2}{2a^2+bc}\leq\sum\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)$,

care rezultă din $\frac{4a^2+b^2+c^2}{2a^2+bc}\leq\frac{b}{c}+\frac{c}{b} \Leftrightarrow bc\left(4a^2+b^2+c^2\right)\leq\left(2a^2+bc\right)\left(b^2+c^2\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4a^2bc\leq 2a^2\left(b^2+c^2\right)\Leftrightarrow 0\leq 2a^2\left(b^2+c^2-2bc\right)\Leftrightarrow 0\leq 2a^2\left(b-c\right)^2$, cu egal pentru $b=c$.

Remarca.

If $a,b,c>0$ then

$$1).\ \sum\frac{4\lambda a^2+\lambda^2b^2+c^2}{2a^2+bc}\leq\sum\frac{b+\lambda^2c}{a},\lambda\geq 0.$$

Soluție.

Din $\sum\frac{b+\lambda^2c}{a}=\sum\left(\frac{\lambda^2b}{c}+\frac{c}{b}\right)$, inegalitatea se scrie $\sum\frac{4\lambda a^2+\lambda^2b^2+c^2}{2a^2+bc}\leq\sum\left(\frac{\lambda^2b}{c}+\frac{c}{b}\right)$,

$\frac{4\lambda a^2+\lambda^2b^2+c^2}{2a^2+bc}\leq\frac{\lambda^2b}{c}+\frac{c}{b}\Leftrightarrow bc\left(4\lambda a^2+\lambda^2b^2+c^2\right)\leq\left(2a^2+bc\right)\left(\lambda^2b^2+c^2\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\lambda a^2bc\leq 2a^2\left(\lambda^2b^2+c^2\right)\Leftrightarrow 0\leq 2a^2\left(\lambda^2b^2+c^2-2\lambda bc\right)\Leftrightarrow 0\leq 2a^2\left(\lambda b-c\right)^2$,

cu egal pentru $\lambda b=c$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$ și $\lambda=1$.

$$2).\ \frac{a^2}{2b^2+ca}+\frac{b^2}{2c^2+ab}+\frac{c^2}{2a^2+bc}\le\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

Din $\sum\frac{b}{a}=\sum\frac{a}{c}$, inegalitatea se scrie $\sum\frac{a^2}{2b^2+ca}\le\sum\frac{a}{c}$,

care rezultă din $\frac{a^2}{2b^2+ca}\le\frac{a}{c}\Leftrightarrow ca\le 2b^2+ca\Leftrightarrow 0\le 2b^2$, cu egal pentru $b=0$, fals.

Inegalitatea este strictă.

Problema483.

Solve the system

$$\begin{cases}(x+y)^2-3xy=325\\ x+y+x^3+y^3=8150\end{cases}.$$

Sanong Huayrerai, Mathematics 2/2025

Soluție.

$$\begin{cases}(x+y)^2-3xy=325\\ x+y+x^3+y^3=8150\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-xy+y^2=325\\ (x+y)(1+x^2-xy+y^2)=8150\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-xy+y^2=325\\ (x+y)(1+325)=8150\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-xy+y^2=325\\ (x+y)=25\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xy=100\\ x+y=25\end{cases}\Rightarrow(x,y)\in\{(5,20),(20,5)\}.$$

Mulțimea soluțiilr sistemului este $S=\{(5,20),(20,5)\}$.

Remarca.

Let $\lambda>0$ fixed. Solve the system

$$\begin{cases}(x+y)^2-3xy=13\lambda^2\\ x+y+x^3+y^3=5\lambda(1+13\lambda^2)\end{cases}.$$

Marin Chirciu

Mulțimea soluțiilr sistemului este $S=\{(\lambda,4\lambda),(4\lambda,\lambda)\}$.

Problema484.

29030. Rezolvați în $\mathbf{R}_+^*$ ecuația:

$$x+\frac{9}{x}=3\cdot 2^{-x^4+6x^3-10x^2+6x-8}.$$

Mihaela Berindeanu, București, GM1/2025

Soluție.

$$3\cdot 2^{-x^4+6x^3-10x^2+6x-8}=x+\frac{9}{x}\overset{AM-GM}{\geq}2\sqrt{x\cdot\frac{9}{x}}=6\Rightarrow 3\cdot 2^{-x^4+6x^3-10x^2+6x-8}\geq 6\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{-x^4+6x^3-10x^2+6x-8}\geq 2\Leftrightarrow -x^4+6x^3-10x^2+6x-8\geq 1\Leftrightarrow x^4-6x^3+10x^2+6x+9\leq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2\left(x^2+1\right)\leq 0\Leftrightarrow x=3.$$

Deducem că $x=3$ este soluția unică a ecuației.

Remarca.

Rezolvați în $\mathbf{R}_+^*$ ecuația:

$$1).\ x+\frac{16}{x}=8^{-x^4+8x^3-17x^2+8x-15}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$8^{-x^4+8x^3-17x^2+8x-15}=x+\frac{16}{x}\overset{AM-GM}{\geq}2\sqrt{x\cdot\frac{16}{x}}=8\Rightarrow 8^{-x^4+8x^3-17x^2+8x-15}\geq 8\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x^4+8x^3-17x^2+8x-15\geq 1\Leftrightarrow x^4-8x^3+17x^2-8x+16\leq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-4)^2\left(x^2+1\right)\leq 0\Leftrightarrow x=4.$$

Deducem că $x=4$ este soluția unică a ecuației.

$$2).\ x+\frac{\lambda^2}{x}=(2\lambda)^{-x^4+2\lambda x^3-\left(\lambda^2+1\right)x^2+2\lambda x-\lambda^2+1},\ \lambda>\frac{1}{2}\text{ fixat..}$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Soluție.

$$(2\lambda)^{-x^4+2\lambda x^3-\left(\lambda^2+1\right)x^2+2\lambda x-\lambda^2+1}=x+\frac{\lambda^2}{x}\overset{AM-GM}{\geq}2\sqrt{x\cdot\frac{\lambda^2}{x}}=2\lambda\Rightarrow(2\lambda)^{-x^4+2\lambda x^3-\left(\lambda^2+1\right)x^2+2\lambda x-\lambda^2-1}\geq 2\lambda\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x^4+2\lambda x^3-\left(\lambda^2+1\right)x^2+2\lambda x-\lambda^2+1\geq 1 \Leftrightarrow x^4-2\lambda x^3+\left(\lambda^2+1\right)x^2-2\lambda x+\lambda^2\leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-\lambda)^2\left(x^2+1\right)\leq 0 \Leftrightarrow x=\lambda .$$

Deducem că $x=\lambda$ este soluția unică a ecuației.

Problema485.

29033. Arătați că $a^{x^2}+a^{y^2}+a^{-xy}\geq 3$,pentru orice $a,x,y\in\mathbf{R}, a>1$ și determinați cazurile de egalitate.

George Stoica, Canada, GM 1/2025

Soluție.

$$LHS=a^{x^2}+a^{y^2}+a^{-xy}\overset{AM-GM}{\geq} 3\sqrt[3]{a^{x^2}\cdot a^{y^2}\cdot a^{-xy}}=3\sqrt[3]{a^{x^2+y^2-xy}}\overset{(1)}{\geq}3=RHS ,$$

unde $3\sqrt[3]{a^{x^2+y^2-xy}}\overset{(1)}{\geq}3 \Leftrightarrow x^2-xy+y^2\geq 0$, cu egalitate pentru $x=y=0$.

Problema486.

If $a,b,c>0$ then

$$\sum\frac{5a}{\sqrt{27\left(b^2+c^2\right)+21bc}}\geq\sqrt{3}.$$

Neculai Stanciu, Buzău, RMM2/2025

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{5a}{\sqrt{27\left(b^2+c^2\right)+21bc}}=\sum\frac{5a^2}{a\sqrt{27\left(b^2+c^2\right)+21bc}}\overset{CS}{\geq}\frac{5\left(\sum a\right)^2}{\sum a\sqrt{27\left(b^2+c^2\right)+21bc}}\overset{(1)}{\geq}$$

$$\overset{(1)}{\geq}\sqrt{3}=RHS ,$$

unde $\dfrac{5\left(\sum a\right)^2}{\sum a\sqrt{27\left(b^2+c^2\right)+21bc}}\overset{(1)}{\geq}\sqrt{3} \Leftrightarrow 5\left(\sum a\right)^2\geq\sqrt{3}\sum a\sqrt{27\left(b^2+c^2\right)+21bc}$, vezi CBS:

$$\sum a\sqrt{27\left(b^2+c^2\right)+21bc}=\sum\sqrt{a}\sqrt{27a\left(b^2+c^2\right)+21abc}\overset{CBS}{\leq}\sqrt{\sum a\sum\left(27a\left(b^2+c^2\right)+21abc\right)}.$$

Remarca.

If $a,b,c>0$ then

$$1).\ \sum\frac{a}{\sqrt{b^2+c^2+\lambda bc}}\geq\frac{3}{\sqrt{\lambda+2}},\ \lambda\geq 1.$$

Soluție.

$$LHS=\sum\frac{a}{\sqrt{b^2+c^2+\lambda bc}}=\sum\frac{a^2}{a\sqrt{b^2+c^2+\lambda bc}}\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum a\sqrt{b^2+c^2+\lambda bc}}\overset{(1)}{\geq}\frac{3}{\sqrt{\lambda+2}}=RHS,$$

unde $\frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum a\sqrt{b^2+c^2+\lambda bc}}\overset{(1)}{\geq}\frac{3}{\sqrt{\lambda+2}}\Leftrightarrow\sqrt{\lambda+2}\left(\sum a\right)^2\geq 3\sum a\sqrt{b^2+c^2+\lambda bc}$, veziCBS:

$$\sum a\sqrt{b^2+c^2+\lambda bc}=\sum\sqrt{a}\sqrt{a\left(b^2+c^2\right)+\lambda abc}\overset{CBS}{\leq}\sqrt{\sum a\sum\left(a\left(b^2+c^2\right)+\lambda abc\right)}.$$

$$2).\ \sum\frac{a}{\sqrt{b^2+c^2+bc}}\geq\sqrt{3}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema487.

S.L25.21. Rezolvați în numere reale ecuația:

$$3\sqrt{x+y}+2\sqrt{8-x}+\sqrt{6-y}=14.$$

Maria Elena Panaitopol, 1985,SGM 1/2025

Soluție.

Domeniul de definiție al ecuației este $0\leq x\leq 8, 0\leq y\leq 6$.

$$LHS=3\sqrt{x+y}+2\sqrt{8-x}+\sqrt{6-y}\overset{CBS}{\leq}\sqrt{\left(3^2+2^2+1^2\right)\left(x+y+8-x+6-y\right)}=14=RHS,$$

cu egalitate pentru $\frac{\sqrt{x+y}}{3}=\frac{\sqrt{8-x}}{2}=\frac{\sqrt{6-y}}{1}\Leftrightarrow(x,y)=(4,5)$.

Remarca.

Fie $a,b,c,n,k>0$, $a^2+b^2+c^2=n+k$ fixate. Rezolvați în numere reale ecuația:

$$a\sqrt{x+y}+b\sqrt{n-x}+c\sqrt{k-y}=a^2+b^2+c^2.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Domeniul de definiție al ecuației este $0 \le x \le n, 0 \le y \le k$.

$$LHS = a\sqrt{x+y} + b\sqrt{n-x} + c\sqrt{k-y} \overset{CBS}{\le} \sqrt{\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x+y+n-x+k-y\right)} =$$

$$a^2+b^2+c^2 = RHS,$$

cu egalitate pentru $\frac{\sqrt{x+y}}{a} = \frac{\sqrt{n-x}}{b} = \frac{\sqrt{k-y}}{c} \Leftrightarrow (x,y) = \left(n-b^2, k-c^2\right)$.

Problema488.

S:E25.41. Rezolvați în numere întregi ecuația:

$$x^2y + xy^2 - 2x - 2y - xy = 1.$$

Eugen Popa, 1965,SGM1/2025

Soluție.

$x^2y + xy^2 - 2x - 2y - xy = 1 \Leftrightarrow xy(x+y) - 2(x+y) - xy = 1 \Leftrightarrow (xy-2)(x+y-1) = 3$.

Avem $3 = 1 \cdot 3 = 3 \cdot 1 = (-1)\cdot(-3) = (-3)\cdot(-1)$.

Cazul1). $\begin{cases} xy-2=1 \\ x+y-1=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=3 \\ x+y=4 \end{cases} \Rightarrow (x,y) \in \{(1,3),(3,1)\}$.

Cazul2). $\begin{cases} xy-2=3 \\ x+y-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=5 \\ x+y=2 \end{cases}$,fals.

Cazul3). $\begin{cases} xy-2=-1 \\ x+y-1=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=1 \\ x+y=-2 \end{cases} \Rightarrow (x,y) = (-1,-1)$.

Cazul4). $\begin{cases} xy-2=-3 \\ x+y-1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=-1 \\ x+y=0 \end{cases} \Rightarrow (x,y) \in \{(-1,1),(1,-1)\}$.

Mulțimea soluțiilor ecuației este $S = \{(1,3),(3,1),(-1,-1),(-1,1),(1,-1)\}$.

Remarca.

Fie p număr prim dat. Rezolvați în numere întregi ecuația:

$$x^2y + xy^2 + (1-p)x + (1-p)y - xy = 1.$$

Marin Chirciu

Soluție.

$$x^2y+xy^2+(1-p)x+(1-p)y-xy=1 \Leftrightarrow xy(x+y)+(1-p)(x+y)-xy=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (xy-p+1)(x+y-1)=p.$$

Avem $p=1\cdot p=p\cdot 1=(-1)\cdot(-p)=(-p)\cdot(-1)$.

Cazul1). $\begin{cases} xy-p+1=1 \\ x+y-1=p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=p \\ x+y=p+1 \end{cases} \Rightarrow (x,y)\in\{(1,p),(p,1)\}$.

Cazul2). $\begin{cases} xy-p+1=p \\ x+y-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=2p-1 \\ x+y=2 \end{cases}$,ecuația $x^2-2x+2p-1=0$, $\Delta=2(1-p)<0$, fals.

Cazul3). $\begin{cases} xy-p+1=-1 \\ x+y-1=-p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=p-2 \\ x+y=1-p \end{cases} \Rightarrow (x,y)\in\{(-1,2-p),(2-p,-1)\}$.

Cazul4). $\begin{cases} xy-p+1=-p \\ x+y-1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=-1 \\ x+y=0 \end{cases} \Rightarrow (x,y)\in\{(-1,1),(1,-1)\}$.

Mulțimea soluțiilor ecuației este $S=\{(1,p),(p,1),(-1,2-p),(2-p,-1),(-1,1),(1,-1)\}$.

Problema489.

Solve in real numbers the system:

$$\begin{cases} a^3+3ab^2+3ac^2-6abc=1 \\ b^3+3ba^2+3bc^2-6abc=1 \\ c^3+3ca^2+3cb^2-6abc=1 \end{cases}.$$

Baltic Way-2002

Soluție.

Scad primele două ecuații $\Rightarrow (a-b)^2\left[(a-b)^2+3c^2\right]=0 \Leftrightarrow a=b$.

Scad ultimeledouă ecuații $\Rightarrow (b-c)^2\left[(b-c)^2+3a^2\right]=0 \Leftrightarrow b=c$.

Obținem $a=b=c$ și prima ecuație $\Rightarrow a=1$.

Deducem că sistemul admite soluția unică $(a,b,c)=(1,1,1)$.

Remarca.

Fie $\lambda \neq 7$ fixed. Solve in real numbers the system:

$$\begin{cases} a^3+3ab^2+3ac^2-\lambda abc=7-\lambda \\ b^3+3ba^2+3bc^2-\lambda abc=7-\lambda \\ c^3+3ca^2+3cb^2-\lambda abc=7-\lambda \end{cases}.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Scad primele două ecuații $\Rightarrow (a-b)^2\left[(a-b)^2+3c^2\right]=0 \Leftrightarrow a=b$.

Scad ultimeledouă ecuații $\Rightarrow (b-c)^2\left[(b-c)^2+3a^2\right]=0 \Leftrightarrow b=c$.

Obținem $a=b=c$ și prima ecuație $\Rightarrow (7-\lambda)a^3=(7-\lambda) \overset{\lambda\neq 7}{\Rightarrow} a=1$.

Deducem că sistemul admite soluția unică $(a,b,c)=(1,1,1)$.

Problema490.

Solve in positive real numbers the equation:

$$x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+4=2\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}\right).$$

Baltic Way-2000

Soluție.

Avem $x+\frac{1}{x}+2-2\sqrt{2x+1}=\frac{1}{x}\left(x-\sqrt{2x+1}\right)^2$.

Ecuația se scrie echivalent $\frac{1}{x}\left(x-\sqrt{2x+1}\right)^2+\frac{1}{y}\left(y-\sqrt{2y+1}\right)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-\sqrt{2x+1}=0 \\ y-\sqrt{2y+1}=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x+1}=x \\ \sqrt{2y+1}=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=2x+1 \\ y^2=2y+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+\sqrt{2} \\ y=1+\sqrt{2} \end{cases}.$$

Deducem că ecuația admite soluția pozitivă unică $(x,y)=\left(1+\sqrt{2},1+\sqrt{2}\right)$.

Remarca.

Solve in positive real numbers the equation:

$$x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+6=2\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}+\sqrt{2z+1}\right).$$

Marin Chirciu

Soluție.

Ecuația admite soluția pozitivă unică $(x,y,z)=\left(1+\sqrt{2},1+\sqrt{2},1+\sqrt{2}\right)$.

Problema491.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=1$ then

$$(1-x)(1-y)(1-z)\geq\frac{8}{9}\sqrt{3xyz}.$$

Michel Bataille, France, Mathematical Inequalities 2/2025

Soluție.

$$LHS=\prod(1-x)=\prod(y+z)\overset{Lema8/9}{\geq}\frac{8}{9}\sum x\sum xy=\frac{8}{9}\cdot1\cdot\sum xy\overset{SOS}{\geq}\frac{8}{9}\cdot\sqrt{3xyz\sum x}=$$

$$=\frac{8}{9}\sqrt{3xyz}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Remarca.

In ΔABC

$$1).\ \prod\left(1-\frac{r}{r_a}\right)\geq\left(\frac{2}{3}\right)^3\frac{2r}{R}.$$

Soluție.

Lema.

If $x,y,z>0$, $x+y+z=1$ then

$$(1-x)(1-y)(1-z)\geq\frac{8}{9}\sqrt{3xyz}.$$

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum\frac{r}{r_a}=1$.

Folosind **Lema** pentru $(x,y,z)=\left(\frac{r}{r_a},\frac{r}{r_b},\frac{r}{r_c}\right)$ obținem:

$$\prod\left(1-\frac{r}{r_a}\right)\geq\frac{8}{9}\sqrt{3\frac{r}{r_a}\cdot\frac{r}{r_b}\cdot\frac{r}{r_c}}\Leftrightarrow\prod\left(1-\frac{r}{r_a}\right)\geq\left(\frac{2}{3}\right)^3\frac{2r}{R}.$$

2). $$\prod\left(1-\frac{r}{h_a}\right)\geq\left(\frac{2}{3}\right)^3\frac{2r}{R}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

Problema492.

S:L25.4. Rezolvați în numere reale ecuația:

$$\sqrt{x_1-1}+2\sqrt{x_2-4}+...+n\sqrt{x_n-n^2}=\frac{1}{2}(x_1+x_2+...+x_n), n\in\mathbf{N}^*.$$

Titu Andreescu, 1975, SGM-1/2025

Soluție.

Domeniul de definiție este dat de $x_1\geq 1, x_2\geq 4,..., x_n\geq n^2$.

Ecuația se scrie echivalent:

$$\left(\sqrt{x_1-1}-1\right)^2+\left(\sqrt{x_2-4}-2\right)^2+...+\left(\sqrt{x_n-n^2}-n\right)^2=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x_1-1}-1\right)^2=0,\left(\sqrt{x_2-4}-2\right)^2=0,...,\left(\sqrt{x_n-n^2}-n\right)^2=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x_1-1}=1,\sqrt{x_2-4}=2,...,\sqrt{x_n-n^2}=n\Leftrightarrow x_1-1=1, x_2-4=4,..., x_n-n^2=n^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1=2, x_2=8,..., x_n=2n^2.$$

Deducem că ecuația admite soluâia unică $(x_1, x_2,..., x_n)=(2,8,...,2n^2)$.

Remarca.

Rezolvați în numere reale ecuația:

$$\sqrt{x_1-1}+4\sqrt{x_2-16}+...+n^2\sqrt{x_n-n^4}=\frac{1}{2}(x_1+x_2+...+x_n), n\in\mathbf{N}^*.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Domeniul de definiție este dat de $x_1\geq 1, x_2\geq 16,..., x_n\geq n^4$.

Ecuația se scrie echivalent:

$$\left(\sqrt{x_1-1}-1\right)^2+\left(\sqrt{x_2-16}-4\right)^2+\ldots+\left(\sqrt{x_n-n^4}-n^2\right)^2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x_1-1}-1\right)^2=0,\left(\sqrt{x_2-16}-4\right)^2=0,\ldots,\left(\sqrt{x_n-n^4}-n^2\right)^2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x_1-1}=1,\sqrt{x_2-16}=4,\ldots,\sqrt{x_n-n^4}=n^4 \Leftrightarrow x_1-1=1,x_2-16=16,\ldots,x_n-n^4=n^4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1=2,x_2=32,\ldots,x_n=2n^4.$$

Deducem că ecuația admite soluâia unică $(x_1,x_2,\ldots,x_n)=(2,16,\ldots,2n^4)$.

Problema493.

VII.603. Se dă patrulaterul convex $ABCD$ cu măsurile unghiurilor A,B,C invers proporționale cu numerele $10,15$, respectiv 6 și $A=B+30^\circ$.Demonstrați că dacă $EC \parallel AB$, $E\in AD$, atunci $2ED=DC$.

Nicolae Ivășchescu, Canada, RMT 1/2025

Soluție.

Din $A\cdot 10=B\cdot 15=C\cdot 6$ și $A=B+30^\circ \Rightarrow A=90^\circ, B=60^\circ, C=150^\circ, D=60^\circ$.

În ΔDEC dreptunghic în E și $\sphericalangle ECD=30^\circ$ aplicăm teorema unghiului de 30° și obținem $2ED=DC$.

Problema494.

O687. Let x,y,z be real numbers such that $xy+yz+zx=1$ and $x+y+z>0$.

Prove that

$$\frac{\sum xy\sqrt{z^2+1}}{x+y+z}\le\frac{2}{3}.$$

Marius Stănean, Zalău, Romania, Mathematical Reflections 1/2025

Solution.

$$\frac{\sum xy\sqrt{z^2+1}}{x+y+z}\le\frac{2}{3}\Leftrightarrow 3\sum xy\sqrt{z^2+1}\le 2\sum x.$$

We have $\sqrt{z^2+1}=\sqrt{z^2+xy+yz+zx}=\sqrt{(z+x)(z+y)}\overset{AM-GM}{\le}\frac{(z+x)+(z+y)}{2}=z+\frac{x+y}{2}$.

It is enough to show that:

$$3\sum xy\left(z+\frac{x+y}{2}\right)\le 2\sum x \Leftrightarrow 9xyz+\frac{3}{2}\sum xy(x+y)\le 2\sum x.$$

Using pqr -Method we have: $p=x+y+z, q=xy+yz+zx=1, r=xyz$.

We have $p^2\ge 3q$ and $q^2\ge 3pr$, $q=1$ then $p^2\ge 3$ and $1\ge 3pr$.

We have $\sum xy(x+y)=\sum x\sum xy-3xyz=pq-3r$.

The inequality $9xyz+\frac{3}{2}\sum xy(x+y)\le 2\sum x$ is written:

$9r+\frac{3}{2}(pq-3r)\le 2p \Leftrightarrow 9r+3pq\le 4p$ and $q=1 \Leftrightarrow 9r+3p\le 4p \Leftrightarrow 9r\le p$, see

$r\le \frac{1}{3p} \Rightarrow 9\cdot\frac{1}{3p}\le p \Leftrightarrow p^2\ge 3$, true.

Equality occurs if and only if $x=y=z=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Remark.

In ΔABC

$$\sum \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le \frac{2}{3}+\frac{r}{6R}.$$

Marin Chirciu

Solution

Lemma.

If $x, y, z>0$, $xy+yz+zx=1$ then

$$\sum xy\sqrt{z^2+1}\le \frac{2}{3}\sum x.$$

Se cunoaște identitatea în triunghi $\sum \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=1$.

Folosind **Lema** pentru $(x, y, z)=\left(\tan\frac{A}{2}, \tan\frac{B}{2}, \tan\frac{C}{2}\right)$ obținem:

$$\sum \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\sqrt{\tan^2\frac{A}{2}+1} \le \frac{2}{3}\sum \tan\frac{A}{2} \Leftrightarrow \sum \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\frac{1}{\cos\frac{A}{2}} \le \frac{2}{3}\cdot\frac{4R+r}{p} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum \frac{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} \le \frac{2(4R+r)}{3p} \Leftrightarrow \sum \frac{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\frac{p}{4R}} \le \frac{2(4R+r)}{3p} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \frac{p}{4R}\cdot\frac{2(4R+r)}{3p} \Leftrightarrow \sum \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \frac{4R+r}{6R}.$$

Deducem $\sum \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \frac{2}{3}+\frac{r}{6R}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Notă.

Inegalitatea întărește inegalitatea lui Child $\sum \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \frac{3}{4}$,(Math.Gazette 1939,J.M.Child).

Remark.

Au loc inegalitățile:

In ΔABC

$$\sum \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \frac{2}{3}+\frac{r}{6R} \le \frac{3}{4}.$$

Bibliografie:

1. C.Năstăsescu, C.Niță, M.Brandiburu, D. Joița , Exerciții de algebră, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1992.
2. O. Bottema, R. Z. Djordjević, R. R. Janić, D. S. Mitrinović și P. M. Vasić, „Geometric Inequalities”, Groningen 1969, Olanda .
3. Marin Chirciu, Inegalități trigonometrice, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2016.
4. Marin Chirciu, Inegalități cu linii importante în triunghi ,de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2018.
5. Marin Chirciu, Inegalități cu laturi și cu raze în triunghi, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2017.
6. George Apostolopoulos, Greece , Mathematical Inequalites 2/2025.
7. Kostantinos Geronikolas, Greece, Pure Inequalities 2/2025.
8. Nguyen Van Hoa, Vietnam, Mathematical Inequalities 2/2025.
9. Mircea Fianu, București, OL-2003.

10. Gheorghe Crăciun, Mathematical Inequalities 2/2025.

11. D.M.Bătinețu-Giurgiu,RMM-2/2025.

12. Claudia Nănuți,RMM-2/2025.

13. Ionela Turturean, Satu Mare, OL-2025-Mehedinți.

14. Mircea Becheanu, Canada, Mathematical Reflections 1/2025.

15. Kunihiko Chikaya, Mathematical Inequalities 2/2025.

16. Vasile Cârtoaje, Mathematical Inequalities 2/2025.

17. Dragojlub Milosevici, Mathematical Inequalities 2/2025.

18. Petre Bătrânețu, Galați, MateMaraton 2/2025.

19. Gheorghe Duca, MateMaraton 2/2025.

20. Alin Crețu, MateMaraton 2/2025.

21. Nguyen Hung Cuong,Vietnam, RMM 2/2025.

22. Zaza Mzhavanadze, Georgia, RMM 2/2025.

23.Nguyen Minh Tho, Vietnam, Mathematical Inequalites 2/2025.

24. Pham Kim Hung, 2006, Mathematical Inequalities 2/2025.

25.Panagiotis Danousis, Greece, MathAtelier 2/2025.

26. Imad Zak, Lebanon, Mathematical Inequalities 2/2025.

27. Lee Chan Lye,Vietnam,Math Olymp 2/2025.

28.Marian Cucoaneș, Recreații Matematice 1/2025.

29. Marius Drăgan, Recreații Matematice 1/2025.

30.Elton Papanikola, MathOlymp 2/2025.

31.Daniel Sitaru, Romania, Crux Mathematicorum 5/2024.

32.Nguyen Viet Hung,Vietnam, Mathematical Inequalities 2/2025.

33.Rahim Shahbazov, Mathematical Inequalities 2/2025.

34.Bahadur Heydarov , Math 2/2025.

35. Marius Stănean, Zalău, Romania, Mathematical Reflections 1/2025

36. Mihaly Bencze, RMM 2/2025.

37. Vasile Mircea Popa,RMM 2/2025.

38. Chuyen Toan, Vietnam,THCS 2/2025.

39. USA Test Selection Team, 2001.

40.Vassilis Demetraskos, Greece, MathAtelier 2/2025.

41. Concursul ”Florica T.Câmpan”, Iași, 2003.

42. Dang Ngoc Minh, Vietnam, Mathematical Inequalities 2/2025

43.Marocan Math Olympiad.

44.Geofrey Campbell, Classical Mathematics 2/2025.

45.Cezar Ozun, Dăneți ,SGM 12/2024.

46.Gabriel Tica, Craiova,SGM 12/2024.

47.Neculai Stanciu, Buzău, RMM 2/2025.

48.An Zhenping, China, Mathematical Reflections, Nr.6/2024.

49.Mihaela Berindeanu, București, GM 1/2025.

50.Titu Andreescu, 1975, SGM 1/2025 .

51. Jose Luis Diaz-Barrero, JOZSEF WILDT INTERNATIONAL MATH-2017 .

52. Srinava Raghava,RMM 1/2020.

53. Marian Ursărescu, Romania,RMM, Spring 2021.

54. Jose Luis Diaz-Barrero, Barcelona, Spain, Arhimede, Spring 2019.

55. Kunihiko Chikaya, Enjoy Solving Mathematics 2/2022.

56. Doina și Aurelian Ionescu, Toplița,RMT 2/2020.

57. Tom P, Mathematical Olimpiads 8/2020.

58. Ionuț Florin Voinea, RMM 11/2020.

59. Reus Shoemacker,Polar Pi, 4/2021.

60. Pham Van Tuyen, Vietnam, THCS 1/2022.

61. Spain Mathematical Olympiad2022.

62. Elton P, Mathematical Olympiads 11/2022.

63. Greece, 2025.

64. Aurel Doboșan,Lugoj, RMT 1/2025.

65. George Florin Șerban, Brăila, GM 1/2025.

66. Sanong Huayrerai, Mathematics 2/2025.

67. George Stoica, Canada, GM 1/2025.

68. Maria Elena Panaitopol, 1985,SGM 1/2025.

69. Eugen Popa, 1965,SGM1/2025.

70. Baltic Way-2002.

71. Michel Bataille, France, Mathematical Inequalities 2/2025.

72.Nicolae Ivășchescu, Canada, RMT 1/2025.

73.JBMO-ShortList 2002.

74.Marin Chirciu, Inegalități algebrice 2,de inițiere la perf, Ed.Paralela 45, Pitești, 2021.

75.Marin Chirciu, Inegalități geometrice2, inițiere și perf, Ed. Paralela 45, Pitești, 2021.

Art 8000

1 Martie 2024

3. Extinderi ale inegalităţilor CESÀRO şi PADOA

De Gheorghe Ghiţă, Buzău

Articolul prezintă o extindere a inegalităţilor Cesàro şi Padoa, precum şi o serie de inegalităţi din aceeaşi clasă.

1) Extindere Cesàro.

$$\mathbf{k, n > 0; x, y, z \geq 0 \Rightarrow (kx+ny)(ky+nz)(kz+nx) \geq (k+n)^3 xyz}.$$

Demonstraţie. $(kx+ny)(ky+nz)(kz+nx) \overset{Hölder}{\geq} \left(\sqrt[3]{kxkykz}+\sqrt[3]{nynznx}\right)^3 = (k+n)^3 xyz$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $\Leftrightarrow x=y=z$.

Pentru $k=n=1$ se obţine binecunoscuta inegalitate a lui CESARO:

$$\forall x,y,z \geq 0 \Rightarrow (x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz$$

2) Extindere Padoa.

Pentru $k,n>0; x=\frac{-a+b+c}{2}, y=\frac{a-b+c}{2}, z=\frac{a+b-c}{2}$, unde a,b,c sunt laturile unui triunghi ABC rezultă o extindere a inegalităţii lui PADOA:

$$\mathbf{[(n-k)(a-b)+(n+k)c][(n-k)(b-c)+(n+k)a][(n-k)(c-a)+(n+k)b] \geq (k+n)^3(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}.$$

Gheorghe Ghiţă, Buzău

Demonstraţie. $\prod\left(k\frac{-a+b+c}{2}+n\frac{a-b+c}{2}\right) \overset{Extindere\ Cesàro}{\geq} (k+n)^3\prod\frac{b+c-a}{2} \Leftrightarrow$

$$\prod[(n-k)(a-b)+(n+k)c] \geq (k+n)^3\prod(b+c-a).$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $\Leftrightarrow a=b=c$.

Pentru $n=k=1$se obţine binecunoscuta inegalitate a lui Padoa:

$$\Delta ABC \Rightarrow abc \geq (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c).$$

Lemă. $\forall x,y,z \geq 0 \Rightarrow \sum x^2y \leq \frac{1}{3}\sum x\sum x^2$.

Demonstraţie. $\sum x\sum x^2 = \sum(x^3+x^2y+xy^2) \overset{MA-MG}{\geq} \sum 3\sqrt[3]{x^3.x^2y\cdot xy^2} = 3\sum x^2y$.

Aplicaţii.

A1) $x, y, z \geq 0 \Rightarrow$

$$xy + yz + zx \leq \frac{9\prod(x+y)}{8(x+y+z)} \leq \frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{\prod(x+y)}\right)^2 \leq x^2 + y^2 + z^2$$

Gheorghe Ghiţă, Buzău

Soluţie .

Prima inegalitate.

$\frac{8}{9}(x+y+z)(xy+yz+zx) \leq (x+y)(y+z)(z+x) \Leftrightarrow x(y-z)^2 + y(z-x)^2 + z(x-y)^2 \geq 0;$

A doua inegalitate.

$\frac{9\prod(x+y)}{8\sum x} \leq \frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{\prod(x+y)}\right)^2 \Leftrightarrow 3\prod(x+y) \leq 2\left(\sqrt[3]{\prod(x+y)}\right)^2 \sum x \Leftrightarrow 27\prod(x+y) \leq 8\left(\sum x\right)^3 \Leftrightarrow \prod(x+y) \overset{M\ A-MG}{\leqq} \left(\frac{\sum(x+y)}{3}\right)^3 = \frac{8(\sum x)^3}{27};$

A treia inegalitate.

$\sqrt[3]{\prod(x+y)} \overset{M\ A-MG}{\leqq} \sqrt[3]{\frac{(\sum(x+y))^3}{27}} = \frac{2\sum x}{3} \Rightarrow \frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{\prod(x+y)}\right)^2 \leq \frac{3}{4}\cdot\frac{4(\sum x)^2}{9} = \frac{(\sum x)^2}{3} \leq \sum x^2 \Leftrightarrow \sum xy \leq \sum x^2.$

Notă. Din A1) **se obţine** inegalitatea lui **Carlson:**

$$\sqrt[3]{\prod(x+y)} \geq 2\sqrt{\frac{\sum xy}{3}}$$

$$\sqrt[3]{\prod(x+y)} \overset{A1)}{\geqq} \sqrt[3]{\frac{8\sum x \sum xy}{9}} = 2\sqrt[6]{\frac{(\sum x)^2(\sum xy)^2}{81}} \overset{(\sum x)^2 \geq 3\sum xy}{\geqq} 2\sqrt[6]{\frac{(\sum xy)^3}{27}} = 2\sqrt{\frac{\sum xy}{3}} \Rightarrow$$

$$\sqrt[3]{\prod(x+y)} \geq 2\sqrt{\frac{\sum xy}{3}}.$$

A2) $x, y, z, k \geq 0 \Rightarrow$

$$\prod(kx+y) \leq \frac{(k+1)^2}{3}\sum xy(kx+y).$$

Gheorghe Ghiţă, Buzău

Soluţie.

$$\prod(kx+y) = (k^3+1)xyz + k^2\sum x^2y + k\sum xy^2;$$

$$\prod(kx+y) \leq \frac{(k+1)^2}{3}\sum xy(kx+y) \Leftrightarrow (k^3+1)xyz + k^2\sum x^2y + k\sum xy^2 \leq$$

$$\frac{(k+1)^2}{3}\left(k\sum x^2y+\sum xy^2\right) \Leftrightarrow k(k^2-k+1)\sum x^2y+(k^2-k+1)\sum xy^2 \geq$$

$$3(k+1)(k^2-k+1)xyz \Leftrightarrow k\sum x^2y+\sum xy^2 \geq 3(k+1)xyz,$$

adevărată deoarece

$$k\sum x^2y+\sum xy^2 \overset{MA-MG}{\geq} 3kxyz+3xyz=3(k+1)xyz.$$

A3) x,y,z, $k \geq 0 \Rightarrow$

$$\prod(kx+y) \leq \frac{(k+1)^3}{9}(x+y+z)(x^2+y^2+z^2).$$

Gheorghe Ghiţă, Buzău

Soluţia1.

$$\prod(\mathrm{kx}+\mathrm{y})=(k^3+1)xyz+k^2\sum x^2y+k\sum xy^2 \overset{Lemă}{\leq}$$

$$(k^3+1)xyz+\frac{k^2}{3}\sum x\sum x^2+\frac{k}{3}\sum x\sum x^2 \overset{MA-MG}{\leq} (k^3+1)\frac{(\sum x)^3}{27}+\frac{k^2+k}{3}\sum x\sum x^2 \overset{\frac{(\sum x)^2}{3}\leq\sum x^2}{\leq}$$

$$\frac{k^3+1}{9}\sum x\sum x^2+\frac{k^2+k}{3}\sum x\sum x^2=\frac{(k+1)^3}{9}\sum x\sum x^2.$$

Soluţia 2.

$$\prod(\mathrm{kx}+\mathrm{y}) \overset{\mathrm{MA-MG}}{\leq} \left(\frac{\sum(\mathrm{kx}+\mathrm{y})}{3}\right)^3=\left(\frac{k\sum x+\sum y}{3}\right)^3=\frac{(\boldsymbol{k}+\mathbf{1})^3}{\mathbf{27}}(\mathrm{x}+\mathrm{y}+\mathrm{z})^3=$$

$$\frac{(\mathrm{k}+1)^3}{9}(\mathrm{x}+\mathrm{y}+\mathrm{z})\frac{(\mathrm{x}+\mathrm{y}+\mathrm{z})^2}{\mathbf{3}} \overset{\frac{(\sum x)^2}{3}\leq\sum x^2}{\leq} \frac{(k+1)^3}{9}(x+y+z)(x^2+y^2+z^2).$$

A4) $\mathrm{a},\mathrm{b},\mathrm{c},\mathrm{k}>0 \Rightarrow$

$$\frac{a}{kb+c}+\frac{b}{kc+a}+\frac{c}{ka+b}+\frac{(k+2)^4(ka+b)(kb+c)(kc+a)}{(k+1)^4(ka+b+c)(a+kb+c)(a+b+kc)} \geq \frac{k+5}{k+1}$$

Gheorghe Ghiţă

Soluţie. $\sum\frac{a}{kb+c}+\frac{(\mathrm{k}+2)^4\prod(\mathrm{ka}+\mathrm{b})}{(\mathrm{k}+1)^4\prod(\mathrm{ka}+\mathrm{b}+\mathrm{c})} \geq \frac{k+5}{k+1} \Leftrightarrow \sum\left(\frac{c}{ka+b}+1\right)+\frac{(\mathrm{k}+2)^4\prod(\mathrm{ka}+\mathrm{b})}{(\mathrm{k}+1)^4\prod(\mathrm{ka}+\mathrm{b}+\mathrm{c})} \geq \frac{k+5}{k+1}+3 \Leftrightarrow$

$$\sum\frac{ka+b+c}{ka+b}+\frac{(\mathrm{k}+2)^4\prod(\mathrm{ka}+\mathrm{b})}{(\mathrm{k}+1)^4\prod(\mathrm{ka}+\mathrm{b}+\mathrm{c})} \geq \frac{4(k+2)}{k+1};\ \sum\frac{ka+b+c}{ka+b}+\frac{(\mathrm{k}+2)^4\prod(\mathrm{ka}+\mathrm{b})}{(\mathrm{k}+1)^4\prod(\mathrm{ka}+\mathrm{b}+\mathrm{c})} \overset{MA-MG}{\geq}$$

$$4\sqrt[4]{\prod\frac{ka+b+c}{ka+b}\cdot\frac{(\mathrm{k}+2)^4\prod(\mathrm{ka}+\mathrm{b})}{(\mathrm{k}+1)^4\prod(\mathrm{ka}+\mathrm{b}+\mathrm{c})}}=\frac{4(k+2)}{k+1}.$$

Notă. Pentru $k=1 \Rightarrow$ problema J656, Mathematic Reflection. Nr. 2/2024 de Nguyen Viet Hong, Hanoi, University of Sciences Vietnam

A5) For $k \geq 1$ in ΔABC the following relationship holds:

$$\min\left(\sum(kb+nc)h_a, \sum a(nh_b+kh_c)\right) \geq 18(k+n)\sqrt{3}r^2.$$

Solution.

$$\sum(kb+nc)h_a = \sum(kb+nc)\frac{2S}{a}2S\sum\frac{kb+nc}{a} \overset{A-G}{\geq} 2S\cdot 3\sqrt[3]{\frac{\prod(kb+nc)}{abc}} \overset{M\ A-MG}{\geq}$$

$$A\ 6pr\sqrt[3]{\frac{(k+n)^3abc}{abc}} = 6pr(k+n) \overset{Mitrinovic}{\geq} 18(k+n)\sqrt{3}r^2;$$

$$\sum a(nh_b+kh_c) = \sum a\left(n\frac{2S}{b}+k\frac{2S}{c}\right) = 2S\sum a(nh_b+kh_c) =$$

$$2pr\sum\frac{a(kb+nc)}{bc} \overset{A-G}{\geq} 2pr\cdot 3\sqrt[3]{\frac{abc\prod_{cyc}(kb+nc)}{(abc)^2}} = 6pr\sqrt[3]{\frac{\prod_{cyc}(kb+nc)}{abc}} \overset{MA-MG}{\geq}$$

$$6pr\sqrt[3]{\frac{(k+n)^3abc}{abc}} = 6pr(k+n) \overset{Mitrinovic}{\geq} 18(k+n)\sqrt{3}r^2.$$

Equality holds for $\boldsymbol{a=b=c}$.

Remark. For $k=n=1$result problem 1718 proposed by Zaza Mzhavanadze- Georgia, RMM-Geometry Marathon 1701-1800

A6) For $k,n \geq 1$ in ΔABC the following relationship holds:

$$\left(k+ntg^2\frac{A}{2}\right)\left(k+ntg^2\frac{B}{2}\right)\left(k+ntg^2\frac{C}{2}\right) \geq k(k-n)^2$$

Gheorghe Ghiţă

Solution.**Lemma**. $\Delta ABC \Rightarrow$ a)$\sum tg^2\frac{A}{2} = \left(\frac{4R+r}{p}\right)^2 - 2$; $b)\sum tg^2\frac{A}{2}tg^2\frac{B}{2} = \frac{p^2-2r^2-8Rr}{p^2}$; $c)\prod tg^2\frac{A}{2} = \frac{r^2}{p^2}$.

$$\prod\left(k+ntg^2\frac{A}{2}\right) = k^3+k^2n\sum tg^2\frac{A}{2}+kn^2\sum tg^2\frac{A}{2}tg^2\frac{B}{2}+n^3\prod tg^2\frac{A}{2} \overset{Lemma}{=}$$

$$k^3+k^2n\left[\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2-2\right]+kn^2\frac{p^2-2r^2-8Rr}{p^2}+n^3\frac{r^2}{p^2} =$$

$$k^3-2k^2n+kn^2+\frac{k^2n(4R+r)^2-2kn^2r(4R+r)+n^3r^2}{p^2} =$$

$$k(k-n)^2+\frac{n(k(4R+r)-nr)^2}{p^2} \geq k(k-n)^2.$$

Remark. For $k=1, n=9$ result problem 1726 proposed by Nguyn Hung Cuong-Vietnam, RMM-Geometry Marathon 1701-1800.

A7) $\Delta ABC; k>0 \Rightarrow$

$$\frac{9(ka+b)(kb+c)(kc+a)}{(k+1)^3abc} \leq \frac{4R+r}{r}$$

Gheorghe Ghiţă, Buzău

Soluţie.

$$\prod(ka+b) = (k^3+1)abc+k^2\sum a^2b+k\sum ab^2 \overset{Lemă}{\leq}$$

$$4(k^3+1)pRr+\frac{k^2+k}{3}\sum a\sum a^2 \overset{\sum a^2=2(p^2-r^2-4RR)}{\overbrace{=}} \frac{4(k+1)p}{3}[kp^2+(3k^2-7k+3)Rr-kr^2] \overset{Gerretsen}{\overbrace{\leq}}$$

$$\frac{4(k+1)p}{3}[4kR^2+(3k^2-3k+3)Rr+2kr^2] \overset{(1)}{\overbrace{\leq}} \frac{4(k+1)^3pR(R+r)}{3} \Rightarrow$$

$$\frac{9\prod(\mathrm{ka+b})}{(k+1)^3abc} \leq \frac{9}{4(k+1)^3PRr}\cdot\frac{4(k+1)^3pR(R+r)}{3}=\frac{3R+3r}{r}\leq\frac{4R+r}{r}\Leftrightarrow R \overset{Euler}{\overbrace{\geq}} 2r,$$

unde(1):

$$4kR^2+(3k^2-3k+3)Rr+2kr^2\leq(k+1)^2R(R+r)\Leftrightarrow$$

$$(k-1)^2R^2-(2k^2-5k+2)Rr-2kr^2=(R-2r)((k-1)^2R+kr) \overset{Euler}{\overbrace{\geq}} 0.$$

Notă. Pentru $k=1$ se obţine problema IX-63, RMM winter edition 2024 de Adil Abdullaev, Azerbaidajan

A8) $\Delta\mathrm{ABC}; \mathrm{k}>0 \Rightarrow \frac{9(\mathrm{ka+b})(\mathrm{kb+c})(\mathrm{kc+a})}{(k+1)^3abc}\leq(r_a+r_b+r_c)\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_a}\right)$

Gheorghe Ghiţă, Buzău

Soluţie. Avem

$$(r_a+r_b+r_c)\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_a}\right)=(4R+r)\frac{1}{r}=\frac{4R+r}{r}; \frac{9(\mathrm{ka+b})(\mathrm{kb+c})(\mathrm{kc+a})}{(k+1)^3abc} \overset{A7)}{\overbrace{\leq}} \frac{4R+r}{r}\Rightarrow$$

$$\frac{9(\mathrm{ka+b})(\mathrm{kb+c})(\mathrm{kc+a})}{(k+1)^3abc}\leq(r_a+r_b+r_c)\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_a}\right).$$

Notă. Pentru $k=1$ se obţine problema IX-56, RMM 31, 2021 de Adil Abdullaev, Azerbaidajan

Bibliografie.

1. Mathematic Reflection 2024
2. RMM-Geometry Marathon 1701-1800
3. RMM 2021
4. RMM winter edition 2024
5. Sclipirea Minţii 2020-2024