

Examenul național de bacalaureat 2026

Proba E. c)

Matematică *M\_șt-nat*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Se consideră numerele complexe  $z_1 = 4 - 3i$  și  $z_2 = 1 - 2i$ . Arătați că  $z_1 + 3iz_2 = 10$ .
- 5p 2. Se consideră funcțiile  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3 - x$  și  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = 2x + 1$ . Determinați numărul real  $a$  pentru care  $f(a) = 3a + g(3)$ .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_4(x^2 + 4) = \log_4 x + \log_4 5$ .
- 5p 4. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 4.
- 5p 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(2,8)$ ,  $B(0,4)$  și  $C(a,b)$ , unde  $a$  și  $b$  sunt numere reale. Determinați numerele reale  $a$  și  $b$ , știind că segmentele  $OA$  și  $BC$  au același mijloc.
- 5p 6. Se consideră triunghiul  $ABC$ , dreptunghic în  $A$ , cu  $C = \frac{\pi}{6}$ . Raza cercului circumscris triunghiului  $ABC$  este egală cu 4. Arătați că  $AB = 4$ .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  și  $A(x) = \begin{pmatrix} x-1 & 1 \\ 1-x & x-5 \end{pmatrix}$ , unde  $x$  este număr real.
- 5p a) Arătați că  $\det(A(6)) = 10$ .
- 5p b) Determinați numărul real  $a$  pentru care  $A(3) \cdot A(3) = aI_2$ .
- 5p c) Demonstrați că numărul  $N = \det(A(m) \cdot A(2) - A(m-1))$  este natural, pentru orice număr întreg  $m$ .
2. Se consideră polinomul  $f = X^3 + aX^2 - 2X + 2$ , unde  $a$  este număr real.
- 5p a) Arătați că  $f(0) = 2$ , pentru orice număr real  $a$ .
- 5p b) Determinați numărul real  $a$  pentru care  $x_1 x_2 x_3 (1 + x_1 + x_2 + x_3) = 4$ , unde  $x_1$ ,  $x_2$  și  $x_3$  sunt rădăcinile polinomului  $f$ .
- 5p c) Știind că polinomul  $f$  este divizibil cu polinomul  $X + 1$ , determinați restul împărțirii lui  $f$  la polinomul  $X^2 - 2$ .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x(x^2 + x - 1)$ .
- 5p a) Arătați că  $f'(x) = e^x(x^2 + 3x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p b) Arătați că  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + f(x)}{f'(x)} = \frac{1}{3}$ .
- 5p c) Demonstrați că  $e^{x+3}(x^2 + x - 1) \leq 5$ , pentru orice  $x \in (-\infty, 0]$ .
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x + \sqrt{2x^2 + 1}$ .
- 5p a) Arătați că  $\int_3^5 (f(x) - \sqrt{2x^2 + 1}) dx = 8$ .
- 5p b) Arătați că  $\int_1^2 \frac{x}{(f(x) - x)^2} dx = \frac{\ln 3}{4}$ .

- 5p** c) Determinați numărul real  $a$  pentru care volumul corpului obținut prin rotația graficului funcției  $g: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = f(x)$  în jurul axei  $Ox$  este egal cu  $\frac{a\pi}{3}$ .

**Examenul național de bacalaureat 2026**  
**Proba E. c)**  
**Matematică  $M_{\text{șt-nat}}$**   
**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

Model

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

(30 de puncte)

1.	$z_1 + 3iz_2 = 4 - 3i + 3i(1 - 2i) = 4 - 3i + 3i - 6i^2 =$ $= 4 + 6 = 10$	2p 3p
2.	$g(3) = 7, f(a) = 3 - a$ , pentru orice număr real $a$ $3 - a = 3a + 7$ , de unde obținem $a = -1$	2p 3p
3.	$\log_4(x^2 + 4) = \log_4(5x)$ , de unde obținem $x^2 - 5x + 4 = 0$ $x = 1$ sau $x = 4$ , care convin	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 3 numere care au produsul cifrelor egal cu 4, deci sunt 3 cazuri favorabile, de unde obținem $p = \frac{3}{90} = \frac{1}{30}$	2p 3p
5.	$M(1,4)$ este mijlocul segmentului $OA$ Cum $M$ este mijlocul segmentului $BC$ , obținem $a = 2$ și $b = 4$	2p 3p
6.	$BC = 2R = 8$ , unde $R$ este raza cercului circumscris triunghiului $ABC$ $AB = \frac{BC}{2} = 4$	2p 3p

**SUBIECTUL al II-lea**

(30 de puncte)

1.a)	$A(6) = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(6)) = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 - (-5) \cdot 1 =$ $= 5 + 5 = 10$	3p 2p
b)	$A(3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow A(3) \cdot A(3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_2$ $2I_2 = aI_2$ , de unde obținem $a = 2$	3p 2p
c)	$A(m) \cdot A(2) - A(m-1) = \begin{pmatrix} m-1 & 1 \\ 1-m & m-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m-2 & 1 \\ 2-m & m-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & m-5 \\ 4-m & 22-5m \end{pmatrix}$ , de unde obținem $N = (m-4)(m-5)$ , pentru orice număr întreg $m$ Cum $m-4$ și $m-5$ sunt numere întregi și $(m-4)(m-5) \geq 0$ , obținem că numărul $N$ este natural, pentru orice număr întreg $m$	3p 2p
2.a)	$f(0) = 0^3 + a \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 + 2 =$ $= 0 + 0 - 0 + 2 = 2$ , pentru orice număr real $a$	3p 2p
b)	$x_1x_2x_3 = -2, x_1 + x_2 + x_3 = -a, x_1x_2x_3(1 + x_1 + x_2 + x_3) = -2(1-a)$ , pentru orice număr real $a$ $-2(1-a) = 4$ , de unde obținem $a = 3$	3p 2p

<b>c)</b>	$f(-1) = 0$ , de unde obținem $a = -3$	<b>2p</b>
	$f = X^3 - 3X^2 - 2X + 2 = (X^2 - 2)(X - 3) - 4$ , deci restul împărțirii lui $f$ la $X^2 - 2$ este $-4$	<b>3p</b>

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$f'(x) = e^x(x^2 + x - 1) + e^x(2x + 1) =$	<b>3p</b>
	$= e^x(x^2 + x - 1 + 2x + 1) = e^x(x^2 + 3x)$ , $x \in \mathbb{R}$	<b>2p</b>
<b>b)</b>	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + f(x)}{f'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x(x^2 + x)}{e^x(x^2 + 3x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+1)}{x(x+3)} =$	<b>3p</b>
	$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{x+3} = \frac{1}{3}$	<b>2p</b>
<b>c)</b>	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3$ sau $x = 0$ ; pentru orice $x \in (-\infty, -3]$ , $f'(x) \geq 0$ , deci $f$ este crescătoare pe $(-\infty, -3]$ și, pentru orice $x \in [-3, 0]$ , $f'(x) \leq 0$ , deci $f$ este descrescătoare pe $[-3, 0]$	<b>3p</b>
	$f(x) \leq f(-3)$ , pentru orice $x \in (-\infty, 0]$ și, cum $f(-3) = \frac{5}{e^3}$ , obținem $e^{x+3}(x^2 + x - 1) \leq 5$ , pentru orice $x \in (-\infty, 0]$	<b>2p</b>
<b>2.a)</b>	$\int_3^5 (f(x) - \sqrt{2x^2 + 1}) dx = \int_3^5 x dx = \frac{x^2}{2} \Big _3^5 =$	<b>3p</b>
	$= \frac{25}{2} - \frac{9}{2} = 8$	<b>2p</b>
<b>b)</b>	$\int_1^2 \frac{x}{(f(x) - x)^2} dx = \int_1^2 \frac{x}{2x^2 + 1} dx = \frac{1}{4} \int_1^2 \frac{(2x^2 + 1)'}{2x^2 + 1} dx = \frac{1}{4} \ln(2x^2 + 1) \Big _1^2 =$	<b>3p</b>
	$= \frac{\ln 9}{4} - \frac{\ln 3}{4} = \frac{\ln 3}{4}$	<b>2p</b>
<b>c)</b>	$V = \pi \int_0^2 g^2(x) dx = \pi \int_0^2 (3x^2 + 1 + 2x\sqrt{2x^2 + 1}) dx = \pi \left( x^3 \Big _0^2 + x \Big _0^2 + \frac{1}{2} \int_0^2 \sqrt{2x^2 + 1} \cdot (2x^2 + 1)' dx \right) =$	<b>2p</b>
	$= \pi \left( 10 + \frac{(2x^2 + 1)\sqrt{2x^2 + 1}}{3} \Big _0^2 \right) = \frac{56\pi}{3}$ , deci $\frac{a\pi}{3} = \frac{56\pi}{3}$ , de unde obținem $a = 56$	<b>3p</b>