Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați numerele reale a și b pentru care $(a+bi)(1+i)=4$, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=mx^2-2x+m$, unde m este număr real nenul. Determinați numerele reale m pentru care $f(m-x)=f(m+x)$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2\log_2(2x)-1=\log_2(x^2+x+2)$.

5p **4.** Se consideră mulțimile $A=\{1,2,3,4\}$ și $F=\{f \mid f:A\to A\}$. Determinați probabilitatea ca, alegând un element f din mulțimea F, acesta să verifice inegalitatea $f(n)\le n$, pentru orice $n\in A$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5,3)$ și $B(-1,5)$. Determinați coordonatele punctului C, știind că $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{OC}$.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, cu $AB=8$, măsura unghiului C de 30° și punctul O, centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Determinați distanța de la punctul O la latura AB.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}3 & a & -2\\ 2a+1 & 1-a & -1\\ a+2 & -2 & 1\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}3x+ay-2z=b\\ (2a+1)x+(1-a)y-z=c\\ (a+2)x-2y+z=-1\end{cases}$, unde a, b și c sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=5$.

5p **b)** Determinați numerele reale a pentru care matricea $A(a)$ este inversabilă.

5p **c)** Determinați numerele reale b și c pentru care sistemul de ecuații este compatibil, oricare ar fi numărul real a.

2. Se consideră polinomul $f=X^4+aX^3+aX^2+8X-8$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(-1)=-15$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care restul împărțirii polinomului f la polinomul $g=X^2-1$ este egal cu $15X$.

5p **c)** Arătați că, pentru orice număr real a, polinomul f **nu** are toate rădăcinile numere întregi.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-x-(x^4-1)\operatorname{arctg}x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=-x^2(4x\operatorname{arctg}x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f care este paralelă cu axa Ox.

5p **c)** Demonstrați că $\operatorname{tg}(f(x))\ge f(x)\ge f(\operatorname{tg}x)$, pentru orice $x\in[0,1]$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+e^x}{1+e^{-x}}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^3\left(1+e^{-x}\right)f(x)\,dx=8+e^3$.

5p **b)** Arătați că $\int_{-m}^{m}\dfrac{f(x)}{x^2+e^x}\,dx=m$, pentru orice $m\in(0,+\infty)$.

5p **c)** Determinați numărul real nenul a pentru care $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{e^{ax}-1}\int_0^x f(t)\,dt\right)=1$.

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a-b+(a+b)i=4$, de unde obținem $a-b=4$ și $a+b=0$	**3p**
	$a=2$ și $b=-2$	**2p**
2.	$m(m-x)^2-2(m-x)+m=m(m+x)^2-2(m+x)+m \Rightarrow x\left(m^2-1\right)=0$ și, cum egalitatea are loc pentru orice număr real x, obținem $m^2-1=0$	**3p**
	$m=-1$ sau $m=1$, care convin	**2p**
3.	$\log_2\left(2x^2\right)=\log_2\left(x^2+x+2\right)$, de unde obținem $x^2-x-2=0$	**3p**
	$x=-1$, care nu convine; $x=2$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea F are $4^4=256$ de elemente, deci sunt 256 de cazuri posibile	**2p**
	Pentru fiecare $n\in A$, $f(n)$ se poate alege în n moduri, deci sunt $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24$ de cazuri favorabile, de unde obținem $p=\frac{24}{256}=\frac{3}{32}$	**3p**
5.	$\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)$, unde M este mijlocul segmentului AB, de unde obținem $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{OC}$, deci punctul C este mijlocul segmentului OM	**3p**
	Cum $x_M=2$ și $y_M=4$, obținem $x_C=1$ și $y_C=2$	**2p**
6.	$\frac{AB}{\sin C}=2R\Rightarrow R=\frac{AB}{2\sin C}=\frac{8}{2\cdot\frac{1}{2}}=8$, unde R este raza cercului circumscris triunghiului ABC	**2p**
	Triunghiul OAB este echilateral cu latura egală cu 8, deci distanța de la punctul O la latura AB este $OM=4\sqrt{3}$, unde M este mijlocul segmentului AB	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}3 & 0 & -2\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(0))=\begin{vmatrix}3 & 0 & -2\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & -2 & 1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=3+4+0+4-6-0=5$	**3p**
b)	$\det(A(a))=\begin{vmatrix}3 & a & -2\\ 2a+1 & 1-a & -1\\ a+2 & -2 & 1\end{vmatrix}=5(1+a)(1-a)$, pentru orice număr real a	**2p**
	$\det(A(a))=0\Leftrightarrow a=-1$ sau $a=1$, deci matricea $A(a)$ este inversabilă dacă și numai dacă $a\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$	**3p**

c)	Pentru $a\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, sistemul de ecuații este compatibil, oricare ar fi numerele reale b și c; pentru $a\in\{-1,1\}$, $\begin{vmatrix} a & -2 \\ 1-a & -1\end{vmatrix}\neq 0$, deci sistemul este compatibil dacă și numai dacă $\begin{vmatrix} -1 & -2 & b \\ 2 & -1 & c \\ -2 & 1 & -1\end{vmatrix}=0$ și $\begin{vmatrix} 1 & -2 & b \\ 0 & -1 & c \\ -2 & 1 & -1\end{vmatrix}=0$	**3p**
	$b=2$ și $c=1$	**2p**
2.a)	$f(-1)=(-1)^4+a\cdot(-1)^3+a\cdot(-1)^2+8\cdot(-1)-8=$	**3p**
	$=1-a+a-8-8=-15$, pentru orice număr real a	**2p**
b)	Restul împărțirii polinomului f la polinomul g este egal cu $(a+8)X+a-7$, pentru orice număr real a	**3p**
	$(a+8)X+a-7=15X$, de unde obținem $a=7$	**2p**
c)	Presupunând că rădăcinile x_1,x_2,x_3,x_4 ale polinomului f sunt numere întregi, cum $x_1+x_2+x_3+x_4=-a$, obținem că $a\in\mathbb{Z}$	**2p**
	$x_1x_2x_3x_4=-8\Rightarrow\|x_1\|\cdot\|x_2\|\cdot\|x_3\|\cdot\|x_4\|=8$, de unde obținem că cel puțin o rădăcină a polinomului f are modulul egal cu 1 și, cum $f(-1)\neq 0$ pentru orice număr real a, obținem $f(1)=0$, deci $a=-\dfrac{1}{2}$, ceea ce este fals, deci polinomul f **nu** are toate rădăcinile numere întregi	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=-1-4x^3\operatorname{arctg}x-\left(x^4-1\right)\cdot\dfrac{1}{x^2+1}=$	**3p**
	$=-1-4x^3\operatorname{arctg}x-x^2+1=-x^2\left(4x\operatorname{arctg}x+1\right)$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	Tangenta la graficul funcției f în punctul $A\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$ este paralelă cu axa $Ox\Leftrightarrow f'\left(x_0\right)=0$	**2p**
	$-{x_0}^2\left(4x_0\operatorname{arctg}x_0+1\right)=0$ și, cum $x_0\operatorname{arctg}x_0\geq 0$ pentru orice $x_0\in\mathbb{R}$, obținem $x_0=0$, deci ecuația tangentei la graficul funcției f care este paralelă cu axa Ox este $y-f(0)=f'(0)(x-0)$, adică $y=1$	**3p**
c)	$f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, deci funcția f este descrescătoare pe $\mathbb{R}$ și, cum $f(0)=1$ și $f(1)=0$, obținem $0\leq f(x)\leq 1$, pentru orice $x\in[0,1]$	**2p**
	Pentru $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\operatorname{tg}x-x$, $g'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}-1\geq 0$, pentru orice $x\in[0,1]$, deci g este crescătoare, de unde obținem $\operatorname{tg}x\geq x$, pentru orice $x\in[0,1]$, deci $\operatorname{tg}\left(f(x)\right)\geq f(x)\geq f(\operatorname{tg}x)$, pentru orice $x\in[0,1]$	**3p**
2.a)	$\int_0^3\left(1+e^{-x}\right)f(x)\,dx=\int_0^3\left(x^2+e^x\right)dx=\left.\left(\dfrac{x^3}{3}+e^x\right)\right\|_0^3=$	**3p**
	$=\dfrac{27}{3}+e^3-0-1=8+e^3$	**2p**
b)	$\int_{-m}^{m}\dfrac{f(x)}{x^2+e^x}dx=\int_{-m}^{m}\dfrac{1}{1+e^{-x}}dx=\int_{-m}^{m}\dfrac{\left(e^x+1\right)'}{e^x+1}dx=$	**3p**
	$=\ln\left(1+e^x\right)\Big\|_{-m}^{m}=\ln\left(1+e^m\right)-\ln\left(\dfrac{1+e^m}{e^m}\right)=\ln e^m=m$, pentru orice $m\in(0,+\infty)$	**2p**

c)	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^{ax}-1}\int\limits_0^x f(t)\,dt\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\int\limits_0^x f(t)\,dt\right)'}{\left(e^{ax}-1\right)'}=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{ae^{ax}}=\frac{1}{2a}$, de unde obținem $\frac{1}{2a}=1$, deci $a=\frac{1}{2}$, care convine	**3p**